

# 半離散方程式の対称性と群不変解

## Symmetries and Group-Invariant Solutions of Semi-Discrete Equations

彭 林玉\*, 富田 繁, 郡司 士  
Linyu Peng\*, Shigeru Tomita, and Mamoru Gunji

慶應義塾大学理工学部  
Faculty of Science and Technology, Keio University

December 28, 2024

**Key words:** Semi-Discrete Equations, Symmetries, Lie Groups, Similarity Reduction, Group-Invariant Solutions

半離散方程式, 対称性, リー群, 相似逓減, 群不変解

## 1 序論

対称性は微分方程式の基本的な性質であり, 19世紀にノルウェーの数学者, ソフス・リー (Sophus Lie) によって常微分方程式の可解性の研究において導入された [1, 2]. 対称性とは, 簡潔に言えば, 方程式の解集合を不変とする変換群である. 例えば, 図1で示すように, 平面上の回転角度  $\theta$  による  $SO(2)$  変換は, 単位円の形状を変えない. 言い換えると, リー群  $SO(2)$  は代数方程式  $x^2 + y^2 = 1$  の対称性である. 一方, 微分方程式における対称性は, ある解からある解への変換となる.  $x$  を独立変数,  $y$  を従属変数としたとき, スケール変換  $(x, y) \mapsto (\exp(\varepsilon)x, \exp(\varepsilon)y)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  は, 常微分方程式  $y' = f(y/x)$  の対称性である. 連続対称性, すなわち局所微分同相群は, リー群やリー代数などの分野の発展に寄与し, 微分方程式の相似逓減 (similarity reduction) による解析解の導出や変分対称性と保存則を結びつけるネーターの定理, 可積分性など, 幅広く応用されている [4, 18, 19, 21, 22].

離散方程式および半離散方程式の対称性の研究も盛んに行われてきた [7, 10, 13, 14, 16, 24, 28, 32]. ところが半離散方程式 (微分差分方程式ともいう) においては, 連続独立変数と離散独立変数が非可換のため, 対称性とならない非内在 (non-intrinsic) (または不規則 (irregular)) な変換が生じるという問題があった [15, 25]. 本論文では, この問題の解決方法を論じるとともに, 半離散方程式における対称性理論について紹介する [27]. 具体例として, 戸田型, ヴォルテラ型, 5点の伊藤・成田・ボゴヤヴレンスキー方程式などのリー点対称性 (Lie point symmetry) を求め, 群不変解 (group-invariant solution) を導出する.

\*Corresponding author: l.peng@mech.keio.ac.jp

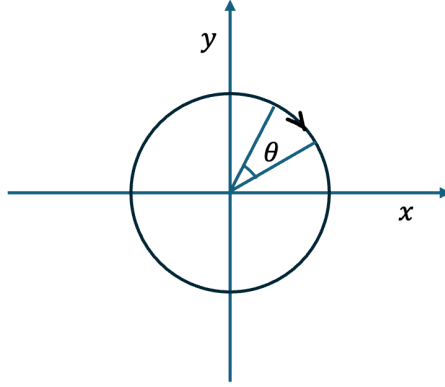


図 1: 平面上の回転

## 2 半離散方程式の対称性

微分方程式や差分方程式の解は、局所的に関数のグラフとして表現できる。また、方程式における独立変数と従属変数（または未知関数）が支配する幾何学的構造は、逆変換もまた構造保存となるような変換を決定する。

半離散方程式とは、微分構造と差分構造を併せ持つ方程式である。本論文では、 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^m$  上に定義された半離散方程式を対象とし、連続独立変数を  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^p)$ 、離散独立変数を  $\mathbf{n} = (n^1, \dots, n^m)$ 、従属変数を  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^q) \in \mathbb{R}^q$  とする。独立変数と従属変数の空間  $\mathcal{T} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^q$  を全空間と呼ぶ。以降では、すべての関数が各連続引数に対して局所的に滑らかであると仮定する。これにより、特異点や他の不連続性に関連する技術的な議論を回避できる。また、アインシュタインの縮約記法を使用する。

### 2.1 微分構造

任意の  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$  に対して、スライス (slice)  $\mathcal{T}_{\mathbf{n}} = \mathbb{R}^p \times \{\mathbf{n}\} \times \mathbb{R}^q$  は連続空間である。また、スライス  $\mathcal{T}_{\mathbf{n}}$  上の関数  $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  は、 $\mathbf{x}$  に関する微分を用いて延長 (prolongation) することができる。これにより生じた無限ジェット空間 (jet space)  $J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}})$  の“垂直”座標  $u_{\mathbf{J};\mathbf{0}}^\alpha$  は、従属変数の微分となる。ここで、セミコロン後のインデックスは、それぞれのスライス上のジェット空間の変数を表し、 $\mathbf{n}$  でのスライスを  $\mathbf{0}$  で表す。インデックス  $\mathbf{J} = (j^1, \dots, j^p)$  の各成分  $j^i$  は、 $x^i$  に関する微分の階数を示す。特に、 $u_{\mathbf{0};\mathbf{0}}^\alpha = u^\alpha$  であり、 $u^\alpha = f^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  の一階微分は、

$$u_{\mathbf{1}_i; \mathbf{0}}^\alpha = \frac{\partial f^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, p \quad (1)$$

である。ここで  $\mathbf{1}_i$  は、 $i$  番目の要素が 1、他は全てゼロのベクトルである。一般には、 $x^i$  による一階微分演算子を、

$$D_i|_{J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}})} := \frac{\partial}{\partial x^i} + u_{\mathbf{J}+\mathbf{1}_i; \mathbf{0}}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{\mathbf{J}; \mathbf{0}}^\alpha} \quad (2)$$

で表す。

以上は単一スライスにおけるジェット空間を考えたものだが、これで全格子 (lattice)  $\mathbb{Z}^m$  に対して十分である。なぜなら、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{n}$  が独立しており、どのスライスに

も同じジェット空間が生成できるためである。すべてのジェット空間を合わせると、全ジェット空間  $J^\infty(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}^m \times J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n})$  が構成される。

## 2.2 差分構造

差分構造は、全空間  $\mathcal{T}$  がすべての平行移動

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\mathbf{K} : \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{T} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) &\mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{n} + \mathbf{K}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3)$$

で保存されることにより生じる。ここで、すべての  $\mathbf{K}, \mathbf{L} \in \mathbb{Z}^m$  に対して、 $\mathbf{T}_\mathbf{L} \circ \mathbf{T}_\mathbf{K} = \mathbf{T}_{\mathbf{K}+\mathbf{L}}$  である。全空間は非連結であるが、各  $\mathbf{n}$  上では連結空間として表現可能である。任意な  $\mathbf{n}$  に対して、すべてのスライス上の  $\mathbf{u}$  を、平行移動  $\mathbf{T}_\mathbf{K}$  の引き戻し (pullback)  $\mathbf{T}_\mathbf{K}^*$  で、スライス  $\mathbf{n}$  にうつすと、スライス  $\mathbf{n}$  上の延長となる。この延長空間を  $P(\mathcal{T}_\mathbf{n})$  と表し、その垂直座標は、

$$u_{\mathbf{0};\mathbf{K}}^\alpha = \mathbf{T}_\mathbf{K}^* \left( u_{\mathbf{0};\mathbf{0}}^\alpha \Big|_{\mathbf{n}+\mathbf{K}} \right), \quad \alpha = 1, \dots, q \quad (4)$$

