NON-VANISHING OF HECKE L-VALUES

田中 拓弥

ABSTRACT. Rohlich, Lamplugh の研究をはじめとした多くの研究者によって, L 値の非消滅性が研究されてきた. 本稿では Lamplugh が虚二次体に対して得た L 値に関する結果を CM 体に拡張する. これを応用して, 適切な多重 $\mathbb{Z}_l$ 拡大 K_∞ において l 上すべての素点で通常良還元をもつ CM 型アーベル多様体 A に関する $\mathbb{Z}$ 加群 $A(K_\infty)/A(K_\infty)_{\mathrm{tors}}$ が有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群であることを示す.

キーワード: Hecke L 値, Mordell-Weil 階数

目次

Date: November 25, 2024.

§1 はじめに

K^+ を総実代数体とする．K を K^+ 上の総虚二次拡大体 (CM 体) とする．さらに, K の CM 型 Σ_K, つまり

$$\mathrm{Emb}\{K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}\} = \Sigma_K \sqcup \overline{\Sigma_K}$$

という埋め込み全体の半分の集合 Σ_K を固定する．$p \neq l$ を相異なる素数とする．また, $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}, \iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p, \iota_l : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_l$ という体の埋め込みを固定する．$m_{\mathbb{C}_l}$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ の極大イデアルとしたとき,

$$\Sigma_l := \{\mathfrak{l} \mid \mathfrak{l} = (\iota_l \circ \sigma)^{-1}(m_{\mathbb{C}_l}) \cap \mathcal{O}_K, \sigma \in \Sigma_K\}$$

により, 定まる l 上の K における有限素点の集合とする．l を $K/\mathbb{Q}$ で完全分解する素数として, $\mathcal{O}_K$ の整イデアル λ を $\lambda := \prod_{v \in \Sigma_l} v$ とすれば

$$(l) = \lambda\overline{\lambda}$$

で, λ が $\overline{\lambda}$ と互いに素になる．
以下では, K の整イデアル $\mathfrak{f}$ に対して, $I_K^{(\mathfrak{f})}$ で $\mathfrak{f}$ と互いに素な K の分数イデアルのなす群とする．本稿で扱う対象は, λ のべき乗を割り切る導手 $\mathfrak{f}_\chi$ を持つ代数的 Hecke 指標 $\chi : I_K^{(\mathfrak{f}_\chi)} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ である．χ に対して定まる無限型 (第 §6 節で定義される) を

$$\beta - \alpha \in \mathbb{Z}[\mathrm{Emb}(K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}})]$$

とする．ここで, $\beta = \sum_{\sigma \in \overline{\Sigma_K}} \beta_\sigma \overline{\sigma} \in \mathbb{Z}[\overline{\Sigma_K}],\ \alpha = \sum_{\sigma \in \Sigma_K} \alpha_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[\Sigma_K]$ とした．
この代数的 Hecke 指標 $\chi : I_K^{(\mathfrak{f}_\chi)} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ に対し, Hecke L 函数

$$L(\chi, s) := \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K \\ \mathfrak{a}\text{ は }\mathfrak{f}_\chi\text{ と互いに素}}} \frac{\iota_\infty \circ \chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}$$

が定義され, $Re(s) \gg 0$ において絶対収束する．さらに, ガンマ因子を

$$\Gamma_\infty(\chi, s) := \prod_{\sigma \in \Sigma_K} 2(2\pi)^{-(s-\min(\beta_\sigma, -\alpha_\sigma))}\Gamma(s - \min(\beta_\sigma, -\alpha_\sigma))$$

としたときに, $|d_K|$ を K の絶対判別式とすれば $\Lambda(\chi, s) := (|d_K|N(\mathfrak{f}_\chi))^{s/2}\Gamma_\infty(\chi, s)L(\chi, s)$ が次の函数等式を満たす．

$$\Lambda(\chi, s) = W(\chi)\Lambda(\chi^{-1}, 1-s).$$

ここで $W(\chi)$ は $|W(\chi)| = 1$ を満たす, ある複素数.
片々のガンマ因子が $s = 0$ で極を持たないような χ を critical な代数的 Hecke 指標という.
複素函数 $L(\chi, s)$ は χ が critical であるとき, 全複素平面に正則に解析接続される．その $s = 0$ での値 $L(\chi, 0)$ を $L(\chi)$ と定める.
本稿では, 次の 2 つのことを行う.

- **A**. χ の導手が λ のべき乗を割り切るとし, 無限型を固定して走らせる．この時, 有限個を除くすべての代数的 Hecke 指標 χ に対して $L(\chi) \neq 0$ が成立することを示す.
- **B**. A を K 上 K の整数環に CM を持つ単純 CM 型アーベル多様体として, K 上 λ べきのモジュラスに対して定義される射類体の合成体 $K(\lambda^\infty)$ として, $A(K(\lambda^\infty))/A(K(\lambda^\infty))_{\mathrm{tors}}$ という $\mathbb{Z}$ 加群が有限生成である十分条件を与える.

A については, Lamplugh[Lam15] により $\mathbb{Q}$ 上定義された, 虚二次体 K の整数環に CM を持つような CM 楕円曲線 E が l 上全ての素点で通常良還元を持つ場合に知られる． このことから Lamplugh は 1 次元の場合の **B** の主張, つまり $E(K(\lambda^\infty))/E(K(\lambda^\infty))_{\mathrm{tors}}$ が有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群であることを示した．本稿では, この結果を CM 体に拡張する.

本稿の主結果を述べる．ここで, λ のべきを割り切る導手をもつ $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ に対する位数有限指標のなす指標群 $\mathcal{X}$ とする．すなわち, $\mathcal{X}$ は,

$$\mathrm{Gal}(K(\lambda^\infty)/K) \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda}^\times/\overline{\mathcal{O}_K^\times}$$

の位数有限指標のなす群であり, 標準的な全射 $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K(\lambda^\infty)/K)$ での引き戻しを通じて

$$\mathcal{X} \subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times, \overline{\mathbb{Q}}^\times)$$

と埋め込まれる．ここで $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ には離散位相を入れて $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}$ は連続な準同型全体とした.
任意の $\rho \in \mathcal{X}$ の像が有限なので $\rho : \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f}_\rho)/K) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ となる整イデアル $\mathfrak{f}_\rho$ で, イデアルの包含で最大のものをとることができる.

Artin 写像を介して, $\rho : I_K^{(\mathfrak{f}_\rho)} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ と見做せることに注意する.
第一の主結果を述べる.

> **Theorem A** (Theorem 6.8)**.** *$K/\mathbb{Q}$ を CM 体. また l を, $K/\mathbb{Q}$ で不分岐な素数. K の critical な代数的 Hecke 指標 χ は, 導手が 1 となるものとする. さらに, これらの $(K/\mathbb{Q}, l)$ は次の条件を満たしているとする.*
> 1. *l は $K/\mathbb{Q}$ で完全分解.*
> 2. *K の類数は 1.*
>
> *この時, 高々有限個を除く任意の $\rho \in \mathcal{X}$ に対して,*
> $$L(\chi\rho^{-1}) \neq 0$$

Lamplugh[Lam15], Lei-Kundu[LK23] は, K が虚二次体の場合に, χ の無限型 $\beta - \alpha$ での $\beta = 0$ となる場合に対して, この結果を含む主張を示している.
次に, この結果を Mordell-Weil 群の階数に応用するために, CM 型アーベル多様体のランクに関する BSD 予想を用いる. これにより, 次の Main Theorem B が証明される.

> **Theorem B** (Theorem 6.14)**.** *K が $\mathbb{Q}$ 上ガロアな CM 体とし, (K, l) が Theorem A の仮定を満たすとする. CM 型単純アーベル多様体 $A_{/K}$ が次の条件を満たすとする.*
> 1. *$A_{/K}$ は $\mathrm{End}(A) \simeq \mathcal{O}_K$ を満たす.*
> 2. *$A_{/K}$ は l 上のすべての素点で通常良還元をもつ.*
> 3. *$A_{/K}$ は全ての素点で良還元を持つ.*
>
> *$A_{/K}$ が定める K の CM 型 Σ_K として, ι_l と Σ_K に対して定まる l 上の素点の集合を $\Sigma_l = \{\mathfrak{l} \mid \mathfrak{l} = (\iota_l \circ \sigma)^{-1}(m_{\mathbb{C}_l}) \cap \mathcal{O}_K, \sigma \in \Sigma_K\}$ とし, λ を*
> $$\lambda := \prod_{v \in \Sigma_l} v$$
> *として定義する. K の λ 外不分岐最大アーベル拡大体を $K(\lambda^\infty)$ とする. $K(\lambda^\infty)/K$ の任意の $\mathbb{Q}$ 上有限次の中間体 F に対して, $A_{/F}$ がランクに関する BSD 予想を満たすとする. この時, $\mathbb{Z}$ 加群 $A(K(\lambda^\infty))/A(K(\lambda^\infty))_{\mathrm{tors}}$. は有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群である.*

Lamplugh[LK23] は, 虚二次体 K の整数環に CM を持つような $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線に対して上記の Theomre B が成り立つことを示しており, Theorem B は, Lamplugh の結果の CM 体への拡張である. 本稿の構成を述べる.

- 次節で, 基本的な記号の準備を行う.
- 三節で, [KS24] による結果を基にして, 高次の Eisenstein 数を補完する形式函数を構成する.
- 四節では, 二節で構成した形式函数と, [BKF15] による形式函数の関係式を記述する.
- 五節では, Sinnot[Sin87] の有理函数測度を拡張して, 形式函数に付随する測度について議論する.
- 六節で, L 値を三節で構成した形式函数と関係づける. そして四節での結果を基に, 第一の主結果を証明する. 系として Modell-Weil 階数についての結果が従う.

記法

以下では, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ という元について, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ により

$$a^x := a_1^{x_1} \cdots a_n^{x_n}$$

と定める. また, $1 \in \mathbb{C}^n$ と書いた場合は,

$$1 := (1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^n$$

を意味することとする.
階乗記号について, $x = (x_1, \dots .x_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$x! := x_1! \cdots x_n!$$

で定義する.
また, $a = (a_1, \dots, a_n), b := (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$a + b := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),\ a - b := (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n),\ ab := (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

と定める．この $a, b \in \mathbb{C}^n$ が

$$a \geq b$$

とは, すべての $i = 1, \ldots, n$ に対し,

$$a_i \geq b_i$$

であることとする．
$\mathbb{N}$ として, 本稿では $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を示すこととする．
環 S に対して, S の素イデアル $\mathfrak{P}$ による完備化を

$$S_{\mathfrak{P}}$$

とし, 積閉集合 $S - \mathfrak{P}$ による局所化を

$$S_{(\mathfrak{P})}$$

とする．

C を体として, G_C を C の絶対ガロア群とする．
また, 体 C について自由 $C \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ 加群 X とし, 直和因子 $C^{'} \subset C \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ が部分 C 代数であるとする．この時, $X(C^{'})$ という自由 C 加群を次のように定義する．

$$X(C^{'}) := X / \{cx - x \in X \mid c \in C \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}/C^{'}, x \in X\}$$

, ここで $C \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}/C^{'}$ が $C \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の直和因子としていた．
特に, C が CM 体で J を体の埋め込みの集合 $\mathrm{Emb}(K \hookrightarrow \mathbb{C})$ の部分集合として, $C^{'} = \prod_{\sigma \in J} \mathbb{C} \subset C \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ をとったときに, $X(C^{'})$ を K の作用が J を経由する部分 K 加群と呼ぶことにする．ただし, $C^{'}$ は各 $\sigma \in J$ の成分 $\mathbb{C}$ が σ による K 加群の構造を持つように K 加群の構造を定める．

R 加群 M を一般的に考えたとき, $m \in M$ に対して $m^{[n]} := m \otimes \cdots \otimes m \in M^{\otimes n}$ という記法を用いる．

$f(s)$ を $\mathbb{C}$ のある開集合上定義された正則函数として, $f(s)$ がある単領域 V 上に解析接続されるとする．この時, $p \in V$ に対して $f(s)|_{s=p}$ で $f(s)$ の V へ解析接続することで与えられる正則函数の p での値として定義する．

§2 序章

この節では, CM 型アーベル多様体に関する基本的な事項とともに, 本稿でよく使われる記号を説明する.
本稿を通じて, すべての代数体は $\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体と考える. すなわち, 代数体 K に対して $\tau_K : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ という体の埋め込みを固定する.
以下では, 記号を次のようにとる.

- K : $\mathbb{Q}$ 上ガロアな次数 $2g$ の CM 体.
- $p \neq l$: p, l 上の K における任意の素点が $\mathbb{Q}$ 上の不分岐素点となるような相異なる素数.
- M : K を含む $\mathbb{Q}$ 上ガロアな代数体で素数 p, l 上の M における任意の素点が $\mathbb{Q}$ 上の不分岐素点となるような体.
- A : K の整数環に CM を持つ M 上の g 次元単純アーベル多様体で, p, l 上の素点で良還元を持つもの.
- $\mathfrak{f}$, c : p, l と互いに素な $\mathcal{O}_K$ の整イデアル.
- $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$, $\iota_l : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_l$ を体の埋め込みとして固定する.

M における l 上の素点 v_l を $v_l = \mathcal{O}_K \cap (\iota_l \circ \tau_K)^{-1}(m_{\mathbb{C}_l})$ とする. ここで, $m_{\mathbb{C}_l}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ の極大イデアルで, $\tau_K : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ は固定していた体の埋め込みである. $A_{/M}$ の $\mathcal{O}_{M,(v_l)}$ 上の Neron モデル $\mathcal{A}_{/\mathcal{O}_{M,(v_l)}}$ とする. ここで $\mathcal{O}_{M,(v_l)}$ は局所化. 簡単のため, $\mathcal{O}_{M,(v_l)} =: R \subset \mathbb{C}$ と記述する.
この時, つぎの同型が成り立つ.

$$\iota : \mathcal{O}_K \simeq \mathrm{End}_M(A) \simeq \mathrm{End}_R(\mathcal{A}).$$

ここで, 二番目の同型は Neron 写像原理 (Neron mapping principle)[1] を用いた. 必要であれば, M に $\mathcal{A}[\mathfrak{f}](\overline{\mathbb{Q}})$ の座標を添加することで, R が次を満たすとしてよい.

$$\mathcal{A}[\mathfrak{f}](R) = \mathcal{A}[\mathfrak{f}](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}).$$

この時, Neron 写像原理から $\mathcal{A}(R) = A(M)$ なので

$$\mathcal{A}[\mathfrak{f}](R) = \mathcal{A}[\mathfrak{f}](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) = \mathcal{A}[\mathfrak{f}](\mathbb{C}_l)$$

が成立することに注意する.
$\mathcal{A}_{/R}$ の微分形式について, $\Omega^1_{\mathcal{A}/R}$ の単位切断 e による引き戻しを次で定義する.

$$\omega_{\mathcal{A}/R} := e^*\Omega^1_{\mathcal{A}/R}.$$

この時, $\omega_{\mathcal{A}/R}$ は $\pi_*\Omega^1_{\mathcal{A}/R}$ と一致し, さらに R が離散付値環なので, $\Gamma(\mathrm{Spec}(R), \omega_{\mathcal{A}/R})$ は R 上階数 g の自由加群をなす. また, その基底 $\omega(\mathcal{A}) := (\omega_1, \ldots, \omega_g)$ は次の性質を満たす.([BLR80]4 節命題 1, 系 3).