である。

また、微分構造と差分構造を組み合わせることにより、全ジェット空間に拡張した平行移動

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\mathbf{K} : J^\infty(\mathcal{T}) &\rightarrow J^\infty(\mathcal{T}) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{n}, \dots, u_{\mathbf{J};\mathbf{0}}^\alpha, \dots) &\mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{n} + \mathbf{K}, \dots, u_{\mathbf{J};\mathbf{0}}^\alpha, \dots) \end{aligned} \quad (5)$$

を得る。同様に、あらゆる  $\mathbf{n} + \mathbf{K}$  に対するジェット空間の座標を引き戻し、各  $\mathbf{n}$  上のジェット空間を延長することができる。これにより、垂直座標が、

$$u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha = \mathbf{T}_\mathbf{K}^* \left( u_{\mathbf{J};\mathbf{0}}^\alpha \Big|_{\mathbf{n}+\mathbf{K}} \right) \quad (6)$$

となる空間  $P(J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n}))$  が得られる。この空間は、全延長空間  $P(J^\infty(\mathcal{T})) \cong \mathbb{Z}^m \times P(J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n}))$  の  $\mathbf{n}$  上の連結成分である。

平行移動の合成規則から、恒等式

$$u_{\mathbf{J};\mathbf{K}+\mathbf{L}}^\alpha = \mathbf{T}_\mathbf{K}^* \left( u_{\mathbf{J};\mathbf{L}}^\alpha \Big|_{\mathbf{n}+\mathbf{K}} \right) \quad (7)$$

が成立つ。なお、 $P(J^\infty(\mathcal{T}))$  上の関数  $f$  の  $P(J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n}))$  への制限を、

$$f_\mathbf{n}(\mathbf{x}, \dots, u_{\mathbf{J};\mathbf{L}}^\alpha, \dots) := f(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \dots, u_{\mathbf{J};\mathbf{L}}^\alpha, \dots) \quad (8)$$

と書き、 $f_{\mathbf{n}+\mathbf{K}}(\mathbf{x}, \dots, u_{\mathbf{J};\mathbf{L}}^\alpha, \dots)$  を  $P(J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n}))$  へ引き戻したものを、

$$\mathbf{T}_\mathbf{K}^* f_{\mathbf{n}+\mathbf{K}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{n} + \mathbf{K}, \dots, u_{\mathbf{J};\mathbf{K}+\mathbf{L}}^\alpha, \dots) \quad (9)$$

で表す。平行移動  $\mathbf{T}_\mathbf{K}$  の局所的に滑らかな関数空間への作用、すなわち  $P(J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n}))$  上のシフト演算子 (shift operator)  $\mathbf{S}_\mathbf{K}$  は  $\mathbf{S}_\mathbf{K} f_\mathbf{n} := \mathbf{T}_\mathbf{K}^* f_{\mathbf{n}+\mathbf{K}}$  と定義され、

$$\mathbf{S}_\mathbf{K} : f(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \dots, u_{\mathbf{J};\mathbf{L}}^\alpha, \dots) \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{n} + \mathbf{K}, \dots, u_{\mathbf{J};\mathbf{K}+\mathbf{L}}^\alpha, \dots) \quad (10)$$

となる。 $J^\infty(\mathcal{T})$  上の  $x^i$  に関する微分は、 $P(J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n}))$  上の全微分演算子 (total derivative)

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_{\mathbf{J}+1; \mathbf{K}}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{\mathbf{J}; \mathbf{K}}^\alpha} \quad (11)$$

で表せる。ここで、すべての全微分演算子とシフト演算子は可換である：

$$D_i D_j = D_j D_i, \quad D_i S_{\mathbf{K}} = S_{\mathbf{K}} D_i, \quad S_{\mathbf{K}} S_{\mathbf{L}} = S_{\mathbf{L}} S_{\mathbf{K}}. \quad (12)$$

特に、全微分演算子の合成に対して、以下の略記法を用いる：

$$D_{\mathbf{J}} = D_1^{j^1} \cdots D_p^{j^p}, \quad \mathbf{J} = (j^1, \dots, j^p). \quad (13)$$

連続空間  $P(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  上の差分演算子は、各  $n^i$  の順序から生じる。任意のインデックス  $\mathbf{K} = (k^1, \dots, k^m)$  に対応するシフト演算子は  $S_{\mathbf{K}} = S_1^{k_1} \cdots S_m^{k_m}$  であり、 $S_i := S_{\mathbf{1}_i}$  は  $n^i$  に関する前進シフト (forward shift) を表す。 $n^i$  方向の前進差分は  $P(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  上で演算子

$$D_{n^i} := S_i - \text{id} \quad (14)$$

によって表される。ここで、 $\text{id}$  は恒等写像である。差分発散 (difference divergence) は  $D_{n^i} G^i$  であり、微分差分発散 (differential-difference divergence) は

$$D_i F^i + D_{n^i} G^i \quad (15)$$

である。

線形演算子  $O$  の形式随伴 (formal adjoint)  $O^\dagger$  は一意に存在し、 $P(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  上で定義されたすべての関数  $f$  と  $g$  に対して、 $f O g - (O^\dagger f) g$  が (微分差分) 発散となる。特に、次のような関係が成り立つ：

$$D_i^\dagger = -D_i, \quad S_i^\dagger = S_i^{-1}, \quad \text{id}^\dagger = \text{id}, \quad D_{n^i}^\dagger = -(\text{id}^\dagger - S_i^\dagger) = -S_i^{-1} D_{n^i}. \quad (16)$$

合成規則  $(O_1 O_2)^\dagger = O_2^\dagger O_1^\dagger$  により、

$$S_{\mathbf{K}}^\dagger = S_{-\mathbf{K}}, \quad D_{\mathbf{J}}^\dagger = (-D)_{\mathbf{J}} := (-1)^{j^1 + \dots + j^p} D_{\mathbf{J}} \quad (17)$$

が満たされる。

**定理 1** ([25]).  $P(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  上の関数は、以下の各 (微分差分) オイラー・ラグランジュ演算子

$$\mathbf{E}_{u^\alpha} = (-D)_{\mathbf{J}} S_{-\mathbf{K}} \frac{\partial}{\partial u_{\mathbf{J}; \mathbf{K}}^\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, q \quad (18)$$

のカーネルに属する場合に限り、微分差分発散である。

## 2.3 半離散方程式のリー点変換

本節では、半離散方程式における延長構造に基づき、半離散方程式の変換によって満たされるべき制約について述べる。

リー点変換は全空間上の変換

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{T} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) &\mapsto (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (19)$$

であり、空間  $\mathbb{Z}^m$  の構造を保存するために、格子変換  $\hat{\mathbf{n}} = A\mathbf{n} + \mathbf{n}_0$  が必要である [10]。ここで、 $A \in GL_m(\mathbb{Z})$ 、 $\mathbf{n}_0$  は定数である。1パラメータリー群の写像は、

$$\hat{x}^i = x^i + \varepsilon \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) + O(\varepsilon^2), \quad \hat{n}^i = n^i, \quad \hat{u}^\alpha = u^\alpha + \varepsilon \phi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) + O(\varepsilon^2) \quad (20)$$

で表すことができる。このような写像は  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{u}$  のみを変換するため、元の座標と変換後の座標の両方において、 $P(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  上の同じシフト演算子  $S_{\mathbf{K}}$  を用いることができる。

定理 2 ([27]). 1 パラメタリー群 (20) は, 各  $\xi^i$  が  $\mathbf{n}$  及び  $\mathbf{u}$  と独立である場合に限り,  $P(J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n}))$  の変換群に延長される.

$\xi^i = \xi^i(\mathbf{x})$  の場合, 1 パラメタリー群 (20) の characteristic は

$$\mathbf{Q} := (Q^1, \dots, Q^q), \quad Q^\alpha = \phi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) - \xi^i(\mathbf{x})u_{1i;0}^\alpha \quad (21)$$

と定義される. 標準的な微分延長公式 [22] をジェット空間  $J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n})$  に適用すると,

$$\hat{u}_{\mathbf{J};0}^\alpha = u_{\mathbf{J};0}^\alpha + \varepsilon\phi_{\mathbf{J};0}^\alpha + O(\varepsilon^2), \quad \phi_{\mathbf{J};0}^\alpha = D_{\mathbf{J}}Q^\alpha + \xi^i(\mathbf{x})u_{\mathbf{J}+1i;0}^\alpha \quad (22)$$

となり, これを  $P(J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n}))$  に延長したものが,

$$\hat{u}_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha = u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha + \varepsilon\phi_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha + O(\varepsilon^2), \quad \phi_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha = S_{\mathbf{K}}D_{\mathbf{J}}Q^\alpha + \xi^i(\mathbf{x})u_{\mathbf{J}+1i;\mathbf{K}}^\alpha \quad (23)$$

である. また, 1 パラメタリー群

$$\hat{x}^i = x^i + \varepsilon\xi^i(\mathbf{x}) + O(\varepsilon^2), \quad \hat{n}^i = n^i, \quad \hat{u}^\alpha = u^\alpha + \varepsilon\phi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) + O(\varepsilon^2) \quad (24)$$

の無限小生成作用素 (infinitesimal generator) は

$$\mathbf{v} = \xi^i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x^i} + \phi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u})\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (25)$$

となり,  $P(J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n}))$  上に次のように延長される:

$$\begin{aligned} \text{pr } \mathbf{v} &= \xi^i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x^i} + \phi_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha} \\ &= \xi^i(\mathbf{x})D_i + (S_{\mathbf{K}}D_{\mathbf{J}}Q^\alpha)\frac{\partial}{\partial u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha}. \end{aligned} \quad (26)$$

Characteristic  $\mathbf{Q}$  はグラフの変換に由来し, 各スライス  $\mathcal{T}_\mathbf{n}$  上で,  $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  で定義されるグラフは,

$$\begin{aligned} \hat{u}^\alpha &= f^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \varepsilon\phi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{n})) + O(\varepsilon^2) \\ &= f^\alpha(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{n}) + \varepsilon\left(\phi^\alpha(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{n}, \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{n})) - \xi^i(\hat{\mathbf{x}})\frac{\partial f^\alpha(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{n})}{\partial \hat{x}^i}\right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

に変換される. 以下では, 簡単のためにキャレットを省略している. 変換は  $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  から  $\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  への写像となり, ただし,

$$h^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = f^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \varepsilon Q^\alpha|_{[\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{n})]} + O(\varepsilon^2) \quad (27)$$

である. ここで,  $[\mathbf{u}]$  は  $\mathbf{u}$  及び必要に応じた有限回の延長を示す. 同様に,  $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  のすべての延長は式 (27) の延長に写像され,  $\varepsilon$  の一次テイラー展開で  $S_{\mathbf{K}}D_{\mathbf{J}}Q^\alpha$  の項が生じる. このグラフ上の作用(27)は,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{Q} + O(\varepsilon^2)) \quad (28)$$

となり, これを延長すると, 無限小生成作用素の  $P(J^\infty(\mathcal{T}_\mathbf{n}))$  上の発展形式 (evolutionary representative) は,

$$\text{pr } \mathbf{v}_Q = (S_{\mathbf{K}}D_{\mathbf{J}}Q^\alpha)\frac{\partial}{\partial u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha} \quad (29)$$

と表す.

式 (29) の形をした生成作用素で,  $\mathbf{Q}$  が  $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, [\mathbf{u}])$  に依存するものを一般化変換 (generalized transformation) と呼び, これはエミー・ネーター (Emmy Noether) によって微分方程式に対して導入されたものである [21, 23].

## 2.4 半離散方程式の対称性

半離散方程式

$$\mathcal{A} := (\mathcal{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{n}, [\mathbf{u}]), \dots, \mathcal{A}_\ell(\mathbf{x}, \mathbf{n}, [\mathbf{u}])) = 0 \quad (30)$$

の対称性は、線形化対称条件 (linearized symmetry condition, LSC) によって求まる。具体的には、方程式  $\mathcal{A} = 0$  のすべての解において LSC

$$\text{pr v}(\mathcal{A}_l) = 0, \quad l = 1, \dots, \ell \quad (31)$$

が成り立つ。

対称性を求めるには、LSC (31) を方程式として構成しなければならない。そのためには、微分代数における positive ranking を微分差分に拡張する。

**定義 3.** 変数  $u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha$  の positive ranking とは、次の条件を満たす全順序  $<$  である。

1.  $u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha < D_i u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha (= u_{\mathbf{J}+1_i;\mathbf{K}}^\alpha)$ ,
2.  $u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha < S_i u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha (= u_{\mathbf{J};\mathbf{K}+1_i}^\alpha)$ ,
3.  $u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha < u_{\mathbf{I};\mathbf{L}}^\alpha \implies D_i u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha < D_i u_{\mathbf{I};\mathbf{L}}^\alpha$ ,
4.  $u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha < u_{\mathbf{I};\mathbf{L}}^\alpha \implies S_i u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha < S_i u_{\mathbf{I};\mathbf{L}}^\alpha$ .