> 各 ω_i に対し, ある平行移動不変な $\Omega_i \in \Gamma(\mathcal{A}, \Omega^1_{\mathcal{A}/R})$ が一意に存在して次を満たす.
>
> $$e^*\Omega_i = \omega_i$$

$\Gamma(\mathcal{A}, \Omega^1_{\mathcal{A}/R}) = \Gamma(\mathrm{Spec}(R), \omega_{\mathcal{A}/R})$ なので, $\Gamma(\mathcal{A}, \Omega^1_{\mathcal{A}/R})$ も R 上階数 g の自由加群である. このことから, $\iota : \mathcal{O}_K \simeq \mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ を固定したときに, 基底 $\{\Omega_i\}_{i=1,\ldots,g}$ が取れて, 任意の $a \in \mathcal{O}_K$ に対して次を満たす.

$$\Omega_i \circ \iota(a) = \sigma_i(a)\Omega_i$$

となるような埋め込み $\sigma_i : K \hookrightarrow M \hookrightarrow \mathbb{C}$ $(i = 1, \ldots, g)$ が取れる. 特に, 必要であれば ι を取り換えることで固定していた $\iota_\infty \circ \tau_K : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ が $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_g\}$ に含まれるようにする.
この埋め込み全体 Σ_K として K の CM 型をとる. この CM 型は, $A_{/M}$ の CM 型と呼ばれる. (K, Σ_K) が定める Reflex 体を次のように定義する.

$$K^{\mathrm{ref}} := \mathbb{Q}(tr_{\Sigma_K}(a) \mid a \in K)$$

, ここで $tr_\Sigma(x) := \sum_{\sigma\in\Sigma} \sigma(x)$ とする. この体の絶対ガロア群 $G_{K^{\mathrm{ref}}}$ は,

$$\{\sigma \in G_{\mathbb{Q}} \mid \sigma\Sigma_K = \Sigma_K\} = G_{K^{\mathrm{ref}}}$$

[1]すなわち, 任意の R 上滑らかなスキーム T に対して成立する次の性質 $\mathrm{Hom}_R(T, \mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_M(T_M, A)$, ここで T_M は T を $R \subset M$ で基底変換したもの

を満たす．したがって, 固定された $\tau_{K^{\mathrm{ref}}}:K^{\mathrm{ref}}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ として,

$$\{\sigma\Sigma_K \mid \sigma\in G_{\mathbb{Q}}\}\simeq \mathrm{Emb}(K^{\mathrm{ref}},\overline{\mathbb{Q}});\sigma\Sigma_K\mapsto\sigma\tau_{K^{\mathrm{ref}}}$$

が全単射を与える．
他方, $\tau_K:K\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ が固定されているので, この全単射より

$$\{\sigma\Sigma_K \mid \tau_K\in\sigma\Sigma_K\}\hookrightarrow \mathrm{Emb}(K^{\mathrm{ref}},\overline{\mathbb{Q}})$$

という単射が誘導される．このようにして定まる単射の像は K^{ref} の CM 型 $\Sigma_{K^{\mathrm{ref}}}$ を定めている．

§2.1 アーベル拡大体

この節では, CM 型アーベル多様体の [ST61] による結果を基に, 前節で定義した $A_{/M}$ から M 上のアーベル拡大体を構成する．ここで M は K 上のアーベル拡大体であり, $M/\mathbb{Q}$ は p 上の素点で常に不分岐であると仮定していたことを思い出す．

$$M^\times\longrightarrow K^\times;x\mapsto\prod_{\sigma\in\Sigma_{K^{\mathrm{ref}}}}\sigma(N_{M/K^{\mathrm{ref}}}(x)))$$

という準同型を連続に延長したイデールの準同型を

$$\mu:\mathbb{A}_M^\times\longrightarrow\mathbb{A}_K^\times$$

とする．
また, 前節で定義した $\Gamma(\mathcal{A}_{/R},\Omega^1_{\mathcal{A}/R})$ の基底 $\Omega_1,\dots,\Omega_g$ により定まる一意化[2]$\xi:\mathbb{C}^g/\Lambda_A\longrightarrow A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ をとる．これにより, $\Phi_1:\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q}\hookrightarrow\mathrm{End}(\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A)$ という単射が次を満たすように定義される．

$$a(\xi(v))=\xi(\Phi_1(a)(v))$$

, ここで $a\in\mathrm{End}(A),v\in\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A$ は任意.
$\iota:K\simeq\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q}$ と Φ_1 を合成することで, $\mathbb{Q}$ 代数の単射準同型

$$\Phi:=\Phi_1\circ\iota:K\longrightarrow\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q}\hookrightarrow\mathrm{End}(\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A)$$

が取れる．
この Φ を通じて $\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A$ が K ベクトル空間の構造をもつことに注意する．
$\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A$ は $\mathbb{Q}$ 上 $2g$ 次元のベクトル空間である．従って, $\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A$ は K ベクトル空間として次元 1 であるので,

$$\Phi(K)\cdot w=\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A$$

となる $w\in\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A$ が存在する．特に,

$$u:K\simeq\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A\subset\mathbb{C}^g$$

という K ベクトル空間の同型をとることができる．また $\mathfrak{a}:=u^{-1}(\Lambda_A)$ とする．

Theorem 2.1. ([Shi71] 命題 *5.15*) *$\sigma_s\in G_M$ を $\sigma_s|_{\mathrm{Gal}(M^{\mathrm{ab}}/M)}=(s,M^{\mathrm{ab}}/M)$ を満たすような絶対ガロア群の元とする．ここで M^{ab} は M の最大アーベル拡大体で $s\in\mathbb{A}_M^\times$ とした．*
この時, $A^{\sigma_s}_{/M}$ に関する, ある一意化 ξ' が存在し, 次の可換図式を満たす．

$$\begin{tikzcd} K/\mathfrak{a} \arrow[r, "\xi\circ u"] \arrow[d, "1/\mu(s)"] & A(\mathbb{C}) \arrow[d, "\sigma_s"] \\ K/\mu(s)^{-1}\mathfrak{a} \arrow[r, "\xi'\circ u"] & A^{\sigma_s}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

この定理により, 次の命題が成立することを示す．

Proposition 2.2. *p 上の全ての素点で $A_{/M}$ が良還元を持つとする．この時, $M(A[l^\infty])$ は M 上の p 上不分岐なアーベル拡大.*

[2]周期ペアリング, $H^1_{dR}(A,\Omega^1_{A/\mathbb{C}})\times H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{C}$ により, Ω_i から $H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z})\hookrightarrow\mathbb{C}^g$ という単射が定まり, この像が Λ_A

Proof. 以下では, $L := M(A[l^\infty])$ とする. Theorem 2.1 により任意の $v \in l^{-n}\mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\sigma_s \cdot \xi(u(v)) = \xi^{'}(u(\frac{1}{\mu(s)}v)).$$

ここで, 定理 2.1 を用いた. また, σ_s は M を固定するので $A_{/M}$ が $A^{\sigma_s}_{/M}$ と同種であることがわかる. したがって同種写像 $A \longrightarrow A^{\sigma_s}$ に対応する K 線形変換 $T : \mathbb{Q}\cdot\Lambda_A \longrightarrow \mathbb{Q}\cdot\Lambda_A$ が一意に存在して次が成立する.

(1) $\xi^{'} = \xi \circ T$

(2) $T : u(1/\mu(s)\mathfrak{a}) \longrightarrow u(\mathfrak{a})$

ここで, $\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A$ は Φ により K ベクトル空間となっている. すると, $T = \Phi(\alpha_s)$ という $\alpha_s \in K$ が取れる. 特に

$$\sigma_s \cdot \xi(u(v)) = \xi^{'}(u(\frac{1}{\mu(s)}v)) = \xi(u(\frac{\alpha_s}{\mu(s)}v))$$

が任意の $u(v) \in A[l^\infty]$ に対して成立している. ここで,

$$\mathrm{Gal}(L/M) \longrightarrow \{s \in \mathbb{A}_M^{(\infty),\times} \mid s\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}; \sigma_s \mapsto \frac{\alpha_s}{\mu(s)}$$

を考える. $\mathbb{A}_M^{(\infty),\times}$ は M のイデールの有限部分とした.
これが準同型なのはよく, 単射であることのみ確認する. $\sigma_s \in \mathrm{Gal}(L/M)$ の像 $\alpha_s/\mu(s) = 1$ とする. この時,

$$\sigma_s \cdot (\xi(u(v))) = \xi(u(\frac{\alpha_s}{\mu(s)}v)) = \xi(u(v))$$

が任意の $v \in A[l^\infty]$ で成立するので, $L = M(A[l^\infty])$ を踏まえて $\sigma_s = 1$ が成立するのは良く, これより L/M は確かにアーベル拡大である.
ここで, Neron-Ogg-Shafarevich の定理から L/M が p 上不分岐であるのは良い. □

$A_{/M}$ は CM 型アーベル多様体なので, すべての素点で常に潜在的良還元を持つ. したがって, $M(A[l^\infty])/M$ の有限次中間体 $M^{'}$ が存在して $M(A[l^\infty])/M^{'}$ は l 外不分岐アーベル拡大体となる.
類体論により, 代数体の l 外不分岐最大アーベル拡大体のガロア群は 有限群 $\times \mathbb{Z}_l^a$, $a \in \mathbb{Z}$ と書ける. 以上より,

$$\mathrm{Gal}(M(A[l^\infty])/M) \simeq \text{有限群} \times \mathbb{Z}_l^d \quad \cdots \quad (0)$$

, $d \in \mathbb{Z}$ と書けることがわかる.
この同型 (0) と, 局所 Kronecker-Weber の定理から次が成立する.

Corollary 2.3. *$M(A[l^\infty])$ を ι_p による素点で完備化したものを J とすると, k: $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次不分岐拡大体が存在して*

$$J = k(\mu_{l^\infty}).$$

Proof. $M/\mathbb{Q}$ は定義において p 上の素点で不分岐としていた. さらに, $M(A[l^\infty])/M$ は l 外不分岐であるので, $M(A[\lambda^\infty])/\mathbb{Q}$ は p 上全ての素点において不分岐. 特に, $J/\mathbb{Q}_p$ は不分岐. また, Weil ペアリングの存在より $\mu_{l^\infty} \subset J$ である. ここで, 同型 (0) を用いれば,

$$\mathrm{Gal}(J/\mathbb{Q}_p) \simeq \text{有限群} \times \mathbb{Z}_l^c$$

, $c \in \mathbb{Z}$ という記述を持つことがわかる. $\mu_{l^\infty} \subset J$ より $c \geq 1$ はよい.
局所 Kronecker-Weber の定理から $c \leq 1$ であるので $c = 1$ を得る. ゆえに k として, 上記の $\mathbb{Z}_l$ の固定体に対応する $J/\mathbb{Q}_p$ の部分体をとればよい. □

§2.2 $\mathcal{A}_{/R}$ の形式完備化

以降の節では, 次の条件を課す.

- <u>p**-ord,** l**-ord**</u>
  ι_p (resp. ι_l), $\sigma \in \Sigma_K$ が定める K の p, (resp.l) 上の素点 $\mathfrak{P}_\sigma$ (resp. λ_σ) は $\mathfrak{P}_\sigma \neq \overline{\mathfrak{P}_\sigma}$ (resp. $\lambda_\sigma \neq \overline{\lambda_\sigma}$) を満たす.
- <u>**単項性**</u>
  K における l 上, および p 上の素点は全て単項イデアル.

$\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ を $\mathcal{A}_{/R}$ の単位切断に沿った形式完備化とする. 初めに, Σ_K と ι_l により定まる K での素イデアルの集合 Σ_l として

$$\lambda = \prod_{\lambda_\sigma \in \Sigma_l} \lambda_\sigma$$

としていたことを思い出す. 次が成立する.

Lemma 2.4. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して,

$$\mathcal{A}[\lambda^n]_{/R}$$

は連結な有限群スキーム.

Proof. $\mathcal{A}[\overline{\lambda}^n]_{/R}$ がエタールであることを示せればよい. 実際, $\mathcal{A}[l^n]_{/R}$ の連結成分 $\mathcal{A}[l^n]^{\circ}_{/R}$ の位数は l^{ng} 以上である([Shatz86]p.64 を参照). $\mathcal{A}[\overline{\lambda}^n]_{/R}$ が R 上エタールであることが示されたとする. この時, $\mathcal{A}[l^n] = \mathcal{A}[\lambda^n] \times_R \mathcal{A}[\overline{\lambda}^n]$ なので

$$\mathcal{A}[l^n]^{\circ} = (\mathcal{A}[\lambda^n] \times_R \mathcal{A}[\overline{\lambda}^n])^{\circ} = \mathcal{A}[\lambda^n]^{\circ}$$

が成立する. ここで, $\mathcal{A}[\lambda^n]^{\circ}_{/R}$ は $\mathcal{A}[\lambda^n]_{/R}$ の単位元を含む連結成分とした.
従って, $\mathcal{A}[\lambda^n]^{\circ}$ の位数が l^{ng} 以上であることがわかるので, $\mathcal{A}[\lambda^n]^{\circ} = \mathcal{A}[\lambda^n]$ でなければならない.
生成元 $a \in \overline{\lambda}^n$ による

$$\iota(a) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

がエタールであることを示す. $\iota(a)$ は同種写像で平坦なので, 相対次元 0 かつ不分岐であることを示す. 相対次元 0 であるのは良いので, $\iota(a) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ による微分形式の層 $\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{A}}$ について $\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{A}} = 0$ が成立することを示す. このことを示すには, 導分の第一短完全系列から

$$\iota(a)^*\Omega^1_{\mathcal{A}/R} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{A}/R}$$

という標準的射が全射であることを示せばよい.
$\Omega^1_{\mathcal{A}/R}$ は大域切断 $\Omega_1, \ldots, \Omega_g$ により生成される層であり, これらは

$$\Omega_i \circ \iota(a) = \sigma_i(a)\Omega_i$$

を $i = 1, \ldots, g$ で満たしている.
$\sigma_i(a) \in R^{\times}$ であるので $\iota(a)$ による標準的射の全射性は確かに良い. したがって, $\iota(a)$ がエタールとなる. 特に, $\iota(a)$ を単位切断 $e : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathcal{A}$ で基底変換した

$$\mathcal{A}[\overline{\lambda}^n] \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$$

もエタール射となる. □

この補題より, $\mathcal{A}[l^n]_{/R}$ の連結成分が $\mathcal{A}[\lambda^n]_{/R}$ であることがわかる. 特に, $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ は g 次元の形式リー群となる.
$\widehat{\Omega}_i$, $i = 1, \ldots, g$ を Ω_i, $i = 1, \ldots, g$ より誘導される $\widehat{\mathcal{A}}_R$ 上の微分形式とする. この形式リー群 $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ を M に基底変換したとき, 次のような M 上の形式的対数 $\log_{\mathcal{A}}$ が存在する. ([BK07] p27 §2.3, p28 命題 2.14 の証明を参照).

Lemma 2.5. $\widehat{\mathcal{A}}$ を M に基底変換したとき, M 上の形式リー群の同型

$$\log_{\mathcal{A}} = (\log_1, \ldots, \log_g) : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}_a^g}$$

がとれ, $\mathcal{A}_{/R}$ の $0_{\mathcal{A}}$ 周りにおける適切な局所パラメータ $t := (t_1, \ldots, t_g)$ に対して, 次のような性質を満たす.

$$d\log_i(t) = \widehat{\Omega}_i,\ \log_i(t) \equiv t_i \mod (t_1, \ldots, t_g)^2$$

, $i = 1, \ldots, g$.

Remark 2.6. このような形式対数は, R 上は定義できない. 次の 2.3 節 *2.10* の $g = 1$ の場合の例を参照されたい. ここでは, 完備アーベルスキームについて形式対数を定義したが, 同様にして $\mathbb{Z}_p$ 上平坦なアディック環[3]R 上の形式リー群に対して $R[1/p]$ 上対数が定義できる.([Ds22],*p.320* を参照のこと.)

Proof. $\widehat{\Omega}_i$ は $d\widehat{\Omega}_i = 0$ を満たしている.
実際, 任意の局所パラメータ t に対して, $\widehat{\mathcal{A}}$ の形式群から $\widehat{\mathbb{G}_a^g}$ への M 上の同型が存在する. ([Ha10] 参照). 従って $\widehat{\Omega}_i$ は $\widehat{\mathbb{G}_a^g}$ 上の平行移動不変な微分形式に対応する. このようなものは $d\widehat{\Omega}_i = 0$ を満たす閉微分形式である. 一般に, $\widehat{\mathbb{G}_a^g}$ 上の閉微分形式は完全微分形式である. このことから, M 係数の t による形式べき級数 $\log_i$ が取れて $d\log_i = \widehat{\Omega}_i$ となる. この際, $\log_{\mathcal{A}}$ という M 係数形式べき級数に定数項が存在しないようにとれることに注意する. 単位切断 $e : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathcal{A}$ により, Ω_i, $(i = 1, \ldots, g)$ を引き戻すと, Ω_i, $i = 1, \ldots, g$ の定義より

$$\langle dt_1, \ldots, dt_g \rangle_R = \langle e^*\Omega_1, \ldots, e^*\Omega_g \rangle_R$$

[3]ある p を含むイデアルのべき乗を零元の開近傍系に持ち, 完備かつ分離的な位相環

が成立している．したがって, t_i, $(i=1,\dots,g)$ を取り換えることで $e^*\widehat{\Omega}_i = dt_i$, $i=1,\dots,g$ が成立するとしてよい．以上のことから, 各 i に対して $d\log_i = \widehat{\Omega}_i$ と合わせて次を得る．

$$\log_i(t) \equiv t_i \mod (t_1,\dots,t_g)^2.$$

最後に, この $\log_{\mathcal{A}} = (\log_{\mathcal{A}},\dots,\log_{\mathcal{A}})$ が形式群の準同型を与えていることを示す．$\mathcal{A}_{/R}$ の積から定まる余積

$$m^* : R[[t]] \longrightarrow R[[t]] \otimes_R R[[t']] \simeq R[[t,t']]$$

が定まり, $F_{\widehat{\mathcal{A}}} := (F_{\widehat{\mathcal{A}},1},\dots,F_{\widehat{\mathcal{A}},g})$, $F_{\widehat{\mathcal{A}},i} := m^*(t_i) \in R[[t,t']]$ とする．
この時, 各 $i=1,\dots,g$ に対して

$$\log_i(F_{\widehat{\mathcal{A}},1}(t,t'),\dots,F_{\mathcal{A},g}(t,t')) = \log_i(t) + \log_i(t')$$

が成立することを示せばよい．このことは, 外微分 d を作用させることと, $d\log_{\widehat{\mathcal{A}}} = (\widehat{\Omega_1},\dots,\widehat{\Omega_g})$ より, 次と同値である．

$$\widehat{\Omega}_i(t_1,\dots,t_g)|_{t_1=F_{\widehat{\mathcal{A}},1}(t,t'),\dots,t_g=F_{\widehat{\mathcal{A}},g}(t,t')} = \widehat{\Omega}_i(t) + \widehat{\Omega}_i(t').$$

他方, この等式は, Ω_i が平行移動不変な微分形式であることから従う．$\log_{\widehat{\mathcal{A}},i}$, $(i=1\dots,g)$ というべき級数はいずれも M 係数形式べき級数環において可逆であり, $\log_{\widehat{\mathcal{A}}}$ が M 上の形式リー群の間の同型を与えている． □

この補題 2.5 で与えた, 局所パラメータ $t=(t_1,\dots,t_g)$ を用いて記述される R 上の形式群 $F_{\widehat{\mathcal{A}}} := (F_{\widehat{\mathcal{A}},1},\dots,F_{\widehat{\mathcal{A}},g})$ を固定する．

§2.3 形式群

M 上の形式リー群の同型 $\log_{\mathcal{A}} : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}_a^g}$, およびその逆 $\log_{\mathcal{A}}^{-1}$ により, 平行移動不変な微分作用素

$$D_{t_i} := D_i := (\log_{\mathcal{A}})^* \circ \partial_i \circ (\log_{\mathcal{A}}^{-1})^*$$