$\mathcal{A}_l = 0$  の先頭変数 (leading variable) は、positive ranking が最も高い変数であり、 $U_l$  と表す。方程式  $\mathcal{A}_l = U_l - \omega_l = 0$  は、 $\omega_l$  の先頭変数が  $U_l$  より低い場合に、 $U_l$  に関して解くことが可能である。また、positive ranking の定義より、 $\mathcal{A}_l = 0$  の延長の先頭変数は  $U_l$  の延長である。

各方程式  $\mathcal{A}_l = 0$  が positive ranking における先頭変数について可解であり、さらにすべての先頭変数が他の先頭変数と一致しない (またはその微分やシフトと一致しない) と仮定すると、 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_\ell)$  及びその延長を、 $U = (U_1, \dots, U_\ell)$  及びその延長で置き換えることで、LSC (31) を方程式

$$\text{pr v}(\mathcal{A}_l) \Big|_{[U=\omega]} = 0, \quad l = 1, \dots, \ell \quad (32)$$

に書き換えることができる。リ一点対称性の場合、 $\mathbf{Q}$  の制限から方程式 (32) は線形過剰決定系 (linear overdetermined system) となるため、微分消去法 (differential elimination) と線形方程式の解法を組み合わせることで解くことができる。一般化対称性も同様の方法で求められる。

方程式の positive ranking を選択する自由度は高い。例えば、一般化コワレフスカヤ形式 (Kovalevskaya form) の方程式 [10, 22, 25] は、各独立変数に対する微分またはシフトに基づく positive ranking を持つ。一方、ゲージ対称性を持つ系は通常、優先方向を持たないため、全体の微分差分順序に基づく positive ranking を使用する必要がある。

対称性は多くの応用がある。例えば、一般化対称性は可積分半離散方程式の分類に使用されていた [8, 9, 33]。また、リ一点対称性と一般化対称性を用いることで、群不変解を導出することが可能である。群不変解とは、条件  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  を満たす解のことであり、3章にて詳述する。

## 2.5 分割型半離散方程式のリ一点対称性

定理2は、連続独立変数の変換が  $\mathbf{n}$  に依存しない場合に限り、リ一点変換が  $P(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  を保存することを保証する。ほとんどの半離散方程式に対して、 $P(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  は適切な延長空間であるが、例外的なクラスが存在し、これらは分割型 (partitioned) と呼ばれる [10]。分割型半離散方程式の対称性には、 $\mathbf{n}$  に周期的な  $\mathbf{x}$  の変換が含まれる。

**定義 4.**  $\mathbb{Z}^m$  上の分割型半離散方程式とは、周期的な部分格子  $\mathcal{L}_{\mathbf{r}} = (r_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (r_m\mathbb{Z})$ ,  $r_\mu \in \mathbb{N}$  上で定義される系であり、少なくとも1つの  $r_\mu$  が1でないものである。

以降では、部分格子が離散座標  $n^i$  に整列していると仮定する。この整列は、必要に応じて最初に格子変換を適用することで達成可能である。この場合、 $\mathcal{L}_{\mathbf{r}}$  上の2点間における任意の変換の  $\mu$  成分は、 $r_\mu$  の整数倍である。

各  $r_\mu$  が最大である、すなわち部分格子  $\mathcal{L}_{\mathbf{r}}$  上の半離散方程式が分割されていないと仮定する。この場合、 $\mathbb{Z}^m$  は  $\mathcal{L}_{\mathbf{r}}$  の  $r = r_1 r_2 \cdots r_m$  個のコピーで覆われており、任意の2つのコピー上の方程式の解は完全に独立している。延長空間  $P(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  には、 $\mathcal{L}_{\mathbf{r}}$  に含まれる  $\mathbf{n}$  のコピーで使用されないシフトが含まれているため、半離散方程式の対称性は必ずしも  $P(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  の変換である必要はない。しかし、半離散方程式のすべての解の延長を保持するためには、部分格子  $\mathcal{L}_{\mathbf{r}}$  上の点間のシフトにより定義される縮小延長空間 (reduced prolongation space)  $P_{\mathbf{r}}(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  の変換である必要がある。

**定理 5** ([27]). 1パラメータリー群 (20) の  $P(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  への延長は、各  $\xi^i$  が  $\mathbf{u}$  に依存せず、すべての  $k_\mu \in \mathbb{Z}$  に対して、周期条件

$$\xi^i \left( \mathbf{x}, \mathbf{n} + \sum_{\mu=1}^m k_\mu r_\mu \mathbf{1}_\mu \right) = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (33)$$

を満たす場合に限り、縮小延長空間  $P_{\mathbf{r}}(J^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}))$  の変換である。

**系 6.** 分割型半離散方程式  $\mathcal{A} = 0$  に対して、1パラメータリー一点対称性の無限小生成作用素は、

$$\mathbf{v} = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \phi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (34)$$

で表され、周期条件 (33) 及び、

$$\begin{aligned} \text{pr } \mathbf{v} &= \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \phi_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha}, \\ \phi_{\mathbf{J};\mathbf{K}}^\alpha &= S_{\mathbf{K}} D_{\mathbf{J}} \left\{ \phi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) - \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) u_{\mathbf{1};\mathbf{0}}^\alpha \right\} + \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) u_{\mathbf{J}+1;\mathbf{K}}^\alpha \end{aligned} \quad (35)$$

に従い、LSC (31) を満たす。また、characteristic が次のように表される：

$$Q^\alpha = \phi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) - \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) u_{\mathbf{1};\mathbf{0}}^\alpha. \quad (36)$$

**例 7** ([27]). 半離散方程式

$$u' = \frac{u^2}{u} \quad (37)$$

は分割型で、 $r = 2$  である。ここで、 $u' = D_x u$  である。すべてのリ一点対称性の無限小生成作用素

$$\mathbf{v} = \xi(x, n) \frac{\partial}{\partial x} + \phi(x, n, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (38)$$

は周期条件  $\xi(x, n+2k) = \xi(n, k), k \in \mathbb{Z}$  に従う。周期条件及び LSC から、無限小生成作用素のリー代数は次のように表される：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & \mathbf{v}_2 &= x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{v}_3 &= 2^{\lfloor n/2 \rfloor} u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_4 &= (-1)^n \frac{\partial}{\partial x}, & \mathbf{v}_5 &= (-1)^n \left( x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u} \right), & \mathbf{v}_6 &= (-1)^n 2^{\lfloor n/2 \rfloor} u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (39)$$

ただし、 $\lfloor n/2 \rfloor$  は床関数である。延長されたリー代数は  $P(J^\infty(\mathcal{T}_n))$  上で 6 次元であるが、延長構造を保存しない。例えば、 $\mathbf{v}_5$  によって生成される 1 パラメータリー部分群、すなわち、

$$\Gamma : (x, n, u) \mapsto (\hat{x}, \hat{n}, \hat{u}) = (\exp\{(-1)^n \varepsilon\}x, n, \exp\{(-1)^n \varepsilon\}u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (40)$$