, $i=1,\dots,g$ が定まる．ここで, ∂_i は t_i に関する偏微分作用素. 先天的には, この微分作用素は M 上の形式べき級数環に作用するが, 実は R 上の形式べき級数環にも作用する．

Lemma 2.7. *D_i, $i=1,\dots,g$ は $R[[t]]$ を $R[[t]]$ に移す微分作用素.*

Proof. $(F_{\widehat{\mathcal{A}},i}(t,t'))_{i=1,\dots,g} \in R[[t,t']]^{\oplus g}$ を $\widehat{\mathcal{A}}$ の乗法により与えられる形式群則としたとき,

$$\log_i(F_{\widehat{\mathcal{A}},1}(t,t'),\dots,F_{\widehat{\mathcal{A}},g}(t,t')) = \log_i(t) + \log_i(t')$$

が各 $i=1,\dots,g$ に対して成立する．そこで片々に, $D_{t'_i}$ という $R[[t']]$ における微分作用素を $D_{t'_i}(t_j)=0$, $j=1,\dots,g$ で $R[[t,t']]$ に延長したものとして作用させ, $t'=(0,\dots,0)$ を代入したものを比較する．

- <u>左辺に $D_{t'_i}$ を作用させ, $t'=0$ を代入した式：</u>

$$\frac{\partial\log_i}{\partial T_1}|_{T=t}\cdot\frac{\partial F_{\widehat{\mathcal{A}},1}}{\partial T'_i}|_{T'=0} + \dots + \frac{\partial\log_i}{\partial T_g}|_{T=t}\cdot\frac{\partial F_{\widehat{\mathcal{A}},g}}{\partial T'_i}|_{T'=0}$$

- <u>右辺に $D_{t'_i}$ を作用させ, $t'=0$ を代入した式：</u>

$$(\log_{\widehat{\mathcal{A}}})^* \circ \partial_{t'_i} \circ (\log_{\widehat{\mathcal{A}}}^{-1})^*(\log_i(t) + \log_i(t')) = 1$$

同様の計算によって, 次の $g\times g$ 行列の等式を得る．

$$(\frac{\partial\log_i}{\partial t_j}(t))_{i,j} \times (\frac{\partial F_{\widehat{\mathcal{A}},i}}{\partial t'_j}(t,0))_{i,j} = \mathrm{I}_g$$

ここで, I_g が $g\times g$ の単位行列である．
この行列等式と, $(\frac{\partial F_{\widehat{\mathcal{A}},i}}{\partial t'_j}(t,0))_{i,j}$ が R 係数 $g\times g$ 行列であることにより, 次の性質を得る．

$$((\frac{\partial\log_i}{\partial t_j}(t))_{i,j})^{-1} \in M_{g\times g}(R) \qquad \cdots(1)$$

この性質を用いて補題を証明する．$D_i(t_j) \in R[[t]]$ であることを 各 i,j に対して示せば十分.

$$D_i(t_j) = (\log_{\widehat{\mathcal{A}}})^* \circ \partial_i \circ (\log_{\widehat{\mathcal{A}}}^{-1})^*(t_j) = \frac{\partial\log_j^{-1}}{\partial t_i}(T)|_{T=\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)}$$

であることに注意する.

$$\log_i^{-1}(\log_1(t),\ldots,\log_g(t)) = t_i$$

が, $i=1,\ldots,g$ に対して成立するので, 片々t_j で偏微分することにより, 各 i,j について次の等式を得る.

$$\frac{\partial \log_i^{-1}}{\partial T_1}|_{T=\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)}\cdot\frac{\partial \log_1}{\partial t_j}+\cdots+\frac{\partial \log_i^{-1}}{\partial T_g}|_{T=\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)}\cdot\frac{\partial \log_g}{\partial t_j}(t)=\delta_{ij}$$

, ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタである. 従って, 次の $g\times g$ も行列式を得る.

$$(\frac{\partial \log_i^{-1}}{\partial T_j}|_{T=\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)})_{i,j}\times(\frac{\partial \log_i}{\partial t_j})_{i,j}=E_g$$

この等式に, (1) を用いることで, 任意の $1\le i,j\le n$ に対して

$$D_i(t_j)=\frac{\partial \log_j^{-1}}{\partial t_i}(T)|_{T=\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)}\in R[[t]]$$

を得る. □

以上のことから, 次のようにして平行移動不変な微分作用素を定義する.

Definition 2.8. 多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_g)\in\mathbb{Z}^g_{\ge 0}$ として, 微分作用素 $\widehat{\partial}^{[\alpha]}_A$ を次のように定義する.

$$\widehat{\partial}^{[\alpha]}_A = D_1^{\alpha_1}\cdots D_g^{\alpha_g}.$$

Remark 2.9. この作用素は任意の $f\in R[[t]]$ に対し次を満たすことに注意する.

$$\widehat{\partial}^{[\alpha]}_A(f(F_{\widehat{\mathcal{A}}}(t,t^{'})))=(\widehat{\partial}^{[\alpha]}_A(f))(F_{\widehat{\mathcal{A}}}(t,t^{'})).$$

Example 2.10. $g=1$ の場合には, 形式対数 $\log_{\mathcal{A}}(t)$ として $D_1=1/\log^{'}_{\mathcal{A}}(t)\times d/dt$ で与えられる. さらに, p が奇素数で $\mathcal{A}_{/R}$ が *Weierstrass* モデル $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ で与えられるとき, $\omega=-2dx/y, t=-2x/y$ に対する形式対数函数 $\log_{\mathcal{A}}$ は

$$(\log_{\mathcal{A}}(t))^{'}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(2m+3n)!}{(m+2n)!m!n!}(\frac{-g_2}{4})^m(\frac{-g_3}{4})^n t^{4m+6n}$$

と記述される ([Y13], Cor 3).

§3 高次の Eisenstein 数

この節では, [KS24] で構成された l 進テータ函数を基にして, Eisenstein 数の $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ 上の形式函数による補完を与える. この結果は, [BKF15] において構成された, 古典的な Eisenstein 数を補完する形式函数の拡張にあたる.
以下では, 第 2 節と同様にして, K を CM 体, $\mathfrak{f}:\mathcal{O}_K$ のイデアルで p,l と互いに素であるとし, $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ を, $\mathcal{O}_K^\times$ のうち mod $\mathfrak{f}$ で 1 と合同なもの全体の群とする. また,

$$\mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}}):=\{(\beta_{\overline{\sigma}},\alpha_\sigma)\in\mathbb{N}^{\Sigma_K}\times\mathbb{N}^{\Sigma_K}|\prod_{\sigma\in\Sigma_K}\sigma(x)^{-\alpha_\sigma}\overline{\sigma}(x)^{\beta_{\overline{\sigma}}}=1, x\in\Gamma_{\mathfrak{f}}\text{ は任意}, \beta\ge 0,\alpha\ge 1\}$$

と定める.
また, 第 2 節と同様にして, l 上の素点で不分岐であるような K 上のアーベル拡大体に定義体 M を持つ CM 型単純アーベル多様体 A で $\iota:\mathcal{O}_K\simeq\mathrm{End}(A)$ を満たすものをとる. そして l 上の素点で λ を割り切るもの v_l で $\mathcal{O}_M$ を局所化した局所環 R とし, R 上の $A_{/M}$ の Neron モデル $\mathcal{A}_{/R}$ をとる. そして, その双対アーベルスキームを $\mathcal{A}^{'}_{/R}$ とする. また, 自由 R 加群 $\Gamma(\mathcal{A},\Omega^1_{\mathcal{A}/R})$ の R 加群としての基底 $\omega(A)=(\omega_1,\ldots,\omega_g)$ を, 第 2 節で与えたように, 次を満たすようにする.

$$\omega_i\circ\iota(a)=\sigma_i(a)\omega_i.$$

ここで $\sigma_i:K\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$, $i=1,\ldots,g$ を体の埋め込み[4]とした.
$\Gamma(\mathcal{A}^{'},\Omega_{\mathcal{A}^{'}/R})$ の R 加群としての基底 $\omega(\mathcal{A}^{'})$ も $\omega(\mathcal{A})$ と同様に定義する.
また, $A_{/\mathbb{C}}$ を $\mathcal{A}_{/R}$ の基底変換とし, $\pi:A\longrightarrow\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ を構造射とする.

$$\overline{\pi_*\Omega^1_{A/\mathbb{C}}}=:\overline{\omega_{A/\mathbb{C}}}\simeq\mathrm{Lie}(A^{'}/\mathbb{C})\ (=\mathrm{Hom}(\omega_{A^{'}/\mathbb{C}},\mathbb{C}))$$

も $\omega_{\mathcal{A}/R}$ と同様に定める. また, 周期ペアリング

$$H^1_{dR}(A/\mathbb{C})\times H_1(A,\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{C}$$

[4] M は $\mathbb{Q}$ 上ガロアなので, この像は R に含まれることに注意する.

が定まるが, $H_1(A,\mathbb{C})$ には標準的な $\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{C}$ 加群の構造が入っており[5],

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H_1(A,\mathbb{C}),\mathbb{C})\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{C}}(H_1(A,\mathbb{C}),\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C})$$

という同型が自然に定まる．ここで,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}\simeq\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{C}$$

に注意する．したがって,

$$H^1_{dR}(A/\mathbb{C})\times H_1(A,\mathbb{C})\longrightarrow\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{C}$$

というペアリングが定まる．以下, このペアリングから, 次のようなペアリングを与える．

$$\langle,\rangle:\overline{\omega_{A/\mathbb{C}}}\times\omega_{A'/\mathbb{C}}\longrightarrow\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{C}(\overline{\Sigma}_K)$$

ここで $\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{C}(\overline{\Sigma}_K)$ は $\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{C}$ の K 作用が $\overline{\Sigma}_K$ を経由するような部分 K 加群[6].
まず, Hodge 短完全列

$$0\longrightarrow\omega_{A/\mathbb{C}}\longrightarrow H^1_{dR}(A/\mathbb{C})\longrightarrow\mathrm{Lie}(A^{'}/\mathbb{C})\longrightarrow 0$$

から, K の線形作用が Σ を経由する部分 K 加群として

$$\omega_{A/\mathbb{C}}\subset H^1_{dR}(A/\mathbb{C})$$

が取れる．同様に,

$$H_1(A,\mathbb{C})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1_{dR}(A/\mathbb{C}),\mathbb{C})\simeq H^1_{dR}(A^{'}/\mathbb{C})$$

を踏まえて, Hodge 短完全列から

$$\omega_{A'/\mathbb{C}}\subset H_1(A,\mathbb{C})$$

がとれ, K の作用が $\overline{\Sigma}$ を経由する部分空間となる．したがって, 周期ペアリングで, K の作用が $\overline{\Sigma}$ を経由するような部分 K 加群に制限したものを考えれば,

$$\overline{\omega_{A/\mathbb{C}}}\times\omega_{A'/\mathbb{C}}\longrightarrow\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{C}(\overline{\Sigma}_K)$$

が定義できる．
高次の Eisenstein 数とは, $\Gamma_{\mathfrak{f}}\subset\mathcal{O}_K^{\times}$: mod $\mathfrak{f}$ で 1 と合同な数よりなる部分群, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^g\times\mathbb{N}^g$ が $(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma)$ を満たすとき, $x\in\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ に対して

$$EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma}(f_{[c]},x):=\frac{(-1)^{g(g-1)/2}}{\langle\overline{\omega(\mathcal{A})},\omega(\mathcal{A}')\rangle^{\beta}}\cdot\alpha!\sum_{t\in\Gamma\backslash c^{-1}\Lambda_A/\Lambda_A}f_{[c]}(-t)E^{\beta,\alpha+1}(t+x,0;\Lambda,\Gamma_{\mathfrak{f}})\qquad\cdots(2)$$

により定義される数である.[7] ここで, 指数有限な部分群 $\Gamma\subset\mathcal{O}_K^{\times}$ に対して次のように $s\in\mathbb{C}$, $Re(s)\gg 0$ に関する函数を定義する．

$$E^{\beta,\alpha}(t,s;\Lambda_A,\Gamma):=\sum_{\mathfrak{l}\in\Gamma\cdot t+\Lambda_A/\Gamma}\frac{\bar{\mathfrak{l}}^{\beta}}{\mathfrak{l}^{\alpha}N(\mathfrak{l})^{2s}}.$$

このような函数は s に関して負の実軸での整数点上を除いた全複素平面に解析接続される ([KS24] 補題 3.26 参照).
以下では, $E^{\beta,\alpha}(t;\Lambda_A,\Gamma):=E^{\beta,\alpha}(t,0;\Lambda_A,\Gamma)$ とも記述する．
この $f_{[c]}$ は,

$$f_{[c]}:=Nc1_{e(R)}-1_{\mathcal{A}[c]}$$

で定義される $\mathcal{A}[c]$ 上の函数である．$\mathcal{A}[c]$ は R 上エタールなので, この元 $f_{[c]}$ は $\mathcal{A}[c]_{/R}$ 上の大域切断を定める．ここで必要であれば, M を拡大体に取り換えることで, $\mathcal{A}[c](M)=\mathcal{A}[c](\overline{\mathbb{Q}})$ であるとしてよい．
このような Eisenstein 数は, 同変コホモロジー類として記述される．このコホモロジー類としての記述を基にして, 高次の Eisenstein 数は, ある形式函数の値として記述できるようになる．

---

[5] $\mathcal{O}_K\simeq\mathrm{End}(A)$ により, $\gamma\in H_1(A,\mathbb{Z})$ への $g\in\mathcal{O}_K$, つまり $g:A(\mathbb{C})\longrightarrow A(\mathbb{C})$ による作用として $\gamma:[0,1]\longrightarrow A(\mathbb{C})$ との合成 $g\cdot\gamma:=g\circ\gamma$ で定義する．

[6] この定義については, 本稿冒頭の記法の節を参照されたい．

[7] [KS24] ではより一般に " 高次の Eisenstein 数 " を研究しているが, ここではこの定義で十分である．

§3.1 コホモロジー類として

ここでは, Eisenstein-Kronecker 類を構成し, その類と Eisenstein 数の関係を記述する. $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ を指数有限部分群とする. 前節で定義した, $\mathcal{A}_{/R}$ というアーベルスキームに対して, $\mathcal{A}[c] := D \subset \mathcal{A}$ は $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ の作用で安定な閉部分スキームであるとする. ここで, c は, l と互いに素なので $D_{/R}$ はエタール. 以下,

$$R[D]^{0,\Gamma} := \ker(\Gamma(D, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{tr} R)^{\Gamma}$$

と定める. この tr とはトレース写像のことである. この時, $j : U := \mathcal{A} - D \hookrightarrow A$, $i : D \hookrightarrow \mathcal{A}$ が取れて,

$$0 \longrightarrow j_! \mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \longrightarrow i_* i^{-1} \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \longrightarrow 0$$

という $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ 加群短完全列が取れる. これに対して, $\mathcal{F}$ を, $\mathcal{A}$ 上の $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-$\Gamma$ 加群[8] として, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}(*, \mathcal{F})^{\Gamma}$ という関手の導来を取ることにより, 次の長完全系列が生じる.

$$\cdots \longrightarrow H^i_D(\mathcal{A}, \Gamma; \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(\mathcal{A}, \Gamma; \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(U, \Gamma; \mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}_D(\mathcal{A}, \Gamma; \mathcal{F}) \longrightarrow \quad \cdots (1)$$

この系列をもとにして,

$$f_{[c]} \in R[D]^{0,\Gamma}$$

に付随するコホモロジー類を構成する. $\mathcal{A} \times_R \mathcal{A}'$ 上の Poincare 層 P とする. P は可逆な $\mathcal{O}_{\mathcal{A} \times_R \mathcal{A}'}$ 加群である. この時,

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \overset{id \times \pi'}{\longrightarrow} \mathcal{A}$$

の単位切断に沿った P の完備化を $\widehat{P}$ とする. $\mathcal{G} \in \{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}, \widehat{P}, \Omega^g_{\mathcal{A}/R}\}$ という加群の層には, Γ 作用が次のように定まる.

$$\gamma_{\sharp}^{-1} : \mathcal{G}_{\tau} \longrightarrow \mathcal{G}_{\gamma \cdot \tau}$$

, $\mathcal{G}_{\tau}$ は $\tau \in \mathcal{A}$ における茎, $\gamma \in \Gamma$.
例えば $\widehat{P}$ に対しては P の普遍性より

$$\gamma_{\sharp}^{-1} : \gamma^* \widehat{P} \simeq \widehat{P}$$

が定まり, Γ 作用は茎の間に同型を誘導する. ([KS24] の Cor 2.9 参照).
これにより, $\widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-$\Gamma$ 加群となる.
この $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-$\Gamma$ 加群の同変コホモロジーは次のように計算される ([KS24] § 2.6 参照).

Lemma 3.1. $H^i(\mathcal{A}, \Gamma : \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$ は $i < g$ であれば 0 であり, $i = g$ の場合は R と同型. さらに,

$$\Gamma(D, \mathcal{O}_D)^{\Gamma} \subset H^g_D(\mathcal{A}, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

という標準的単射が存在する.

ここで, (1) の式に $\mathcal{F} = \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}$ を用いれば

$$0 \longrightarrow H^{g-1}(U, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}) \longrightarrow H^g_D(\mathcal{A}, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}) \longrightarrow R$$

を得る. 補題の標準単射と合成した

$$\Gamma(D, \mathcal{O}_D)^{\Gamma} \hookrightarrow H^g_D(D, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}) \longrightarrow R$$

は trace となることが知られる. これにより,

$$EK_{\Gamma} : R[D]^{0,\Gamma} \hookrightarrow H^{g-1}(U, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

という射が取れる. この像が Einsenstein-Kronecker 類というものである. ここで特に重要なのは $f_{[c]} \in R[D]^{0,\Gamma_{\mathfrak{f}}}$ の像である次の類である.