を考えると、 $P(J^\infty(\mathcal{T}_n))$  上で、 $\Gamma$  の延長は

$$u'_1 \mapsto \hat{u}'_1 = T_1^*(\hat{u}'|_{n+1}) = T_1^*(u'|_{n+1}) \quad (41)$$

となり、微分延長

$$\begin{aligned} D_{\hat{x}}(\hat{u}'_1) &= D_{\hat{x}}(\exp\{(-1)^{n+1} \varepsilon\}u_1) \\ &= \frac{D_x(\exp\{(-1)^{n+1} \varepsilon\}u_1)}{D_x(\exp\{(-1)^n \varepsilon\}x)} \\ &= \exp\{2(-1)^{n+1} \varepsilon\}u'_1 \end{aligned} \quad (42)$$

と一致しない。これは、微分演算子  $D_x$  とシフト演算子  $S$  は可換だが、変換後の微分演算子  $D_{\hat{x}}$  と  $S$  は非可換のためである [25]。

実際、延長されたリー代数は、構造が保存される縮小空間  $P_2(J^\infty(\mathcal{T}_n))$  上では 3 次元であり、分割型ではない半離散方程式  $u' = u_1/u$  のリー一点対称性におけるリー代数と同型である。

分割型半離散方程式となる物理系の例として、離散ポテンシャル KdV 方程式やクロスレシオ (cross-ratio) 方程式などがあり、それぞれ  $r = 2$  の戸田型分割オイラー・ラグランジュ方程式に埋め込むことができる [5, 29]。次の例は、一般化対称性法を用いて分類された 5 点可積分半離散方程式である [8]。

**例 8.** 分割型半離散方程式 ( $r = 2$ )

$$u' = u(u_2 - u_{-2}) \quad (43)$$

は、ヴォルテラ方程式 (Volterra equation) に変換できる (例10参照)。この方程式のリー一点対称性における無限小生成作用素は、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \partial_x, & \mathbf{v}_2 &= -x\partial_x + u\partial_u, \\ \mathbf{v}_3 &= (-1)^n \partial_x, & \mathbf{v}_4 &= (-1)^n (-x\partial_x + u\partial_u) \end{aligned} \quad (44)$$

であるが、リー代数  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  はヴォルテラ方程式におけるリー代数と同型である。

### 3 相似逓減と群不変解

本節では、半離散方程式のリー一点対称性を用いて、相似逓減における群不変解について説明する。すべてのパラメータは、特異点がないように仮定し、 $u = f(x)$  や  $u = f(n)$  などの特殊解は含まないものとする。また、すべての変数は一次元であり、簡単のため  $n \geq 0$  と仮定する。



**例 9** (戸田型方程式). 戸田格子 (Toda lattice) [31] はよく知られている可積分半離散方程式の一つであり,

$$u'' = \exp(u_{-1} - u) - \exp(u - u_1) \quad (45)$$

と表される. LSC (31) を用いて, すべてのリ一点対称性は,

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_u, \quad \mathbf{v}_3 = x\partial_u, \quad \mathbf{v}_4 = x\partial_x + 2n\partial_u \quad (46)$$

から生成される.

[14] では, 微分方程式の対称性理論をそのまま使用し, (46) のほかに, 戸田格子の対称性に寄与しない非内在 (あるいは不規則) な無限小生成作用素を発見した. 同じ論文で, 戸田格子の群不変解も計算された. ここでは, いくつかの戸田型方程式の対称性と群不変解を求める.

まず, 相対論的戸田格子方程式 (relativistic Toda lattice) [30]

$$u'' = \frac{u'_1 u'}{1 + \exp(u - u_1)} - \frac{u' u'_{-1}}{1 + \exp(u_{-1} - u)} \quad (47)$$

のリ一点対称性における無限小生成作用素

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_u, \quad \mathbf{v}_3 = x\partial_x \quad (48)$$

が求まる. 以下では相似遞減を行い, 群不変解を求める.

- $\mathbf{v}_3 + C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2 = (x + C_1)\partial_x + C_2 \partial_u$  ( $C_2 \neq 0$ ): Characteristic  $0 = Q := C_2 - (x + C_1)u'$ ,  
つまり,

$$\frac{du}{dx} = \frac{C_2}{x + C_1} \quad (49)$$

より,  $n$  及び

$$v(n) = u(x, n) - C_2 \log(x + C_1) \quad (50)$$

が不変量として得られる. これを相対論的戸田格子方程式に代入すると,  $v$  を満たす差分方程式は,

$$\frac{1}{1 + \exp(v - v_1)} - \frac{1}{1 + \exp(v_{-1} - v)} = -\frac{1}{C_2} \quad (51)$$

となり,  $v$  について解くと, 相対論的戸田格子方程式の群不変解

$$u(x, n) = C_2 \log(x + C_1) - \sum_{k=0}^n \log\left(-\frac{C_2}{k + C_2 C_3} - 1\right) + C_4 \quad (52)$$

が求まる (図2). ここで,  $C_3, C_4$  は積分定数または総和定数である.

- $\mathbf{v}_1 + C_1 \mathbf{v}_2$  ( $C_1 \neq 0$ ): 線形群不変解

$$u(x, n) = C_1 x + C_2 n + C_3 \quad (53)$$

が求まる (図3).

次に, 一般化対称性法を用いた戸田型可積分系の分類 [33] に従って, Td2 及び Td3 方程式のリ一点対称性と群不変解について示す. Td1 は通常の戸田格子(45)である.

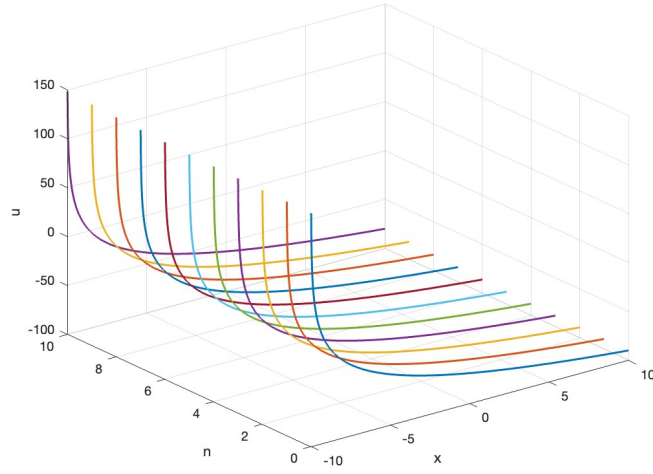


図 2: 相対論的戸田格子方程式の解(52) :  $C_1 = 10, C_2 = -30, C_3 = -0.5, C_4 = 0$

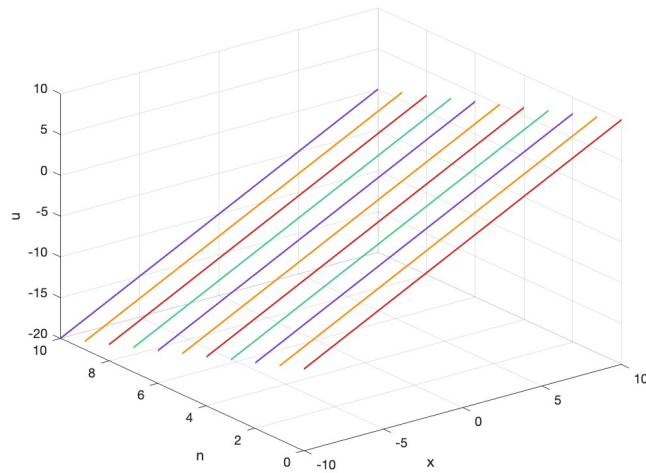


図 3: 相対論的戸田格子方程式の解(53) :  $C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 0$

• Td2 方程式：

$$u'' = u'(u_1 - 2u + u_{-1}) \quad (54)$$

- リ一点対称性：

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_u, \quad \mathbf{v}_3 = n\partial_u, \quad \mathbf{v}_4 = -x\partial_x + u\partial_u \quad (55)$$

-  $\mathbf{v}_4 + C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 + C_3\mathbf{v}_3$  による群不変解 (図4)：

$$u(x, n) = \frac{-n^2 + C_4n + C_5}{x - C_1} - C_3n - C_2 \quad (56)$$

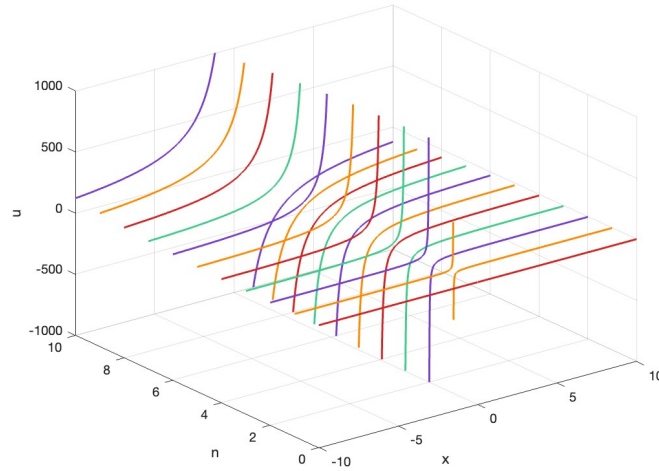


図 4: Td2 方程式の解(56) :  $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 1, C_4 = 1, C_5 = 0$

-  $\mathbf{v}_1 + C_1\mathbf{v}_2 + C_2\mathbf{v}_3$  で  $C_1, C_2$  の少なくとも一方がゼロでない場合の群不変解 (図5)：

$$u(x, n) = (C_2n + C_1)x + C_3n + C_4 \quad (57)$$

• Td3 方程式：

$$u'' = u' (\exp(u_1 - u) - \exp(u - u_{-1})) \quad (58)$$

- リ一点対称性：

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_u, \quad \mathbf{v}_3 = x\partial_x + n\partial_u \quad (59)$$

-  $\mathbf{v}_3 + C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2$  での群不変解 (図6)：

$$u(x, n) = \sum_{k=0}^n \log(-k + C_3) - (n + C_2) \log|x + C_1| + C_4 \quad (60)$$

-  $\mathbf{v}_1 + C_1\mathbf{v}_2$  ( $C_1 \neq 0$ ) での群不変解：

$$u(x, n) = C_1x + C_2n + C_3 \quad (61)$$

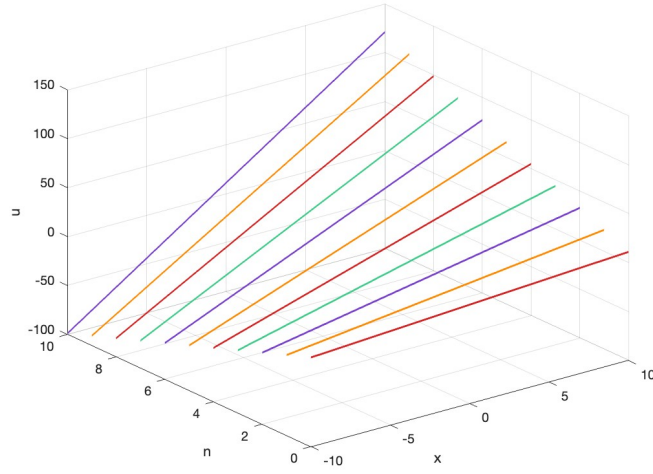


図 5: Td2 方程式の解(57) :  $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 1, C_4 = 0$

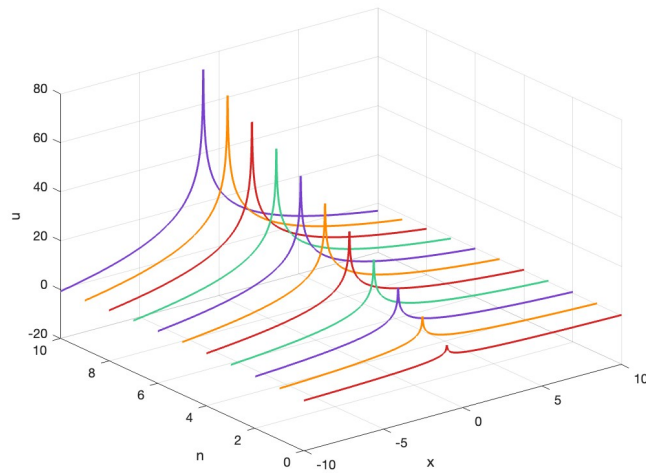


図 6: Td3 方程式の解(60) :  $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 15, C_4 = 0$

例 10 (ヴォルテラ型方程式 [33]).

- ヴォルテラ方程式 (Volterra equation) :

$$u' = u(u_1 - u_{-1}) \quad (62)$$

- リー点对称性 :

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = -x\partial_x + u\partial_u \quad (63)$$

- $\mathbf{v}_2 + C_1\mathbf{v}_1$  での群不変解 (図7) :

$$u(x, n) = -\frac{n + C_2(-1)^n + C_3}{2(x - C_1)} \quad (64)$$

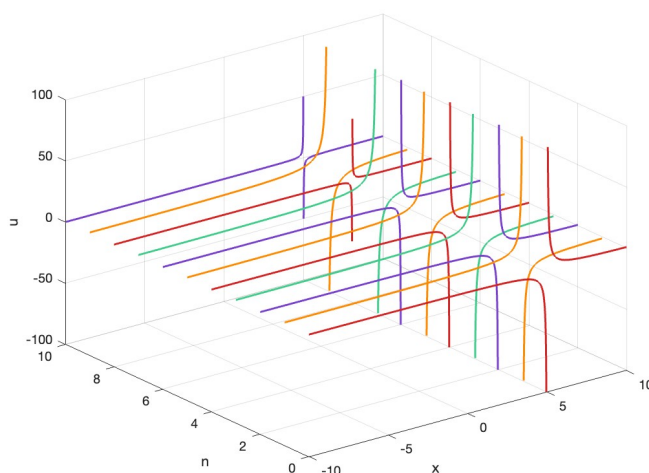


図 7: ヴォルテラ型方程式の解(64) :  $C_1 = 5, C_2 = 10, C_3 = 0$

- 修正ヴォルテラ方程式 :

$$u' = u^2(u_1 - u_{-1}) \quad (65)$$

- リー点对称性 :