---

[8] ここでは, [Gro57] の意味で $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-$\Gamma$ 加群を定義している. 抽象群 G とし, 各 $g \in G$ が局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ について局所環付き空間の射 g :X$\longrightarrow X$ を与えるとする. $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_X$-G 加群であるとは, $\mathcal{F}$ のエタール空間に G が作用し, これが X への G の作用と可換であり, さらに

$$\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

という X 上の加群の層の標準的な射について G の作用と可換であることを意味する. $\mathcal{O}_X$-G 加群の層のなす加法圏は充分単射的対象を持つようなアーベル圏である.

$$EK_\Gamma(f_{[c]}) \in H^{g-1}(U,\Gamma;\widehat{P}\otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}}\Omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

このコホモロジー類と高次 Eisenstein 数との関係を記述するには, Mazur-Messing による普遍ベクトル拡張 (Universal Vectorial Extension) の理論とモーメント写像を概説する必要がある.

§3.2 普遍ベクトル拡張

ここでは, Laumon[Lau96] による解説を基にして, 普遍ベクトル拡張の理論を概説する. $\mathcal{A}_{/R}$ 上の可逆層 $\mathcal{L}$ で可積分な接続 $\nabla:\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}}\Omega^1_{\mathcal{A}/R}$ を備えたもの $(\mathcal{L},\nabla)$ の二つの性質に関する普遍性を満たすものが $\mathcal{A}_{/R}$ の普遍ベクトル拡張である.

- **Rigidified**
- **Theorem of Square を満たす.**

- Rigidified

$e^*\mathcal{L}\simeq \mathrm{Spec}(R)$ を e: 単位切断に対して満たすこと.

- Theorem of Square を満たす

$m:\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$: 乗法, $i=1,2$ に対して, $p_i:\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$: 第 i 射影とする. $D_2(\mathcal{L}):=m^*\mathcal{L}\otimes(p_1^*\mathcal{L})^{-1}\otimes(p_2^*\mathcal{L})^{-1}\otimes(\pi\times\pi)^*e^*\mathcal{L}$ は $\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}$ 上の可逆層で

$$e(R)\times\mathcal{A}\cup\mathcal{A}\times e(R)$$

上で自明な可逆層になるが, この自明化が

$$D_2(\mathcal{L})\simeq\mathcal{O}_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}}$$

に延長されること. この時, 必然的に次の性質が満たされる ([Lau96] 参照).

Lemma 3.2. *$D_2(\mathcal{L})$ 上に誘導される接続は, $d:\mathcal{O}_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}}\longrightarrow\Omega^1_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}/R}$ という外微分と一致する.*

同様のことは, 局所 Noether 的スキーム S 上のアーベルスキームでも定義できる. そこで, 次の R 上の局所ネータ的スキームの圏から, アーベル群の圏への関手 $Pic^\natural(\mathcal{A}/R)$ を定義する.

$$S\mapsto\{(\mathcal{L},\nabla)\mid \mathcal{A}/S \text{ 上の可逆層とその可積分な接続のペアで, Rigidified かつ Theorem of Square を満たす }\}/\simeq$$

この関手は, R 上の相対次元 $2g$ のアーベルスキーム $\mathcal{A}^\natural_{/R}$ で表現可能である. すると, 米田の補題から, $\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}^\natural_{/R}$ 上には普遍的な直線束と可積分な接続のペア, $(P^\natural,\nabla^\natural)$ が存在する. このアーベルスキームは $\mathcal{A}$ の普遍ベクトル拡張と呼ばれ, 次の普遍的な拡張が存在する.

$$0\longrightarrow\Gamma(\mathcal{A},\Omega^1_{\mathcal{A}/R})\longrightarrow Pic^\natural(\mathcal{A}/R)\longrightarrow Pic^0(\mathcal{A}.R)\longrightarrow 0$$

これは, アーベル群の完全列である. 最初の準同型は, $\omega\mapsto(\mathcal{O}_\mathcal{A}.d+\omega)$ であり, 次の準同型は $(\mathcal{L},\nabla)\mapsto\mathcal{L}$ で与えられる. Mazur-Messing により, これは次のような R 上の $fppf$ サイトにおけるアーベル層の完全列に拡張できることが知られている.

$$0\longrightarrow V(e^*T_{\mathcal{A}/R})\longrightarrow\mathcal{A}^\natural\xrightarrow{p}\mathcal{A}'\longrightarrow 0.$$

ここで, $V(e^*T_{\mathcal{A}/R})$ は, 局所自由 R 加群 $e^*T_{\mathcal{A}/R}$ に関するベクトル束. この完全列に対して, $\mathrm{Lie}(*/R):=\mathrm{Hom}(\pi_*\Omega_{*/R},R)$ をとることで, Hodge-de-Rham の短完全系列と可換になる.

$$\begin{CD}
0 @>>> \omega_{\mathcal{A}/R}:=\pi_*\Omega^1_{\mathcal{A}/R} @>>> \mathrm{Lie}(\mathcal{A}^\natural/R) @>>> \mathrm{Lie}(\mathcal{A}'/R) @>>> 0\\
@. @VVV @V{\simeq}VV @VVV @.\\
0 @>>> \omega_{\mathcal{A}/R} @>>> H^1_{dR}(\mathcal{A}/R) @>>> \mathrm{Lie}(\mathcal{A}'/R) @>>> 0
\end{CD}$$

普遍直線束 $P^\natural$ について, P と同様に, 構造射 $\pi^\natural:\mathcal{A}^\natural\longrightarrow\mathrm{Spec}(R)$ で

$$\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}^\natural\xrightarrow{id\times\pi^\natural}\mathcal{A}$$

の単位切断に沿った完備化 $\widehat{P^\natural}$ が取れる. このような $\widehat{P^\natural}$ を $x\in\mathcal{A}[\mathfrak{f}]$ で引き戻した $x^*\widehat{P^\natural}$ にはモーメント写像 mom_x が伴う. このモーメント写像について [KS24] を基に概説する.

§3.3　モーメント写像

$\mathcal{A}^{\natural}_{/R}$ の単位切断

$$e : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathcal{A}^{\natural}$$

は, 正則閉埋め込みであり, 対応するイデアル層 $\mathcal{I}$ とする．この時, $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural}}$ の $\mathcal{I}$ による完備化 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}^{\natural}}}$ として, 次が成立.

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq \omega_{\mathcal{A}^{\natural}/R} \simeq \mathrm{Hom}(H^1_{dR}(\mathcal{A}/R), R) =: \mathcal{H}.$$

したがって, $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}^{\natural}}} = \varprojlim_n \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural}}/\mathcal{I}^{n+1} =: \varprojlim_n \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(n)}}$ となるように $\mathcal{A}^{\natural,(n)}$ を定めれば,

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(n)}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(n-1)}} \longrightarrow 0$$

という短完全列が取れ, $n = 1$ とすることで次を得る.

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(1)}} \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

この $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(1)}}$ は R 加群であり, 上記の短完全列は分裂短完全列, すなわち $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(1)}} \simeq \mathcal{H} \oplus R$ を得る．乗法 $m^{\natural} : \mathcal{A}^{\natural} \times_R \mathcal{A}^{\natural} \longrightarrow \mathcal{A}^{\natural}$ が誘導する

$$(m^{\natural})^* : \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural}(n+m)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural}(n)} \otimes_R \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural}(m)}$$

を繰り返し用いる．すると $m^{\natural}$ の可換性から次が得られる.

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(n)}} \longrightarrow \mathrm{TSym}^n_R(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(1)}})$$

, ここで TSym^*_R は R 上の加群の対称テンソルがなす R 代数[9]である．$\mathcal{O}^{\natural,(1)}_{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{H} \oplus R$ という分裂により,

$$\mathrm{TSym}^n_R(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(1)}}) \simeq \bigoplus_{a=0}^{n} \mathrm{TSym}^a_R(\mathcal{H})$$

が与えられる (本稿の Appendix A を参照)．したがって, これら二つの R 加群の準同型を合成することで次の R 加群の準同型を得る.

$$\mathrm{mom}^{(n)} : \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(n)}} \longrightarrow \bigoplus_{a=0}^{n} \mathrm{TSym}^a_R(\mathcal{H}).$$

この右辺は, オーギュメンテーションイデアルによる極大イデアルを持つ環構造が入る．そこで, 片々完備化することで

$$\mathrm{mom} : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}^{\natural}}} \longrightarrow \mathrm{TSym}^*_R(\mathcal{H})$$

が定義される．このような射はより一般的に R 上滑らかな可換群スキームに対して定義できることに注意する．一つ, 重要な補題を用意する.

Lemma 3.3 ([KS24] 系 2.9)**.** $x \in \mathcal{A}[\mathfrak{f}]$ による $\widehat{P^{\natural}}$ の引き戻し $x^*\widehat{P^{\natural}}$ は

$$\rho_x : x^*\widehat{P^{\natural}} \simeq \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}^{\natural}}}$$

という同型を持つ．ここで, $\mathfrak{f}$ は pl と互いに素な $\mathcal{O}_K$ の整イデアルであったことに注意する.

この同型と, mom を合成することで, 次のモーメント写像を得る.

$$\boxed{\mathrm{mom}_x : x^*\widehat{P^{\natural}} \longrightarrow \mathrm{TSym}^*_R(\mathcal{H}).}$$

$$\mathrm{mom} : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}^{\natural}}} \longrightarrow \mathrm{TSym}^*_R(\mathcal{H})$$

の構成と同様にして, R 上滑らかな可換群スキーム $G_{/R}$ に対して, その単位切断に沿った完備化 $\widehat{G}_{/R}$ として

$$\mathrm{mom} : \mathcal{O}_{\widehat{G}} \longrightarrow \mathrm{TSym}^*_R(\omega_{\widehat{G}/R})$$

が定まる, ここで $\omega_{\widehat{G}/R} := \pi_*\Omega^1_{\widehat{G}/R}$ とし, $\pi : G \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ を構造射とした.

- $\widehat{\mathbb{G}_a}^g$ **の mom**

具体的に, $\widehat{\mathbb{G}_a}^g_{/R}$ という形式的群スキームのモーメント写像を計算する.

[9]対称テンソル代数 Sym_R とは異なることに注意する．Appendix A を参照

Lemma 3.4. $\widehat{\mathbb{G}}^g_{a/R}$ のモーメント写像は次のように記述される.

$$\mathrm{mom}: R[[x_1,\dots,x_g]] \longrightarrow \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{TSym}_R^k(Rdx_1+\ldots+Rdx_g) \subset \bigoplus_{\substack{0\le a_1,\dots,a_g \\ \{i_1,\dots,i_g\}=\{1,\dots,g\}}} Rdx_{i_1}^{[a_1]}\dots dx_{i_g}^{[a_g]}$$

$$F \mapsto ((\frac{\partial}{\partial x_{i_1}})^{a_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial x_{i_g}})^{a_g}F|_{(x_1,\dots,x_g)=(0,\dots,0)}dx_{i_1}^{[a_1]}\dots dx_{i_g}^{[a_g]})$$

ここで, 一般に R 加群 M に対して $m\in M$ で $m^{[n]}:=m\otimes\cdots\otimes m\in M^{\otimes n}$ と定義していた.

Proof. 一般の場合も同様であるので $g=1$ の場合について補題を示す.
$\widehat{\mathbb{G}_a}$ に対して, 単位元周りの局所パラメータ t としたときに $\widehat{\mathbb{G}_a}$ の余積は

$$R[[t]] \longrightarrow R[[t]]\otimes_R R[[t]]; t\mapsto t\otimes 1+1\otimes t$$

である. 従って, 余積の合成から誘導される

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{G}_a}^{(n)}} \longrightarrow \mathrm{TSym}_R^n(\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{G}_a}^{(1)}})$$

は, 次の R 代数の準同型によって与えられる.

$$R[[t]]/(t^{n+1}) \longrightarrow R[[t]]/(t^2)\otimes_R\ldots\otimes_R R[[t]]/(t^2); t^m\mapsto (t_1+\cdots+t_n)^m$$

, ここで $t_i:=1\otimes\cdots\otimes t\otimes\cdots\otimes 1$ を i 番目の成分のみ t で, それ以外 1 となる元.
モーメント写像は, この R 代数の準同型に次の R 加群の同型を合成することで得られる. すなわち R 加群の同型 $R[[t]]/(t^2)\simeq R\oplus Rdt$ から得られる R 加群の準同型

$$\mathrm{TSym}_R^n(R[[t]]/(t^2)) \simeq \bigoplus_{a=0}^{n}\mathrm{TSym}_R^a(Rdt) = \bigoplus_{a=0}^{n} Rdt^{[a]}$$

を合成する. この右側の同型はシャッフル積により与えられていたことを思い出す (本稿の Appendix A を参照). 従って, モーメント写像は R 加群の準同型

$$R[[t]]/(t^{n+1}) \longrightarrow \mathrm{TSym}_R^n(R[[t]]/(t^2)) \simeq \bigoplus_{a=0}^{n} Rdt^{[n]}$$

で与えられ, この準同型は, 各 $0\le m\le n$ について

$$t^m \mapsto (t_1+\ldots+t_n)^m = \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_m\le n \\ a\neq b\ \text{に対し}\ i_a\neq i_b}} t_{i_1}\cdots t_{i_m} \mapsto m!dt^{[m]}$$

で定義される. ここで, $m!dt^{[m]}\in\mathrm{TSym}_R^m(Rdt)\subset\bigoplus_{a=0}^n\mathrm{TSym}^a(Rdt)$ のシャッフル積による $\mathrm{TSym}_R^n(R[[t]]/(t^2))\simeq\mathrm{TSym}_R^n(R\oplus Rdt)$ への像が

$$m!\cdot\sum_{\sigma\in S_{m,n-m}}\sigma\cdot t^{\otimes m} = \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_m\le m \\ a\neq b\ \text{に対し}\ i_a\neq i_b}} t_{i_1}\cdots t_{i_m}$$

であることを用いた. ただし, $S_{m,n-m}=\{\sigma\in S_n \mid \sigma(1)<\ldots<\sigma(m),\sigma(m+1)<\ldots<\sigma(n)\}$. □

また, $G_{/R}$ を R 上の相対次元 d の滑らかな可換群スキームとして, $\widehat{G}$ を単位切断に沿った形式化とする.
M 上の形式対数による形式群の同型

$$\log_G:\widehat{G}\longrightarrow\widehat{\mathbb{G}_a^d}$$

が与えられるとき, 次の補題が成り立つ.

Lemma 3.5.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\widehat{G}/R} \arrow[r, "\mathrm{mom}_{\widehat{G}/R}"] \arrow[d, "(\log_G^{-1})^*"'] & \mathrm{TSym}^*(\omega_{\widehat{G}/M}) \\ \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{G}_a^d}/M} \arrow[r, "\mathrm{mom}_{\mathbb{G}_a^d/M}"] & \mathrm{TSym}^*(\omega_{\widehat{\mathbb{G}_a^d}/M}) \arrow[u, "(\log_G)^*"'] \end{tikzcd}$$

という図式が可換.

Proof. 図式の一番左上部分を $\mathcal{O}_{\widehat{G/M}}$ として示せば十分である. 第一に, $\mathcal{A}^{\natural,(n)}$ と同様にして $G^{(n)}$, $(\mathbb{G}_a^d)^{(n)}$ を定義する. すると, それぞれの余積と形式対数の可換性により次の図式が可換となる.

$$\begin{CD} \mathcal{O}_{G^{(n)}} @>{m_G}>> \mathcal{O}_{G^{(n-1)}} \otimes_M \mathcal{O}_{G^{(1)}} \\ @V{(\log_G^{-1})^*}VV @A{(\log_G)^*}AA \\ \mathcal{O}_{(\mathbb{G}_a^d)^n} @>{m_{\mathbb{G}_a^d}}>> \mathcal{O}_{(\mathbb{G}_a^d)^{(n-1)}} \otimes_M \mathcal{O}_{(\mathbb{G}_a^d)^{(1)}} \end{CD}$$

従って, 次の図式が可換となる.

$$\begin{CD} \mathcal{O}_{\widehat{G}} @>>> \mathrm{TSym}_R^*(\mathcal{O}_{G^{(1)}}) \\ @V{(\log_G^{-1})^*}VV @A{(\log_G)^*}AA \\ \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{G}_a^d}} @>>> \mathrm{TSym}_R^*(\mathcal{O}_{(\mathbb{G}_a^d)^{(1)}}) \end{CD}$$

さて, $\log_G$ は単位切断と可換であるので, 次の図式も可換となり, モーメント写像の定義から補題を得る.

$$\begin{CD} 0 @>>> \omega_{G/M} @>>> \mathcal{O}_{G^{(1)}} @>>> M @>>> 0 \\ @. @A{(\log_G)^*}AA @A{(\log_G)^*}AA @A{id}AA \\ 0 @>>> \omega_{\mathbb{G}_a^d/M} @>>> \mathcal{O}_{(\mathbb{G}_a^d)^{(1)}} @>>> M @>>> 0 \end{CD}$$

□

§3.4 高次の Eisenstein 数と Eisenstein-Kronecker 類の関係

この節では, [KS24] によって示された, Eisenstein-Kronecker 類と高次の Eisenstein 数の関係を記述する.
Kronecker-Eisenstein 類 $EK_\Gamma(f_{[c]}) \in H^{g-1}(U,\Gamma;\widehat{P}\otimes_R \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$ を $id\times p:\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}^\natural \longrightarrow \mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'$ で引き戻すと, 次のような同変コホモロジー類が与えられる.

$$EK^\natural_\Gamma(f_{[c]}) := p^*(EK_\Gamma(f_{[c]})) \in H^{g-1}(U,\Gamma;\widehat{P^\natural}\otimes_R \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