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = (-1)^n u \partial_u, \quad \mathbf{v}_3 = -2x\partial_x + u\partial_u \quad (66)$$

- $\mathbf{v}_3 + C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2$  ( $C_2 \neq 1$ ) での群不変解 (図8) :

$$u(x, n) = \frac{\exp\left((-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \log\left(-\frac{1}{2}k - C_2 \frac{1-(-1)^k}{4} + C_3\right) + C_4(-1)^n\right)}{\left(x - \frac{C_2}{2}\right)^{\frac{1+C_2(-1)^n}{2}}} \quad (67)$$

- $\mathbf{v}_1 + C_1\mathbf{v}_2$  での群不変解 (図9) :

$$u(x, n) = \exp\left(C_1(-1)^n x + (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \log\left(C_1 \frac{1-(-1)^k}{2} + C_2\right) + C_3(-1)^n\right) \quad (68)$$

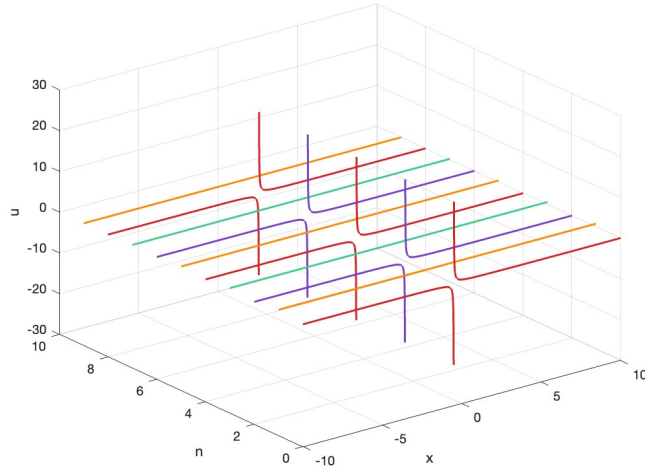


図 8: 修正ヴォルテラ型方程式の解(67) :  $C_1 = -1, C_2 = -1, C_3 = 5, C_4 = 0$

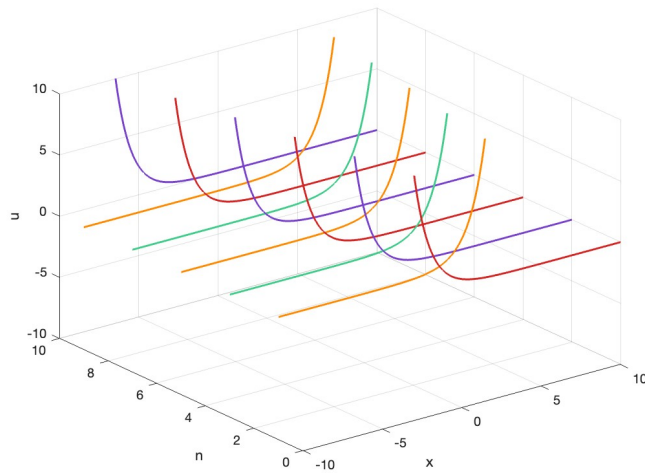


図 9: 修正ヴォルテラ型方程式の解(68) :  $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 0$

例 11. 伊藤・成田・ボゴヤヴレンスキー方程式 (Itoh–Narita–Bogoyavlensky equation) [6, 11, 20]

$$u' = u(u_2 + u_1 - u_{-1} - u_{-2}) \quad (69)$$

は 5 点可積分半離散方程式である。そのリ一点対称性は、

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = -x\partial_x + u\partial_u \quad (70)$$

によって生成され、 $\mathbf{v}_2 + C_1\mathbf{v}_1$  における群不変解は、

$$u(x, n) = \frac{(-1)^n}{3(x - C_1)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \left( -k + C_2 + C_3 \cos\left(\frac{2}{3}\pi k\right) + C_4 \sin\left(\frac{2}{3}\pi k\right) \right) \quad (71)$$

である (図10)。

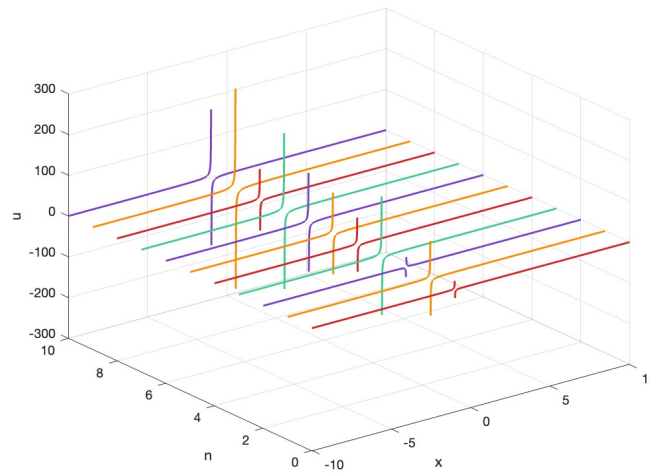


図 10: 伊藤・成田・ボゴヤヴレンスキー方程式の解(71) :  $C_1 = -1, C_2 = 0, C_3 = 1, C_4 = 1$

例 12. 交通流モデル [3]

$$u'' = a(-u' + \tanh(u_1 - u - u_c) + \tanh u_c) \quad (72)$$

は、単線を走行する車両の様子を記述しており、定数  $a > 0$  は運転者の感度、 $u_c > 0$  は最適距離を表す。LSC を用い、リ一点対称性

$$\mathbf{v}_1 = \partial_t, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_u, \quad \mathbf{v}_3 = \exp(-at)\partial_u \quad (73)$$

が求まる。なお、連続独立変数として  $x$  の代わりに時間  $t$  を使用した。  $C_1, C_2$  の少なくとも一方がゼロでない場合、 $\mathbf{v}_1 + C_1\mathbf{v}_2 + C_2\mathbf{v}_3$  による群不変解は、

$$u(t, n) = C_1 t - \frac{C_2}{a} \exp(-at) + \left( u_c + \frac{1}{2} \log \left( \frac{-1 - C_1 + \tanh u_c}{-1 + C_1 - \tanh u_c} \right) \right) n + C_3 \quad (74)$$