, ここで Poincare 層の普遍性により $P^\natural \simeq p^*P$ が成立していることに注意する. さらに §3.2 節で与えた $P^\natural$ の普遍的な可積分接続 $\nabla^\natural : P^\natural \longrightarrow P^\natural \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}^\natural}} \Omega^1_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}^\natural/\mathcal{A}^\natural}$ により, $\widehat{P^\natural}$ には可積分な接続

$$\widehat{P^\natural} \longrightarrow \widehat{P^\natural}\otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \Omega^1_{\mathcal{A}/R}$$

が誘導される. 簡単のため, この可積分な接続を $\nabla^\natural$ と再定義する.
$\nabla^\natural$ を繰り返し用いることで

$$(\nabla^\natural)^a EK^\natural_\Gamma(f_{[c]}) \in H^{g-1}(U,\Gamma;\widehat{P^\natural}\otimes_R \mathrm{TSym}^a_R(\Omega^1_{\mathcal{A}/R})\otimes_R \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

が構成できる.
以下, この節では $0\neq x\in\mathcal{A}[\mathfrak{f}]$ を固定し, Γ として $\Gamma_\mathfrak{f} = \{x\in\mathcal{O}_K^\times \mid x\equiv 1 \mod \mathfrak{f}\}$ をとり議論する.
$x\in\mathcal{A}[\mathfrak{f}]$ は $\Gamma_\mathfrak{f}$ が自明に作用することを踏まえて[10], $\Gamma_\mathfrak{f}$ 同変コホモロジー類を $x:\mathrm{Spec}(R)\longrightarrow U=\mathcal{A}-D$ で引き戻すことにより, 次が定義できる.

$$x^*(\nabla^\natural)^a EK_{\Gamma_\mathfrak{f}}^\natural(f_{[c]}) \in H^{g-1}(\Gamma_\mathfrak{f}; x^*\widehat{P^\natural}\otimes_R \mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}).$$

このコホモロジー類は R 係数の $\Gamma_\mathfrak{f}$ 加群に関する群コホモロジー類である. 最後に, モーメント写像 $\mathrm{mom}_x : x^*\widehat{P^\natural} \longrightarrow \mathrm{TSym}^*_R(\mathcal{H})$ と射影 $\pi_b : \mathrm{TSym}^*_R(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{TSym}^b_R(\mathcal{H})$ を合成した

$$x^*\widehat{P^\natural} \longrightarrow \mathrm{TSym}^b_R(\mathcal{H})$$

を用いれば, 次のコホモロジー類が得られる.

$$EK^{b,a}_{\Gamma_\mathfrak{f}}(f_{[c]},x) := (\pi_b\circ \mathrm{mom}_x)_*(x^*(\nabla^\natural)^a EK_{\Gamma_\mathfrak{f}}^\natural(f_{[c]})) \in H^{g-1}(\Gamma_\mathfrak{f}; \mathrm{TSym}^b_R(\mathcal{H})\otimes_R \mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}).$$

Hodge 短完全列での全射

$$p : H^1_{dR}(\mathcal{A}/R) \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathcal{A}'/R)$$

は分裂するので, 分裂射 $\mathrm{Lie}(\mathcal{A}'/R) \longrightarrow H^1_{dR}(\mathcal{A}/R)$ に $\mathrm{Hom}_R(*,R)$ を作用させることで

$$\mathcal{H} = \mathrm{Hom}_R(H^1_{dR}(\mathcal{A}/R),R) \to \omega_{\mathcal{A}'/R}$$

[10] この部分は高次の Eisenstein 数を形式函数で表示する上で本質ではない. このことは, のちに補題 1.10 により確認される.

が定まる．そこで，この射によるコホモロジー類 $EK^{b,a}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x) \in H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}}, \mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\mathcal{H}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R})$ の像を再度

$$EK^{b,a}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x) \in H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}}, \mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

と定義する．さらに，R 加群 $\mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}$ の $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ 不変な部分 R 加群は次のように記述される．

Lemma 3.6 ([KS24] Cor 1.14)**.**

$$(\mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R})^{\Gamma_{\mathfrak{f}}} \simeq \bigoplus_{\substack{(\beta,\alpha+1)\in \mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}}),\\ |\alpha| = \sum_\sigma \alpha_\sigma = a, |\beta| = \sum_\sigma \beta_{\overline{\sigma}} = b}} \mathrm{TSym}^\alpha_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}$$

この各 $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ 不変な直和成分に関する $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ の群コホモロジーに関して，R 加群 $\mathrm{TSym}^{\alpha+1}(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta(\omega_{\mathcal{A}'/R})$ への次のような準同型を定義する．

$$\begin{aligned} &H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}}, \mathrm{TSym}^\alpha_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}) \\ &\simeq (H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}}, \mathbb{Z}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\alpha_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \\ &\longrightarrow \mathrm{TSym}^{\alpha+1}_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \end{aligned}$$

ここで，最後の準同型は $\Gamma'_{\mathfrak{f}} \subset \Gamma_{\mathfrak{f}}$ という指数有限自由部分群を一つ固定し，制限写像 $H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{g-1}(\Gamma'_{\mathfrak{f}}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ によって定義した．

さて，

$$EK^{b,a}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x) \in H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}}, \mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes \omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

について，$\mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}$ は局所自由 R 加群で射影的なので，その $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ 不変部分 R 加群への射影をとることができる．補題 3.6 により，特に $(\beta, \alpha+1) \in \mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$ に対して次の準同型が定義できる．

$$H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}}, \mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes \omega^g_{\mathcal{A}/R}) \longrightarrow H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}}, \mathrm{TSym}^\alpha_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes \omega^g_{\mathcal{A}/R}).$$

さらに，$\Gamma'_{\mathfrak{f}} \subset \Gamma_{\mathfrak{f}}$ を固定することで与えた準同型

$$H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}}, \mathrm{TSym}^\alpha_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes \omega^g_{\mathcal{A}/R}) \longrightarrow \mathrm{TSym}^{\alpha+1}_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})$$

を合成することで，$EK^{b,a}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)$ の $\mathrm{TSym}^{\alpha+1}_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \simeq R$ への像を定義できる．このような R への像を $EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)$ と記述することにする．

この最後の同型 $\mathrm{TSym}^{\alpha+1}_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \simeq R$ は $\omega(\mathcal{A}) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g)$ という $\omega_{\mathcal{A}/R}$ 上の大域的な微分形式の基底と，$\omega_{\mathcal{A}'/R}$ の微分形式の基底 $\omega(\mathcal{A}')$[11]で定まる同型とした．

$EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma}(f_{[c]},x)$ は $\Gamma'_{\mathfrak{f}}$ の取り方に依存しない元であることが示される ([KS24]p.23 を参照)．

このようにしてコホモロジー類より定義された $EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x) \in R$ について次が成立する ([KS24] 系 3.28 参照)．

$EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)$ は，初めに解析的に定義した高次の Eisenstein 数と一致する．

このように高次の Eisenstein 数をコホモロジー類から構成する手法により，高次 Eisenstein 数を特殊値に持つような形式函数をコホモロジー類から構成することができる．

§3.5　高次の Eisenstein 数の形式化

この節では高次の Eisenstein 数を特殊値に持つ l 進形式函数を構成する．

$\Gamma \subset \mathcal{O}_K^\times$ を指数有限な部分群で $D := \mathcal{A}[c]$ が Γ の作用で安定であるとする．この時 $U = \mathcal{A} - D$ として Eisenstein-Kronecker 類 $EK_\Gamma(f_{[c]}) \in H^{g-1}(U, \Gamma; \widehat{P} \otimes \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$ をとる．この節では，$0 \neq x \in \mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ を次を満たすような元とする．

- **x の条件**

あるアーベルスキーム $\mathcal{B}_{/R}$ と R 上の同種写像 $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ で，その双対 ϕ' が R 上エタールなものが存在し，$x \in \mathrm{Ker}(\phi)$．

$\widehat{\mathcal{A}}_{x/R}$ で $\mathcal{A}_{/R}$ の $x : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathcal{A}$ に沿った完備化とする．これは，アファイン形式的スキームである．すると，$EK_\Gamma(f_{[c]})$ の $\widehat{\mathcal{A}}_x$ への制限は次のようになる．

$$EK_\Gamma(f_{[c]})|_{\widehat{\mathcal{A}}_x} \in H^{g-1}(\widehat{\mathcal{A}}_x, \Gamma : \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}}_x}) \simeq H^{g-1}(\Gamma, H^0(\widehat{\mathcal{A}}_x, \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}}_x}))$$

[11][KS24]Definition 1.15 にあるように，これらは偏極構造と compatible である必要はない

この二番目の同型は, E_2 スペクトル系列

$$H^p(\Gamma, H^q(\widehat{\mathcal{A}_x}, \widehat{P}\otimes\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}_x}})) \Rightarrow H^{p+q}(\widehat{\mathcal{A}_x}, \Gamma; \widehat{P}\otimes\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}_x}})$$

の存在と $\widehat{\mathcal{A}_x}$ がアファインであるということから $H^q(\widehat{\mathcal{A}_x}, \widehat{P}\otimes\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}_x}}) = 0$, $q\geq 1$ が成立することにより従う．この群コホモロジー類を, x による平行移動 $T_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ で引き戻すことで,

$$T_x^*(EK_\Gamma(f_{[c]})|_{\widehat{\mathcal{A}_x}}) \in H^{g-1}(\Gamma, H^0(\widehat{\mathcal{A}}, T_x^*\widehat{P}\otimes\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}}}))$$

が取れる．$R\hookrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ で $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ に基底変換する．この時, 次の分裂補題と呼ばれる重要な補題が成立する．

Lemma 3.7 ([KS24] 補題 5.12, 命題 5.9)**.** $0\neq x\in\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ を先に定めたような等分点とする．この時

$$\widehat{\rho_x} : T_x^*\widehat{P}|_{\widehat{\mathcal{A}}} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}\widehat{\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}}\mathcal{A}'}$$

という $\widehat{\mathcal{A}}$ 上の加群の層の同型が存在する．

この補題から,

$$\widehat{\rho_x}(T_x^*(EK_\Gamma(f_{[c]})|_{\widehat{\mathcal{A}_x}})) \in H^{g-1}(\Gamma, H^0(\widehat{\mathcal{A}}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'}}\otimes_R\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}}}))$$

が構成される．

ここで, $\Gamma'\subset\Gamma$ という指数有限自由部分群を固定し, $\xi\in H_{g-1}(\Gamma,\mathbb{Z})$ を, 制限写像 $H_{g-1}(\Gamma,\mathbb{Z})\longrightarrow H_{g-1}(\Gamma',\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$ による ξ の $\mathbb{Z}$ への像が $\mathbb{Z}$ の生成元になるようにとる．この時, 群コホモロジーのカップ積 $\xi\cap$ をとれば,

$$\theta_\Gamma(f_{[c]},x) := \xi\cap\widehat{\rho_x}(T_x^*(EK_\Gamma(f_{[c]},x)|_{\widehat{\mathcal{A}_x}})) \in H^0(\mathcal{A}\widehat{\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}}\mathcal{A}', \mathcal{O}_{\mathcal{A}\widehat{\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}}\mathcal{A}'}\otimes\omega^g_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}|_{\widehat{\mathcal{A}}})^\Gamma \subset H^0(\mathcal{A}\widehat{\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}}\mathcal{A}', \mathcal{O}_{\mathcal{A}\widehat{\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}}\mathcal{A}'})$$

が定義される．最後の包含は, $\omega(\mathcal{A})$ が定める $\omega^g_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ を用いた[12]．この $\mathcal{A}\widehat{\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}}\mathcal{A}'$ 上の形式函数 $\theta_\Gamma(f_{[c]},x)$ を l 進テータ函数とよぶ．l 進テータ函数は, Γ' や ξ の取り方によらない ([KS24]Lemma5.15 を参照).

さらに,

$$\begin{aligned}\theta_\Gamma(f_{[c]},x) \in H^0(\widehat{\mathcal{A}}\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\widehat{\mathcal{A}'}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}}\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\widehat{\mathcal{A}'}}\otimes\omega^g_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}})^\Gamma &\hookrightarrow (\mathrm{TSym}^*(\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}})\otimes\mathrm{TSym}^*(\omega_{\mathcal{A}'/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}})\otimes\mathrm{TSym}^1(\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}))^\Gamma \\ &\simeq \bigoplus_{(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma)}\mathrm{TSym}^{\alpha+1}(\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}l}}\mathrm{TSym}^\beta(\omega_{\mathcal{A}'/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}) \quad \cdots(3)\end{aligned}$$

が成立する．

ここで、一つ目の包含射はモーメント写像による包含である．また二つ目の同型は補題 3.6 による．

このような l 進テータ函数に関して, 次のような重要な関係式が成立する．

Proposition 3.8. $0\neq x\in\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ を, $x\in\mathcal{A}[\mathfrak{f}]$ とする．また, Γ として $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ をとる．$(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$ であるとき, 次が成立する．

$$\widehat{\partial}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}}\widehat{\partial}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'}\theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)(t,t')|_{t=0,t'=0} = EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x).$$

Proof. 平行移動不変な微分作用素 $\widehat{\partial}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}}\widehat{\partial}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'}$ に関して, moment 写像との次のような関係が成立する．

Lemma 3.9. $\mathrm{mom} : \Gamma(\mathcal{A}\widehat{\times_R}\mathcal{A}', \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'}}) \longrightarrow \mathrm{TSym}^*_R(\omega_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'/R})$ は, 次で記述される．

$$f\mapsto(\widehat{\partial}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}}\widehat{\partial}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'}f(t,t')|_{t=0,t'=0}\cdot\widehat{\omega}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}}\widehat{\omega}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'})_{\alpha,\beta}$$

, ここで $\widehat{\omega}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}} := \widehat{\omega_1}^{\alpha_1}\cdots\widehat{\omega_g}^{\alpha_g}$ ($\widehat{\omega}_{\mathcal{A}'}$ も同様) として定めた．

Proof. 補題の証明

$\mathrm{mom}_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'}$, $\mathrm{mom}_{\mathbb{G}_a^{2g}}$ をそれぞれ, $\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'$, $\mathbb{G}_a^{2g}$ に対して定めたモーメント写像とする．この時, M 上の $\omega(\mathcal{A}),\omega(\mathcal{A}')$ により定まる形式対数

$$\log := \log_{\widehat{\mathcal{A}}\times_M\widehat{\mathcal{A}'}} : \mathcal{A}\widehat{\times_M}\mathcal{A}' \simeq \widehat{\mathbb{G}_a^{2g}}$$

[12] この最後の包含の部分は [KS24] の構成とは少し異なるようにしてある．このようにするのは, 本稿では, p 進 L 函数の構成を目標としておらず, 高次の Eisenstein 数を補完する形式函数構成の上では, この定義の方が都合がいいからである．

とする. この時, モーメント写像の補題 3.5 から次の可換図式が成立する.

$$\begin{array}{ccc} R[[t,t^{'}]] & \xrightarrow{\mathrm{mom}_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'}} & \mathrm{TSym}^*_R(\omega_{\mathcal{A}\times_M\mathcal{A}'}/R) \\ {\scriptstyle (\log^{-1})^*}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle (\log)^*} \\ M[[t,t^{'}]] & \xrightarrow{\mathrm{mom}_{\mathbb{G}_a^{2g}/M}} & \mathrm{TSym}^*_R(\omega_{\mathbb{G}_a^{2g}/M}) \end{array}$$

$\mathrm{mom}_{\mathbb{G}_a^{2g}/M}$ の, 平行移動不変な微分形式 $dt_1,\ldots,dt_g,dt^{'}_1,\ldots,dt^{'}_g$ に対する記述として, 平行移動不変な微分作用素を用いて与えられることは Lemma3.4 で示した.

したがって, 上記の可換図式から同様のことが $\mathrm{mom}_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'}$ に対して成立するのは確かに良い. □

この, mom と α,β 成分への射影の合成を $\mathrm{mom}^{\alpha,\beta}$ と記述する. 以下, $(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$, $0\neq x\in\mathcal{A}[\mathfrak{f}]$ の時に

$$\mathrm{mom}^{\alpha,\beta}(\theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)) = EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)\widehat{\omega_{\mathcal{A}}}^{[\alpha+1]}\widehat{\omega_{\mathcal{A}'}}^{[\beta]}$$

を示す. $\xi\in H_{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathbb{Z})$ を, 指数有限自由部分群 $\Gamma^{'}\subset\Gamma_{\mathfrak{f}}$ のホモロジーへの制限写像 $H_{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathbb{Z})\longrightarrow H_{g-1}(\Gamma^{'},\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$ による ξ の像が $\mathbb{Z}$ の生成元であるようなものとする.

$$\begin{aligned} \mathrm{mom}^{\alpha,\beta}(\theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)) &= \mathrm{mom}^{0,\beta}(\widehat{\partial}^{[\alpha]}(\xi\cap\widehat{\rho_x}(T^*_x(EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]})|_{\widehat{\mathcal{A}_x)}}))\widehat{\omega}^{[\alpha+1]}_{A}) \\ &= \xi\cap(\mathrm{mom}^{\beta}\circ\rho_x)_*x^*(\nabla^{\natural})^{[\alpha]}EK^{\natural}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]})) \\ &= EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)\widehat{\omega}^{[\alpha+1]}_{\mathcal{A}}\widehat{\omega}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'} \end{aligned}$$

ここで, mom^{β} は, モーメント写像と $R\omega^{[\beta]}_{\mathcal{A}'}$ 成分への射影の合成によって得られる射である. また, この二行目の同型では, ∇ と $\widehat{\partial}$ の compatibility である, [KS24] の Lemma5.14 が用いられている. □

この命題の系として, 同型 (3) と Lemma3.9 により次が成立する.