である (図11)。

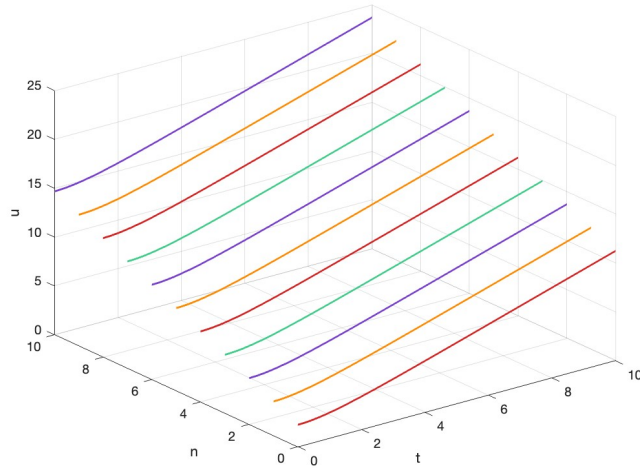


図 11: 交通流モデルの解(74) :  $a = 1, u_c = 1, C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 0$

## 4 まとめ

対称性方法の拡張に際して、離散方程式と比較して半離散方程式はより困難であることが指摘されている [15]. 文献 [25] で明らかにされた連続変数と離散変数の非可換性により生じる問題は、文献 [27] で提案された半離散方程式における(微分差分)幾何的構造により解決された. これにより、対称性による解析は、半離散方程式を含む多くの系に適用可能となった.

本論文では、戸田型、ヴォルテラ型、及び5点の伊藤・成田・ボゴヤヴレンスキー方程式、ならびに交通流モデルのリー点対称性を計算し、相似逓減における群不変解を導出した. 特に、分割型半離散方程式は、他タイプの半離散方程式では現れない非内在(または非規則)な対称性を持つ特異な系である.

半離散方程式における対称性の他の応用例として、可積分性の基準の一つとしての有用性が示唆されている [8, 9, 33]. また、半離散系におけるネーターの定理は、変分半離散方程式の保存則や微分差分関係を構築することを可能にし [25, 26, 27], 対称性および保存則を保つ偏微分方程式の半離散化手法の研究が進行している [12, 17].

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費 20K14365, 24K06852, JST CREST JPMJCR1914, 及び慶應義塾大学福澤基金の支援を受けた. ここに謝辞を表す.

## 参考文献

- [1] M. Ackerman and R. Hermann, *Sophus Lie's 1880 Transformation Group Paper*, Brookline, Massachusetts: Mathematical Science Press, 1975.
- [2] M. Ackerman and R. Hermann, *Sophus Lie's 1884 Differential Invariant Paper*, Brookline, Massachusetts: Mathematical Science Press, 1976.
- [3] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, *Phys. Rev. E* **51** (1995), 1035–1042.



- [4] G. Bluman, A. Cheviakov and S. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2010.
- [5] A. I. Bobenko and Yu. B. Suris, Integrable systems on quad-graphs, *Int. Math. Res. Not.* **11** (2002), 573–611.
- [6] O. I. Bogoyavlensky, Integrable discretizations of the KdV equation, *Phys. Lett. A* **134** (1988), 34–38.
- [7] V. Dorodnitsyn, *Applications of Lie Groups to Difference Equations*, Boca Raton, FL: Chapman & Hall, 2010.
- [8] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov and D. Levi, Classification of five-point differential-difference equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50** (2017), 125201 (27pp).
- [9] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov and D. Levi, Classification of five-point differential-difference equations II, *J. Phys. A: Math. Theor.* **51** (2018), 065204 (16pp).
- [10] P. E. Hydon, *Difference Equations by Differential Equation Methods*, Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- [11] Y. Itoh, An H-theorem for a system of competing species, *Proc. Japan Acad.* **51** (1975), 374–379.
- [12] I. Kogan and P. J. Olver, Invariant Euler–Lagrange equations and the invariant variational bicomplex, *Acta Appl. Math.* **76** (2003), 137–193.
- [13] D. Levi and P. Winternitz, Continuous symmetries of difference equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), R1–R63.
- [14] D. Levi and P. Winternitz, Continuous symmetries of discrete equations, *Phys. Lett. A* **152** (1991), 335–338.
- [15] D. Levi, P. Winternitz and R. I. Yamilov, Lie point symmetries of differential-difference equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010), 292002 (14pp).
- [16] S. Maeda, Extension of discrete Noether theorem, *Math. Japon.* **26** (1981), 85–90.
- [17] E. L. Mansfield, A. Rojo-Echeburúa, P. E. Hydon and L. Peng, Moving frames and Noether’s finite difference conservation laws I, *Transactions of Mathematics and Its Applications* **3** (2019), tnz004 (47pp).
- [18] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat and V. V. Sokolov, The symmetry approach to classification of integrable equations, In *What is integrability?*, V. E. Zakharov (ed.), Springer-Verlag, 1991, pp. 115–184.
- [19] T. Miwa, M. Jimbo and E. Date, *Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*, Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [20] K. Narita, Soliton solution to extended Volterra equation, *J. Phys. Soc. Japan* **51** (1982), 1682–1685.

- [21] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, *Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse* **2** (1918), 235–257. English translation: *Transport Theory Statist. Phys.* **1** (1971), 186–207.
- [22] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, (2nd edn), New York: Springer-Verlag, 1993.
- [23] P. J. Olver, Emmy Noether’s enduring legacy in symmetry, *Symmetry: Culture and Science* **29** (2018), 475–485.
- [24] L. Peng, Relations between symmetries and conservation laws for difference systems, *J. Differ. Equ. Appl.* **20** (2014), 1609–1626.
- [25] L. Peng, Symmetries, conservation laws, and Noether’s theorem for differential-difference equations, *Stud. Appl. Math.* **139** (2017), 457–502.
- [26] L. Peng, Regular symmetries of differential-difference equations and Noether’s conservation laws, *RIMS Kôkyûroku* **2137** (2019), 130–139.
- [27] L. Peng and P. E. Hydon, Transformations, symmetries and Noether theorems for differential-difference equations, *Proc. Roc. Soc. A* **478** (2022), 20210944 (17pp).
- [28] G. R. W. Quispel, H. W. Capel and R. Sahadevan, Continuous symmetries of differential-difference equations: The Kac–van Moerbeke equation and Painlevé reduction, *Phys. Lett. A* **170** (1992), 379–383.
- [29] O. G. Rasin and P. E. Hydon, Symmetries of integrable difference equations on the quad-graph, *Stud. Appl. Math.* **119** (2007), 253–269.
- [30] S. N. M. Ruijsenaars, Relativistic Toda systems, *Commun. Math. Phys.* **133** (1990), 217–247.
- [31] M. Toda, Vibration of a chain with a nonlinear interaction, *J. Phys. Soc. Jpn.* **22** (1967), 431–436.
- [32] P. Xenitidis, Symmetries and conservation laws of the ABS equations and corresponding differential-difference equations of Volterra type, *J. Phys. A: Math. Gen.* **44** (2011), 435201 (22pp).
- [33] R. Yamilov, Symmetries as integrability criteria for differential difference equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), R541–R623.