Corollary 3.10. *$\mathcal{O}_K^{\times}$ の指数有限部分群 Γ と, 本節冒頭の条件を満たす $0\neq x\in\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ を考える. $(\beta,\alpha)\in\mathbb{Z}^{\Sigma_K}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}^{\Sigma_K}_{\geq 0}$ が $(\beta,\alpha+1)\notin\mathrm{Crit}(\Gamma)$ であれば, 次の等式が成立する.*

$$\widehat{\partial}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}}\widehat{\partial}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'}\theta_{\Gamma}(f_{[c]},x)(t,t^{'})|_{t=0,t'=0}=0.$$

そこで, $\mathcal{O}_K^{\times}$ の指数有限部分群 Γ と本節冒頭の仮定を満たす $x\in\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$, 及び $\beta\in\mathbb{Z}^{\Sigma_K}_{\geq 0}$ に対して $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ 係数形式べき級数

$$F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma):=\widehat{\partial}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'}\theta_{\Gamma}(f_{[c]},x)(t,t^{'})|_{t'=0}$$

を定義する. この形式函数より, 高次 Eisenstein 数を特殊値に持つ形式函数を構成する.

Proposition 3.11. *$\mathfrak{f}$ を $\mathcal{O}_K$ のイデアルで pl と互いに素であるものとする. $(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$ とする. また, $0\neq x\in\mathcal{A}[\mathfrak{f}]$ を固定する. 任意の $t_n\in A[\lambda^n]$, $n\geq 1$ に対して,*

$$\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}})|_{t=t_n}=EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x+t_n)$$

が成立する. ただし, 右辺の高次の Eisenstein 数は解析的に定義されるものを用いている.

Proof. 重要なのは, 次の補題である.

Lemma 3.12 ([KS24]Lemma5.14(3), Theorem5.23)**.** *$\mathcal{O}_K^{\times}$ の指数有限部分群 Γ と本節冒頭の仮定を満たす $0\neq x\in\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ を固定する. $t_n\in A[\lambda^n]$ に対して, 次の等式が成り立つ.*

$$T^*_{t_n}\theta_{\Gamma}(f_{[c]},x)(t,t^{'})=\theta_{\Gamma}(f_{[c]},x+t_n)(t,t^{'}).$$

$\Gamma_{\mathfrak{f}}$ の部分群 $\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}\subset\Gamma_{\mathfrak{f}}$ をとる. この時, $\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}$ は $x+t_n$ を固定する. すると, 次の等式が成立する.

$$T^*_{t_n}\widehat{\partial_{\mathcal{A}}}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n})|_{t=0}=\widehat{\partial_{\mathcal{A}}}^{[\alpha]}\widehat{\partial_{\mathcal{A}'}}^{[\beta]}\theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}}(x+t_n,f_{[c]})|_{t=0}=EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}}(f_{[c]},x+t_n)$$

初めの等式は, Lemma3.12 と, $\widehat{\partial_A},\widehat{\partial_{A'}}$ の平行移動不変性から従う. 二つ目の等式では, Lemma3.8 を用いた.

そこで, 命題を証明するには, $\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}$ を $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ と取り換えても, 上記の等式が成立することを示せばよい. そこで次が成立することを用いる.

Lemma 3.13 ([KS24]Corollary 2.29, Lemma5.17)**.** *$(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$ とする. 上記のような $\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}\subset\Gamma_{\mathfrak{f}}$ に対して, $0\neq x\in\mathcal{A}[\mathfrak{f}\lambda^n]$ とすると次の等式が成立する.*

$$\theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)=[\Gamma_{\mathfrak{f}}:\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}]^{-1}\theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}}(f_{[c]},x),\ EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)=[\Gamma_{\mathfrak{f}}:\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}]^{-1}EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}}(f_{[c]},x)$$

Proof. $EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}$ に対しては, 解析的表示から直ちに従う. l 進テータに関しては, [KS24] の Lemma 5.17 を参照. □

すでに得た等式, $T^*_{t_n}\widehat{\partial_{\mathcal{A}}}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n})|_{t=0} = EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}}(f_{[c]}, x+t_n)$ と, Lemma3.13 により,

$$T^*_{t_n}\widehat{\partial_{\mathcal{A}}}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}})|_{t=0} = EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]}, x+t_n)$$

が成立することは確かに良い. □

$0 \neq x \in \mathcal{A}[\mathfrak{f}]$ として構成された形式函数 $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}})$ はア・プリオリには $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}[[t]]$ に含まれるが, 係数は実は M に含まれていることを示す.

Proposition 3.14. $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}}) \in M[[t]]$ が成立する.

Proof. まず, 定義から $EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]}, x) \in R \subset M$ が成立する. したがって, 任意の $\alpha' \in \mathbb{Z}^{\Sigma}_{\geq 0}$ に対して, 次の性質が従う.

$$\widehat{\partial_A}^{[\alpha']}(\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}}))|_{t=0} \in M.$$

実際, $(\beta, \alpha+\alpha'+1) \in \mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$ の時は Lemma3.8 により, 左辺は Eisenstein 数で M の元となる. そうでなければ, Corollary3.10 により, この数は 0. したがって, 上記の性質は確かに成立する.
この性質と次の補題を用いればよい.

Lemma 3.15. *$f \in \mathbb{C}_l[[t]]$ を任意とし, $M \subset S \subset \mathbb{C}_l$ を代数体とする. この時*

$$\widehat{\partial}^{[\alpha]}_A f(t)|_{t=0} \in S$$

が任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^{\Sigma}_{\geq 0}$ で成立すれば,

$$f \in S[[t]].$$

Proof. 補題の証明
$\log_{\widehat{\mathcal{A}}} : \widehat{\mathcal{A}} \simeq \widehat{\mathbb{G}^g_a}$ という M 上定義された形式リー群の間の同型をとる. $F(t) := f(\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t))$ をとれば, $D^{[\alpha]}$ の定義より, $F(t) \in S[[t]]$ となる. したがって, $\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t) \in M[[t]] \subset S[[t]]$ であることを踏まえて, $f(t) \in S[[t]]$ を得る. □

この補題を, $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}})$ に用いれば命題を得る. □

この形式函数 $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}})$ の $t=0$ に関する像は, Eisenstein 数の定義より $R = \mathcal{O}_{M,(v_l)}$ に含まれている.
Eisenstein 数のコホモロジー類としての構成や, 解析的な表示は R を $\mathcal{O}_{M,(v_p)}$ に置き換えても同様になされる. ここで v_p は ι_p が定める M での素点. したがって, Eisenstein 数は $\mathcal{O}_{M,(v_p)}$ の元である.
$v_p^{(n)}$ を ι_p が定める $M(A[\lambda^n])$ 上の素点とする. x を $x+t_n \in A[\mathfrak{f}\lambda^n]$ に取り換え, $\mathcal{O}_{M,(v_p)}$ を $\mathcal{O}_{M(A[\lambda^n]),(v_p^{(n)})}$ に取り換えて同じ議論をすることで,

$$[\Gamma_{\mathfrak{f}}:\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}]EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]}, x+t_n) \in \mathcal{O}_{M(A[\lambda^n]),(v_p^{(n)})}$$

が成立する. ここで, 簡単な計算から

$$[\Gamma_{\mathfrak{f}}:\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}] = |(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^{\times}|$$

である. 従って, Proposition3.11 により各多重指数 α に対する $\widehat{\mathcal{A}}_{/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}$ 上の l 進形式函数 $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}})$ が与える,

$$\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}} : A[\lambda^{\infty}] \longrightarrow \mathbb{C}_l; t_n \mapsto \widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t_n:\Gamma_{\mathfrak{f}})$$

は $\iota_l(M(A[\lambda^{\infty}]))$ に像を持ち, さらに $M(A[\lambda^{\infty}])$ において, この像全体は p 進的に有界であることがわかる. 以上のことは次に要約される.

Proposition 3.16. *$0 \neq x \in \mathcal{A}[\mathfrak{f}]$ とする. この時, 次の二つのことが成り立つ.*

1.
$$\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}}) \in R[[t]]$$

2.
$$\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}} : A[\lambda^{\infty}] \longrightarrow \iota_l(\iota_p^{-1}J); t_n \mapsto \widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t_n:\Gamma_{\mathfrak{f}})$$

が定まり, この像は J において p 進的に有界である. ここで, $J = M_{v_p}(A[l^{\infty}])$ は第一節で定義した体.

Remark 3.17. $\widehat{R}$ を局所環 R の完備化とする．この $f \in R[[t]] \subset \widehat{R}[[t]]$ が定める

$$f : \mathcal{A}[\lambda^\infty] \longrightarrow \mathbb{C}_l$$

の意味をより正確に述べる．初めに，*Tate*[Tate66] の意味での連結な l 可除群 $\{\mathcal{A}[\lambda^n]_{/\widehat{R}}\}_n$ に付随する形式群と，$\widehat{\mathcal{A}}_{/\widehat{R}}$ は一致する．$\widehat{R}$ は完備ネータ局所環であることに注意する．この時，*Tate*[Tate66] は次のことを示した．

$$\varprojlim_n \Gamma(\mathcal{A}[\lambda^n], \mathcal{O}_{\mathcal{A}[\lambda^n]/\widehat{R}}) \simeq \Gamma(\widehat{\mathcal{A}}_{\widehat{R}}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}}}).$$

この右辺は $\widehat{R}[[t]]$ と同型であり，これから，$f \in \widehat{R}[[t]]$ は，任意の $n \geq 1$ に対して

$$f : \mathcal{A}[\lambda^n] \longrightarrow \mathbb{C}_l$$

を定める．

§4 楕円曲線の場合

これまで考察してきたアーベル多様体 $A_{/M}$ の次元が 1 である場合, すなわち楕円曲線 $E_{/M}$ に対しては, Bannai-Furusho-Kobayashi[BKF15] によって得られた結果から, Proposition 3.16 の形式函数が比較的明示的に記述できる．

§4.1 Eisenstein 数の明示公式

以下では, K を類数 1 の虚二次体とし, $\mathfrak{f}$ を pl と互いに素な $\mathcal{O}_K$ のイデアルで $w_{\mathfrak{f}} = |\{e \in \mathcal{O}_K^\times \mid e \equiv 1 \mod \mathfrak{f}\}| = 1$ を満たすとする, また, 素数 $p \neq l$ について $p \geq 5$. $l \geq 7$ を仮定して議論する．
また, λ を ι_l により定まる $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ での素イデアル

$$\lambda := \mathcal{O}_K \cap \iota_l^{-1}(m_{\mathbb{C}_l})$$

とする．ここで, $m_{\mathbb{C}_l}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ の極大イデアルとした．
初めに, 以下では $E_{/M}$ を K の整数環に CM を持つ楕円曲線とする．E の Weierstrass 座標表示に関して, K の類数が 1 であることと $l \geq 7$ であることにより, 次を仮定することができる．

Lemma 4.1. *E は K を定義体に持つ楕円曲線．また，$\mathcal{O}_{K,(\lambda)}$ 上の Weierstrass 極小モデルがとれ，*

$$y^2 = 4x^3 - ax - b$$

, $a, b \in \mathcal{O}_{K,(\lambda)}$ という Weierstrass 方程式で記述される．

E の微分形式 $\omega(E)$ としては, この表示の Neron 微分形式 $\omega_E = -2dx/y$ をとる．また, この複素周期を Ω_∞ とする．さらに, E の双対は E と同型であり, $\omega(E')$ としても ω_E をとる．ω_E と $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ が与える $E_{/K}$ の周期格子を Λ とする．$\Gamma_{\mathfrak{f}} = 1$ に注意すると, $EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}^{\beta,\alpha}(f_{[c]}, x)$ は次のように書き下せる．

Lemma 4.2.

$$EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}^{\beta,\alpha}(f_{[c]}, x) = \alpha! \cdot \frac{(2\pi i)^\beta}{(\Omega_\infty \overline{\Omega_\infty})^\beta}(N(c)E_{\beta,\alpha+1}(x;\Lambda) - E_{\beta,\alpha+1}(x;c^{-1}\Lambda))$$

この, $E_{a,b}(z;\Lambda)$, $a \geq 0, b \geq 1$ は古典的な Eisenstein 数

$$E_{a,b}(z;\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{(\overline{z} + \overline{\lambda})^{a+b}}{|z+\lambda|^{2s}}|_{s=b}.$$

Proof. 非自明な部分は, Hodge 短完全列から定まる

$$\langle , \rangle : \overline{\omega_{E/\mathbb{C}}} \times \omega_{E/\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

の計算であるが, この計算は [KS24] の命題 4.6 でなされている． □

この計算から分かるように, 虚二次体の場合は古典的な Eisenstein 数が, 本質的に [KS24] の Eisenstein 数である．
Bannai-Furusho-Kobayashi[BKF15] は, 古典的な Eisenstein 数を形式化し, その形式函数を研究した．その形式函数と, 構成した形式函数の関係性を記述する．

§4.2 Bannai-Furusho-Kobayashi の形式べき級数との比較

Bannai-Furusho-Kobayashi の形式函数を基にして, K が虚二次体の場合での $F_{x,\beta,f_{[c]}}$ の正体を明らかにする.
[BKF15] では, Eisenstein 数の形式化をコホモロジー側からではなく, より解析的立場から与えた. $\theta(z)$ を Robert のテータ函数, すなわち $[0_E]$ という因子に対応する直線束 $L([0])$ の正規化された次のテータとする.

$$\theta(z) := z\exp(-\frac{e_2^* z^2}{2})\prod_{\gamma\in\Lambda-\{0\}}(1-\frac{z}{\gamma})\exp(\frac{z}{\gamma}+\frac{z^2}{2\gamma^2}).$$

ここで $e_2^* = \sum_{\gamma\in\Lambda-\{0\}}\overline{\gamma}^2/|\gamma|^{2s}|_{s=2}$.
このテータに対して, Kronecker テータ函数を

$$\Theta(z,w) := \frac{\theta(z)\theta(w)}{\theta(z+w)}$$

とする. この $\Theta(z,w)$ は, $E\times E$ 上の Poincare 直線束に付随する正規化されたテータとなる. 特に, あるコサイクル条件を満たすような $e_{z_0}(z,w)$ が取れて,

$$\Theta(z+z_0,w) = e_{z_0}(z,w)\Theta(z,w)$$

, $z_0\in\Lambda$ となる. ここで,

$$\Theta_{z_0}(z,w) := e_{z_0}(z,w)^{-1}\Theta(z+z_0,w)$$

, $z_0\in\mathbb{C}$ と定める. さらに, $z_0\notin\Lambda$,

$$\Theta_{z_0}(z,w) = \sum_{b\geq 0}F_{z_0,b}(z)w^{b-1}$$

として $F_{z_0,b}(z)\in\mathbb{C}[[z]]$ を定義する. 実は, $z_0\in E_{\mathrm{tors}}(\overline{\mathbb{Q}})$ に対しては, $F_{z_0,b}(z)\in\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ であることが [BK07] で示されている.
次に, $\mathbb{E}_{/\mathcal{O}_{K,(\lambda)}}$ を Lemma4.1 で定まる E の $\mathcal{O}_{K,(\lambda)}$ 上の Neron モデルとして, $t=-2x/y$ を局所パラメータとする. $\widehat{\mathbb{E}}_{/\mathcal{O}_{K,(\lambda)}}$ を単位切断に沿った $\mathbb{E}_{/\mathcal{O}_{K,(\lambda)}}$ の形式化とする.

$$\log_{\widehat{\mathbb{E}}}:\widehat{\mathbb{E}}\longrightarrow\widehat{\mathbb{G}_a}$$

を K 上の形式対数であるとする. すなわち, $\log_{\widehat{\mathbb{E}}}(t)\in K[[t]]$ で,

$$d\log_{\widehat{\mathbb{E}}}(t) = \widehat{\omega_E},\quad \log_{\widehat{\mathbb{E}}}(t) = t + \text{higher terms}$$

となるものとする.

$$\widehat{F_{z_0,b}}(t;\Lambda) := F_{z_0,b}(\log_{\widehat{\mathbb{E}}}(t))\in\mathbb{C}_l[[t]]$$

と定める. この形式べき級数に関して, 次の補完公式が成立する.[13]

Proposition 4.3 ([BKF15] Cor 3.13, [BKT07] Prop 4.7, Remark 4.8)**.** $0\neq z_0\in E[n]$ かつ n は λ と互いに素とする. $a\geq 0, b>0$ で

$$b!(\sqrt{d_K})^b(-1)^{a+b}D^a\widehat{F}_{z_0,b}(t;\Lambda)|_{t=t_n} = a!\times\frac{(2\pi i)^b}{(\Omega_\infty\overline{\Omega_\infty})^b}E_{b,a+1}(z_0+z_n;\Lambda).$$

ここで, $\lambda=(\pi_\lambda)$ として

$$\iota:\widehat{\mathbb{E}}[\lambda^n](\overline{\mathbb{Q}_l})\simeq E[\lambda^n](\mathbb{C})\simeq(\frac{1}{\pi_\lambda^n}\Lambda)/\Lambda$$

を固定し, $t_n\mapsto\iota(t_n)=: z_n$ とした. 更に, この左辺は $K(E[2n])[[t]]$ に含まれており, λ 進有界な係数を持つ.

この命題 4.3 と, 命題 3.11, 補題 4.2 を合わせて次の式を得る.

Lemma 4.4.

$$F_{x,b,f_{[c]}}(t;\Gamma_{\mathfrak{f}}) = b!(\sqrt{d_K})^b(-1)^{a+b}(N(c)\widehat{F}_{x,b}(t;\Lambda)-\widehat{F}_{x,b}(t;c^{-1}\Lambda)).$$

このように, 構成された $F_{x,b,f_{[c]}}(t;\Gamma_{\mathfrak{f}})$ は, 虚二次体に制限することで [BKF15] で深く研究されてきた $\widehat{F}_{x,b}$ と結びつく. $F_{x,b,f_{[c]}}$ が持つような, 適切な性質を満たす形式函数に付随した p 進測度を調べることで, critical value における L 値の非消滅性を証明することができる.

[13] [BKF15] では, 補完公式を Kronecker-Eisenstein 数というものを用いて記述されているが, Kronecker-Eisenstein 数と Eisenstein 数を結びつける函数等式を使うと, この命題 2.3 のような補完公式を得る.

§5 形式函数に付随する測度

以下ではアーベル群としての同型 $\delta : \mu_{l^\infty}^g \simeq A[\lambda^\infty](\overline{\mathbb{Q}})$ を固定する. また, この節でも第一節と同様にして $\mathrm{End}(A) \simeq \mathcal{O}_K$ という同型と $\omega_1, \ldots, \omega_g$ を固定し, K の CM 型 Σ_K を

$$\omega_i \circ [\alpha] = \sigma_i(\alpha)\omega_i$$

, $\sigma_i \in \Sigma_K$, $\alpha \in \mathcal{O}_K$ となるようにとる.
初めに, 適切な函数空間 $\mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ を次のように定義する.

Definition 5.1. K_0 を p 上の素点全てで不分岐な K 上の有限次アーベル拡大体とする.

$$\mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}} := \{f \in K_0[[t_1, \ldots, t_g]] \mid f \text{ は条件 (1), (2) を満たす.}\}$$

(1) f は l 進整な係数を持つ. つまり ι_l を介して $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}[[t_1, \ldots, t_g]]$.

(2) λ_0 を ι_l により定まる K_0 の素点とする. この時, 注意 *3.17* と同様に $f \in \mathcal{O}_{K_0,\lambda_0}[[t_1, \ldots, t_g]]$ から

$$f : \mathcal{A}[\lambda^\infty] \longrightarrow \mathbb{C}_l$$

が定まる. この集合論的な射について, ある p 進体 k の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大体 J_f が取れて次が成立する.

$$f : \mathcal{A}[\lambda^\infty] \longrightarrow \iota_l \circ \iota_p^{-1}(\mathcal{O}_{J_f}).$$

- **具体例**

$f \in K_0(A)$, すなわち函数体の元で, さらに $A(m_{\mathbb{C}_l})$ に極を持たないとする. ここで $m_{\mathbb{C}_l}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ の極大イデアル. A の原点における局所パラメータ t によとし, 函数体の元の t による展開に関する l 進整性から, ([BKT07]Lemma4.6 参照) 十分大きな m に関して次が成り立つ.

$$l^m f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}[[t_1, \ldots, t_g]].$$

実は, f の像に関する p 進有界性も証明でき, (これは Appendix B を参照) 十分大きな $m, n \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$p^n l^m f \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}.$$

この例から, $\mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ は有理函数の世界より少し広い世界を考えていることがわかる. Sinnot[Sin87] の有理函数に付随する測度に倣って, 形式函数に付随する測度を次のようにして定義する.

Definition 5.2. $f \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ という形式函数に付随する測度 $\alpha = \alpha_f$ とは, $(\mathbb{Z}_l^\times)^g$ 上の $\mathcal{O}_{J_f}$ 値測度であり, 次の等式を満たすものである.

$$\widehat{\alpha} : \mu_{l^\infty}^g \longrightarrow J; \zeta \mapsto \int_{(\mathbb{Z}_l^\times)^g} \zeta^x d\alpha(x)$$

に対して,

$$f \circ \delta = \widehat{\alpha}.$$

逆に, $f \in \mathcal{F}_{K_0,A}$ が与えられたとき, f に付随する測度 α_f を構成することができる.

Lemma 5.3. $f \in \mathcal{F}_{K_0,A}$ に対して f に付随する測度 α_f が構成でき, f と形式函数に付随する測度 α_f は一対一に対応する.

Proof. $a + l^n\mathbb{Z}_l^g \subset (\mathbb{Z}_l^\times)^g$, $a \in (\mathbb{Z}_l^\times)^g, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^g$ における特性函数の

$$1_{a+l^n\mathbb{Z}_l} = \frac{1}{l^{ng}} \sum_{\zeta \in \mu_{l^n}^g} \zeta^{-a}\chi_\zeta$$

, $\chi_\zeta(x) := \zeta^x$, $x \in \mathbb{Z}_l^g$ という記述を基にして,

$$\alpha_f(a + l^n\mathbb{Z}_l^g) := \frac{1}{l^{ng}} \sum_{\zeta \in \mu_{l^n}^g} \zeta^{-a} f \circ \delta(\zeta)$$

として α_f を定義すれば, distribution 性を満たし, $\mathcal{O}_{J_f}$ に値を持つ分布が定まる. □

このように定義された形式函数 f に付随する測度 α_f の Mellin 変換

$$M_{\alpha_f}(\psi) := \int_{\mathbb{Z}_l^g} \psi(a) d\alpha_f(a)$$

($\psi : (\mathbb{Z}_l^\times)^g \longrightarrow \mathcal{O}_{J_f}^\times$ は位数有限指標), が**そこまで豊富な** ψ **では消えない**ことを示すことが, この節の目標である.

アイデアとしては, この Mellin 変換が十分豊富な ψ で消えてしまえば, そこから線形関係式が生じる. そして, これは次の節で示す線形独立性に矛盾してしてしまうのである.

§5.1　線形独立性

初めに, 最も基本的な線形独立性を示す.

Proposition 5.4. $f_i \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$, $i = 1, \ldots, m$ と定め, 各 i に対して

$$\Phi_i : A^n[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}; (P_j)_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} P_j$$

, $\alpha_{ji} \in \mathcal{O}_K$ を定義する. 次を仮定する.
Hyp

$$\alpha \cdot \Phi_i = \beta \cdot \Phi_j \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

, $i \neq j$ で $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$.
この時,

$$F := \sum_{i=1}^{m} f_i \circ \Phi_i : A^n[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

が $F = 0$ であれば $f_i \in K_0$.

Remark 5.5. この命題は, 係数 K_0 を $\overline{\mathbb{Q}}$ 係数に置き換えても正しい. そこで, 係数に関する技術的な議論を避けたければ, 本命題の証明は全て $\overline{\mathbb{Q}}$ 係数の世界で考えてしまってよい.

Proof. まず, 上記の仮定を満たすような $f_i \in \mathcal{F}_{K_0,A}$ で, f_i が定数でないようなものが取れたとする. この時, 反例となるような $f_i \in \bigcup_{K_0} \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}, i = 1, \ldots .m$ のうち, m が最小であるようなものを, 改めて f_i, $i = 1, \ldots, m$ とする. ここで, K_0 は K 上の p において不分岐な有限次アーベル拡大全体を走るとする. 一般性を保って f_2 は定数でないとしてよい. 今, 仮定により,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \end{pmatrix} \in M_{n\times 2}(K)$$

は, 階数 2 である. したがって, ある $\beta := (\beta_i)_{i=1,\ldots,n}, \beta_i \in \mathcal{O}_K$ が取れて,

$$\Phi_1 \circ \beta = 0, \Phi_2 \circ \beta \neq 0$$

とできる. ここで, $\beta : A \longrightarrow A^n; x \mapsto (\beta_i x)$ と考える.
すると, 任意の $\tau \in A[\lambda^\infty]$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{m} f_i \circ \Phi_i(x \widehat{\oplus} \tau) = f_i \circ \Phi_1(x) + f_2(\Phi_2(x) \widehat{\oplus} \Phi_2(\beta(\tau))) + \ldots + f_m(\Phi_m(x) \widehat{\oplus} \Phi_m(\beta(\tau))) = 0.$$

したがって, $f_i^* \in \mathcal{F}_{K_0(A[\lambda^\rho]),\mathcal{A}}$ ($\rho \in \mathbb{Z}$ は適切な整数) を

$$f_i^*(t) := f_i(t) - f_i(t \widehat{\oplus} \Phi_i(\beta(\tau)))$$

として定義すれば,

$$f_2^* \circ \Phi_2 + \ldots + f_m^* \circ \Phi_m = 0 : A^n[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

が成立する. 今 m の最小性により, $f_i^* \in K_0(A[\lambda^\rho])$, $i = 2, \ldots, m$ が成立する. 特に, 定数 $c \in K_0(A[\lambda^\rho])$ を用いることで,

$$f_2^*(t) = f_2(t) - f_2(t \widehat{\oplus} \Phi_2(\beta(\tau))) = c.$$

t を $t \widehat{\oplus} \Phi_2(\beta(\tau))$ に取り換えても上式は成立し, 以下この取り換えを繰り返して足し上げることで,

$$f_2(t) - f_2(t \widehat{\oplus} \beta(M\tau)) = Mc$$

が任意の $M > 0$ に対して成立する. 特に, $\tau \in A^n[\lambda^\infty]$ であったので, 十分大きな N に対して $l^N \tau = 0$ が成立する. したがって, $l^N c = 0$ であり $c = 0$ が成立する.

今, 仮定より $\Phi_2 \circ \beta \neq 0$ であり,

$$\Phi_2 \circ \beta : A[\lambda^\infty] \longrightarrow A[\lambda^\infty]$$

が全射であることより, $\tau \in A[\lambda^\infty]$ が任意であったことを踏まえて f_2 が定数となり, f_2 を定数でないとしていたことに反する. □

この基本的な線形独立性を基にして, 次の線形独立性を証明する.

Proposition 5.6. $f_i \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$, $c_i \in \mathcal{O}_{K,\lambda}$ $(i = 1, \ldots, m)$ として, c_i が次を満たすとする.
Hyp

$$\alpha c_i = \beta c_j,\ i \neq j \text{ が } \alpha, \beta \in \mathcal{O}_K \text{ で成立すれば } \alpha = \beta = 0$$

この時,

$$F := \sum_{i=1}^{m} f_i \circ c_i : A[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

が $F = 0$ であれば, $f_i \in K_0$.

初めに, 次の補題を準備する.

Lemma 5.7. $f_i \in \mathcal{F}_{K_0,A}$, $i = 1, \ldots, m$ に対して定まる

$$F := \sum_{i=1}^{m} f_i \circ \Phi_i : A^n[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

$(\Phi_i : A^s \longrightarrow A$ は任意の K_0 上定義される同種写像 $)$, が *Zariski* 稠密なところで $F = 0$ であれば, F は恒等的に 0.

Proof. (補題の証明)
F は ng 変数の $\mathcal{O}_{K_0,v_0}$ 係数の形式的べき級数である. ここで, v_0 は ι_l によって定まる l 上の K_0 における素点とした. 素点 v_0 に関する素元 π_0 とする.
Weierstrass 準備定理により

$$F = \pi_0^c UG$$

, U: 可逆なべき級数, G: ng 変数の多項式, $c \in \mathbb{Z}$ と記述できる. したがって, F の $A^n[\lambda^\infty]$ におけるゼロ集合は G の $A^n[\lambda^\infty]$ におけるゼロ集合と一致する. このことと, G が A 上の有理函数体の元で Zariski 連続性を持つことから, F が $A^n[\lambda^\infty]$ の Zariski 稠密なところで零であれば, $A^n[\lambda^\infty] \subset A(\overline{\mathbb{Q}})$ の Zariski 稠密性から F は恒等的に零となる. □

Proof. (命題の証明)
命題の証明に戻る. 初めに, $M \subset \mathcal{O}_{K,\lambda}$ を $c_1, \ldots, c_n$ を含むような有限生成自由 $\mathcal{O}_K$ 加群であるとする. このような加群は次のようにして構成される.
初めに, M_0 を $\mathcal{O}_{K,(\lambda)}$ 上 $c_1, \ldots, c_n$ で生成されるような自由 $\mathcal{O}_{K,(\lambda)}$ 加群とする. この $\mathcal{O}_{K,(\lambda)}$ 加群としての基底を $e_1, \ldots, e_s$ と記述すると,

$$M := \mathcal{O}_K \cdot e_1 + \cdots + \mathcal{O}_K \cdot e_s$$

と定めれば e_i, $i = 1, \ldots, s$ は $\mathcal{O}_K$ 加群としての基底をなすので, これをとればよい. 以下, $e : A[\lambda^\infty] \longrightarrow A^s[\lambda^\infty]; x \mapsto (e_i x)_{i=1}^s$ とする. また,

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} e_j \alpha_{ji}$$

として, $\alpha_{ji} \in \mathcal{O}_K$ を定める.

$$\begin{tikzcd}
A[\lambda^\infty] \arrow[r, "e"] \arrow[dr, bend right, "c_i"'] & A^s[\lambda^\infty] \arrow[d, "\Phi_i"] \\
& A[\lambda^\infty]
\end{tikzcd}$$

という可換図式が成立するように,

$$\Phi_i((P_j)_j) := \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ji} P_j$$

と定義する. まず, e の構成法から,

$$e : A[\lambda^\infty] \longrightarrow A^s[\lambda^\infty]$$

の像が Zariski 稠密である．実際, Schneps[Sch87] の補題 1, 補題 2, 補題 3 から次の補題が従う．

Lemma 5.8. $A^n(\overline{\mathbb{Q}})$ の部分群の *Zariski* 閉包はアーベル部分多様体 H を与え, H が非自明な閉部分群スキームであれば, ある非自明な射

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \circ pr_i : A^s \longrightarrow A$$

が取れて, $H \subset \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Proof. (補題の証明)
最初の主張は乗法, 逆の Zariski 連続性から従う．この H により, あるアーベル多様体 A^s/H がとれて

$$H(\overline{\mathbb{Q}}) \hookrightarrow A^s(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow A^s/H(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0$$

がアーベル群の完全列となる群スキームの射 $A^s \longrightarrow A^s/H$ が取れる.([Po03] の 9.5 節参照．)
2 番目の主張を示す.

$$\iota_i : A \longrightarrow A^s$$

を i 番目の直積成分への埋め込みとすると, 仮定より,

$$Im(\iota_i) \not\subset H$$

なる i が存在する.

$$\tau : A \xrightarrow{\iota_i} A^s \longrightarrow A^s/H$$

を合成とする．この時, 仮定より τ は非自明な射であり, 双対射 $\tau^\vee$ を考えれば,

$$A^s \longrightarrow A^n/H \longrightarrow (A^s/H)^\vee \xrightarrow{\tau^\vee} A^\vee \longrightarrow A$$

が与えられる．中央の射はアーベル多様体 A^s/H の偏極構造による射で, 右端の射は A の偏極構造による射の双対射である．これは, 非自明な射 Φ を定めており核に H を含んでいる.

$$\Phi : A^s \longrightarrow A$$

の記述に関して,

$$\Phi(Q_1, \ldots, Q_s) = \sum_{i=1}^{s} \Phi \circ \iota_i(Q_i) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(Q_i)$$

, $\alpha_i \in \mathcal{O}_K \simeq \mathrm{End}(A)$ と書けるのは良い. □

この補題 5.8 から, もし e の像が Zariski 稠密でなければ, ある補題のような非自明射 Φ が取れて,

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_s e_s = 0$$

が $\alpha_i \in \mathcal{O}_K$ に対して成立する．これは, e_i が自由 $\mathcal{O}_K$ 加群の基底であったことに反する.
このことより, e の像が Zariski 稠密であることが従う．c_i に関する仮定から, $i \neq j$ に対して次が成立している.

$$\alpha \circ \Phi_i = \beta \circ \Phi_j \Rightarrow \alpha\Phi_i \circ e = \beta\Phi_j \circ e \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

, $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$. 先の補題 5.7, 命題 5.4 と組み合わせて, f_i が定数, すなわち $f_i \in K_0$. □

この章の最後に, Raynaud[Ray83], MacQuillan[Mc95], Hrushovsky[Hru01] により証明された予想である Manin-Mumford 予想から従うある種の剛性を記述する．一般の標数 0 体 k 上のアーベル多様体に関して次の結果が知られている.

Theorem 5.9. A を標数 0 体 k 上 2 次元以上のアーベル多様体であるとする．また, Γ を, ある $A(\overline{k})$ の有限生成部分群 M に関する可徐包絡の部分群[14]とする．C を A の既約な閉部分スキームとする．この時, $V := \overline{C \cap \Gamma}$ を C と A の部分群 Γ の交叉に関する *Zariski* 閉包とする．すると,

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

, C_i は A の閉部分アーベル多様体の Γ の元による平行移動で定まるような, ある閉部分多様体.

この定理より, 次の命題が従う.

[14] すなわち, 任意の $x \in \Gamma$ は, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $nx \in M$ となる.

Proposition 5.10. 任意の $c_i \in \mathcal{O}_{K,\lambda}$, $f_i \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ $(i=1,\dots,m)$ に対して

$$F := \sum_{i=1}^{m} f_i \circ c_i : A[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

が, 無限の相異なる $A[\lambda^\infty]$ の点で 0 となるとき $F=0$ が成立する.

Proof. F のゼロ集合 Z について, 補題 5.7 と同様にして Z は $A[\lambda^\infty]$ において, Zariski 閉であることがわかる. さらに, F は有限次代数体を l 進完備化したものの上で定義されるので, Z の A における閉包 $\overline{Z}$ はネータ的であり, 有限個の既約成分を持つ. したがって, 定理 5.9 を $M=0, \Gamma = A^m[\lambda^\infty], V=\overline{Z}$ に対して適用することで, 次の表示を得る.

$$Z = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$$

, ここで C_i は $\mathcal{A}$ の非自明な閉部分アーベル多様体を $A[\lambda^\infty]$ の元により平行移動したものと $A[\lambda^\infty]$ の交叉. A が単純アーベル多様体であったので, この非自明な閉部分アーベル多様体は $\{0\}$ であり, Z は有限集合となる. □

さて, これらの線形独立性に関する結果を基にして, 形式函数に付随する測度の Mellin 変換に関する, ある性質を証明する.

§5.2 Mellin 変換に関する性質

この節では, 線形独立性の結果を基にして Mellin 変換に関する性質を得る. ここで初めて, K_0 という係数の取り方が意味を持ってくる.

Proposition 5.11. $\alpha = \alpha_f$ を $f \notin \overline{\mathbb{Q}}$, $f \in \mathcal{F}_{K_0,A}$ に付随する $\mathbb{Z}_l^g$ 上の測度であるとする. α が次の仮定を満たすとする.
Hyp

$$\alpha \circ c = \alpha$$

が任意の $c \in \mu_K$ で成立する.
この時, 高々有限個を除く任意の $\kappa \in \mathrm{Hom}((1+l\mathbb{Z}_l)^g, \mathcal{O}_{J_f}^\times)$ に対して, 次が成立する.

$$M_\alpha(\kappa) \neq 0$$

Proof. まず, β を次のような測度とする.

$$\beta = \sum_{c \in \mu_{l-1}^g/\mu_K} \alpha \circ c.$$

すると, β の Mellin 変換は

$$\begin{aligned} M_\beta(\kappa) &= \sum_{c \in \mu_{l-1}^g/\mu_K} \int_{(1+l\mathbb{Z}_l)^g} \kappa(\sigma) d\alpha \circ c(\sigma) \\ &= \frac{1}{w_K} \int_{(\mathbb{Z}_l^\times)^g} \kappa(a) d\alpha(a) \\ &= \frac{1}{w_K} M_\alpha(\kappa) \end{aligned}$$

と記述される. したがって $M_\beta(\kappa) \neq 0$ が高々有限の指標 κ に対して成立することを示せばよい. そこで, 次の補題を用いる.

Lemma 5.12. $J_f = k_f(\mu_{l^\infty})$, k_f は p 進体であったが, 必要に応じて k_f を拡大することで, 次が満たされるようにする.

1. $k_f(\mu_l, A[l]) = k_f$,
2. $f \in K_0[[t]]$ は ι_p により $f \in k_f[[t]]$ を定める.

k_f に含まれる 1 の l べき乗根が μ_{l^M} をなすとする. また, $y \in (1+l\mathbb{Z}_l)^g$ に対して

$$\beta_y := \beta|_{y(1+l^M\mathbb{Z}_l)^g}$$

とする.

$$\kappa \in \mathrm{Hom}((1+l\mathbb{Z}_l)^g, \mathcal{O}_{J_f}^\times)$$

が $ker(\kappa) = (1+l^{m_1+M}\mathbb{Z}_l, \dots, 1+l^{m_g+M}\mathbb{Z}_l)$, $m_i \geq M$ $(i=1,\dots,g)$ を満たすときに,

$$M_\alpha(\kappa) = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{Z}_l^g} \zeta_\kappa^{x/y} d\beta_y(x) = 0$$

ここで, $\zeta_\kappa \in \mu_{l^\infty}^g$ は

$$(\kappa_1(1+l^{m_1}),\dots,\kappa_g(1+l^{m_g})) = (\zeta_1^{l^{m_1}},\dots,\zeta_g^{l^{m_g}})$$

となるように与えられる. また, $y \in (1+l\mathbb{Z}_l)^g$ は任意.

暫く, この補題を認めて証明をする.
初めに,

$$\int_{\mathbb{Z}_l^g} \zeta^{x/y} d\beta_y(x) = 0$$

が成立するような $\zeta \in \mu_{l^\infty}^g$ 全体を $C \subset \mu_{l^\infty}^g$ とする.
β の定義から,

$$\sum_{c\in\mu_{l-1}^g/\mu_K} \int_{\mathbb{Z}_l^g} \zeta^{x/c} d\alpha|_{cy(1+l^M\mathbb{Z}_l)}(x) = 0$$

, $\zeta \in C$: 任意, に対して成立する. ここで, $\alpha_{cy} := \alpha|_{cy(1+l^M\mathbb{Z}_l)}$ も形式函数に付随する測度であることに注意し, 付随する形式函数 f_{cy} と記述する. この時, 次のことが従う.

$$\sum_{c\in\mu_{l-1}^g/\mu_K} f_{cy}(\delta(\zeta^{c^{-1}})) = \sum_{c\in\mu_{l-1}^g/\mu_K} f_{cy}([c^{-1}](\delta(\zeta))) = 0$$

, $\zeta \in C$ は任意で成立.
今, C が無限集合であるとする.
すると, 先の剛性に関する命題 5.10, および命題 5.6 により $f_{cy} \in \overline{\mathbb{Q}}$ が任意の $c \in \mu_{l-1}^g/\mu_K, y \in (1+l\mathbb{Z}_l)^g$ で成立する. したがって, $\alpha = \sum_{c,y}\alpha_{cy}$ という有限和で記述できることから, $\alpha_f = \alpha$ で定まる f に対して

$$f \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

これは仮定に矛盾する.
このことから, C は高々有限集合であることが従う.
補題より C は次のような集合である.

$$C = \{\zeta \in \mu_{l^\infty}^g \mid \zeta = \zeta_\rho \text{となる } \rho \in \mathcal{X} \text{ が存在して } M_\alpha(\rho) = 0\}.$$

他方,

$$V := \{\rho \in \mathcal{X} \mid \ M_\alpha(\rho) = 0\}$$

を考える. この時, 次の補題が示される. この補題と C が有限集合であることから, V が有限であることがわかり, 命題が従う.

Lemma 5.13. *V が無限集合であれば, C も無限集合.*

一般の場合も同様なので $g=1$ として議論する. 初めに $m \geq 1$ で, $d_m \in 1+l\mathbb{Z}_l$ という l と互いに素な元を,

$$d_m = \frac{\log_l(1+l^m)}{l^{m-1}\log_l(1+l)} = (1+\frac{l^m}{2}+\cdots)^{-1}$$

とする. この時, $(1+l)^{d_m l^{m-1}} = (1+l^m)$ となる. したがって, 各 $\rho \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Ker}(\rho) = 1+l^{m+M}\mathbb{Z}_l$ に対して

$$\rho(1+l^m) = \zeta_\rho^{l^m} = \rho(1+l)^{l^{m-1}d_m}$$

, つまり $\zeta_\rho^l = \rho(1+l)^{d_m}$ が成立しているように ζ_ρ が選べる. 従って, もし $\rho \in V$ が無限集合であれば, ζ_ρ, $\rho \in V$ も無限集合であるので補題が従う.

□

以下, 認めていた補題の証明をする. この補題は, Lamplugh[Lam15] の補題 5.2 と同様にして示す.

Proof. (補題 5.12 の証明)
以下では, $N := \max\{m_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ とする．まず, k_f の取り方から $\mu_l, A[l]$ は k_f 上有理的, すなわち $\sigma \in \mathrm{Gal}(J_f/k_f)$ が自明に作用していた．従って,

$$\begin{aligned}
(\int_{\mathbb{Z}_l^g} \zeta_\kappa^x d\beta(x))^\sigma &= \sum_{c\in\mu_{l-1}^g/\mu_K} (\int_{\mathbb{Z}_l^g} (\sum_{\zeta\in\mu_l^g} \zeta^x \zeta_\kappa^{x/c} d\alpha(x)))^\sigma \\
&= \sum_{c\in\mu_{l-1}^g/\mu_K} (\sum_{\zeta\in\mu_{l^\infty}^g} \int_{\mathbb{Z}_l^g} (\zeta\zeta_\kappa^{1/c})^x d\alpha)^\sigma \\
&= \sum_{c\in\mu_{l-1}^g/\mu_K} (\sum_{\zeta\in\mu_{l^\infty}^g} f(\delta(\zeta\zeta_\kappa^{1/c})))^\sigma \\
&= \int_{\mathbb{Z}_l^g} \zeta_\kappa^{\chi_A(\sigma)x} d\beta(x)
\end{aligned}$$

が $\sigma \in \mathrm{Gal}(J_f/k_f)$, $\underline{\zeta}$: 原始 1 の l^{N+m_i} 乗根で $i = 1, \ldots, g$ としたもののペアに対して成立する．ここで, $\chi_A : \mathrm{Gal}(J_f/k_f) \longrightarrow \mu_{l^\infty}^g$ は $\mathrm{Gal}(J_f/k_f)$ の $A[\lambda^\infty]$ への作用が定める準同型.
従って, 特性函数を用いて $M_\beta(\kappa)$ を計算することで

$$M_\beta(\kappa)^\sigma = \frac{\kappa^\sigma(\chi_A(\sigma))}{\kappa^\sigma(\chi_\mu(\sigma))} M_\beta(\kappa^\sigma)$$

が成立する．ここで, $\chi_\mu : \mathrm{Gal}(J_f/k_f) \longrightarrow \mu_{l^\infty}^g$ は $\mu_{l^\infty}^g$ への $\mathrm{Gal}(J_f/k_f)$ の作用が定める準同型.
従って,

$$M_\beta(\kappa)^\sigma = 0 \Rightarrow M_\beta(\kappa^\sigma) = 0$$

が $\sigma \in \mathrm{Gal}(J_f/k_f)$ に対して成立する．今, $N = \max_i\{m_i\}$ と J_f/k_f の N-th layer k_N に対する $H := \mathrm{Gal}(k_N/k_f)$ として次が成立する．

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in H} \kappa^\sigma(y)^{-1} M_\beta(\kappa^\sigma) &= \sum_{\sigma\in H} \kappa^\sigma(y)^{-1} \int_{(1+l\mathbb{Z}_l)^g} \kappa^\sigma(x) d\beta(x) \qquad (1) \\
&= \sum_{\sigma\in H} \int_{(1+l\mathbb{Z}_l)^g} \kappa^\sigma(\frac{x}{y}) d\beta(x) \\
&= \int_{(1+l\mathbb{Z}_l)^g} tr_{k_N/k_f}(\kappa(\frac{x}{y})) d\beta(x)
\end{aligned}$$

ここで, 次が成立する．

$$tr_{k_N/k_f}(\kappa(x/y)) = \begin{cases} l^N \kappa(x/y) & (\kappa(x/y) \in k_f) \\ 0 & (\kappa(x/y) \notin k_f) \end{cases}$$

また, m_i, $i = 1, \ldots, g$ の定義より次が成立する．

$$tr_{k_N/k_f}(\kappa(x/y)) \neq 0 \Leftrightarrow x \in y((1 + l^{m_1}\mathbb{Z}_l)\times, \ldots, (1 + l^{m_g}\mathbb{Z}_l))$$

以上のことから $M_\alpha(\kappa) = 0$ の時, $M_\beta(\kappa) = 0$ であることに注意して (1) の右辺は

$$l^N \int_{y((1+l^{m_1}\mathbb{Z}_l)\times\ldots\times(1+l^{m_g}\mathbb{Z}_l))} \kappa(x/y) d\beta(x) = 0$$

と一致する．さて, $\underline{x} := (x_1, \ldots, x_g) = \underline{y}(1 + l^{m_1}z_1, \ldots, 1 + l^{m_g}z_g)$ で

$$z_1, \ldots, z_g \in \mathbb{Z}_l$$

とする．この時,

$$\begin{aligned}
\kappa(x/y) &= \kappa(1 + l^{m_1}z_1, \ldots, 1 + l^{m_g}z_g) \ (m_i \geq M) \\
&= \kappa_1(1 + l^{m_1})^{z_1} \cdots \kappa_g(1 + l^{m_g})^{z_g} \\
&= \zeta_{\kappa,1}^{l^{m_1}z_1} \cdots \zeta_{\kappa,g}^{l^{m_g}z_g} \\
&= (\zeta_{\kappa,1}, \ldots, \zeta_{\kappa,g})^{-1} \zeta_\kappa^{x/y}
\end{aligned}$$

が成立する．従って，

$$\int_{y((1+l^{m_1}\mathbb{Z}_l)\times\cdots\times(1+l^{m_g}\mathbb{Z}_l))}\kappa(x/y)dx=0\Leftrightarrow\int_{y(1+l^{m_1})\mathbb{Z}_l\times\cdots\times(1+l^{m_g}\mathbb{Z}_l)}\zeta_\kappa^{x/y}d\beta(x)=0$$

. y を yt, $t\in((1+l^M\mathbb{Z}_l)^g)/y((1+l^{m_1}\mathbb{Z}_l)\times\cdots\times(1+l^{m_g}\mathbb{Z}_l))$ と取り換え, ζ_κ を ζ_κ^t に取り換えても同様の主張が成立する．従って，

$$\int_{yt((1+l^{m_1}\mathbb{Z}_l)\times\cdots\times(1+l^{m_g}\mathbb{Z}_l))}\zeta_\kappa^{x/y}d\beta(x)=0$$

がこのような t に対して成立する．今, この t に対して取り換えて足し上げることで,

$$\int_{y(1+l^M\mathbb{Z}_l)^g}\zeta_\kappa^{x/y}d\beta(x)=0$$

が得られる．
逆については, [LK23] の補題 5.3, 補題 3.2 を参照. □

この命題には, Hypが課せられているが, この仮定は本質的ではない.

Corollary 5.14. 命題 *5.11* は, Hypを満たさないような, 形式函数に付随する測度に対しても成立する．また,

$$\omega\in\mathrm{Hom}(((\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times)^g,\mathcal{O}_{J_f}^\times)$$

をとったとき, 命題 *5.11* は $M_\alpha(\kappa)\neq 0$ という主張を

$$M_\alpha(\kappa\omega)\neq 0$$

に置き換えても成立する.

Proof. $\alpha=\alpha_f$ を $f\in\mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ に付随する測度とする．この α をまず次のように取り換える.

$$\alpha_{inv,\omega}:=\sum_{c\in\mu_K}\omega(c)\alpha|_{(\mathbb{Z}_l^\times)^g}\circ c$$

このようにすると, $\alpha_{inv,\omega}$ はHypをみたし,

$$M_\alpha(\omega\kappa)=w_K M_{\alpha_{inv,\omega}}(\omega\kappa)$$

が各 $\kappa\in\mathrm{Hom}((1+l\mathbb{Z}_l)^g,\mathcal{O}_{J_f})$ に対して成立することがわかる.

$$\alpha|_\omega:=\sum_{\zeta\in\mu_{l-1}^g}\omega(\zeta)\alpha_{inv,\omega}|_{\zeta(1+l\mathbb{Z}_l)^g}.$$

このように取り換えると, $\alpha|_\omega$ がHypを満たしていることがわかり, さらに

$$M_{\alpha|_\omega}(\kappa)=w_K M_\alpha(\kappa\omega)$$

が成立する．したがって命題を $\alpha|_\omega$ に適用することで補題が従う.

□

§6　L 値への応用

CM 体の Hecke L 値に関する基本事項を確認する．この節では第一節と同様, K を CM 型 Σ_K の CM 体とする．また K^+ を K の最大総実部分代数体とする．$\mathfrak{g}$ を K における整イデアルとして $K(\mathfrak{g})$ を K のモジュラス $\mathfrak{g}$ である射類体とする．すなわち $I(\mathfrak{g})$ を K のイデアルで $\mathfrak{g}$ と互いに素なるものからなる群とし,

$$P(\mathfrak{g}):=\{a\in K^\times|\ a\equiv 1\mod{}^\times\mathfrak{g}\}$$

, $H(\mathfrak{g}):=I(\mathfrak{g})/P(\mathfrak{g})\simeq\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{g})/K)$.
Hecke($\mathfrak{g}$) で, 導手が $\mathfrak{g}$ を割り切る全ての代数的 Hecke 指標全体とする．この時, 標準的な完全列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}(H(\mathfrak{g}),\overline{\mathbb{Q}}^\times)\longrightarrow\mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})\longrightarrow\mathbb{Z}[\mathrm{Emb}(K\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}})]$$

が取れるので, Hecke($\mathfrak{g}$) の元と $\mathrm{Hom}(H(\mathfrak{g}),\overline{\mathbb{Q}}^\times)$ の積が定まる．ここで, 上記の短完全列の最後の射による, $\chi\in\mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})$ の像は無限型と呼ばれ, 次のようにして定める.

- **無限型**

$\chi \in \mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})$ に対して

$$\chi(a) = \prod_{\sigma \in \Sigma_K} \sigma(a)^{-\alpha_\sigma} \overline{\sigma}(a)^{\beta_\sigma}$$

が任意の $a \in K$, $a \equiv 1 \mod {}^\times \mathfrak{g}$ に対して成り立つような

$$\alpha := \sum_\sigma \alpha_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[\Sigma_K],\ \beta := \sum_{`\sigma} \beta_\sigma \overline{\sigma} \in \mathbb{Z}[\overline{\Sigma_K}]$$

が取れる．そこで, χ が定める無限型を

$$\beta - \alpha \in \mathbb{Z}[\mathrm{Emb}(K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}]$$

で定める．
ここでも, 二つの埋め込みを固定する．

$$\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}, \iota_l : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_l.$$

Hecke により, 各 $\chi \in \mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})$ に対し, $\chi_\infty := \iota_\infty \circ \chi$ により定まる Hecke L 函数 $L(\chi, s)$ は, 次のように定義される．

$$L(\chi, s) := \sum_{\substack{a \in I_{\mathfrak{g}} \\ a \text{ は } K \text{ の整イデアル}}} \frac{\chi_\infty(a)}{N(a)^s}$$

, ここで $\mathfrak{g}$ は χ の導手となる K の整イデアル．
χ がノルム指標のべきでなければ全複素平面に解析接続されることが知られる．したがって, $\chi \in \mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})$ がノルム指標のべきでないときに

$$L(\chi) := L(\chi_\infty, s)|_{s=0}$$

が定義できる．
$\mathfrak{f}$ を K の pl と互いに素な整イデアルとしたとき, $L_{\mathfrak{f}}(\chi, s)$, $L_{\mathfrak{f}}(\chi)$ は, それぞれ $L(\chi, s), L(\chi)$ の定義で和を走るイデアル a が $\mathfrak{f}$ と互いに素なものを走るように定義したものとする．
CM 体 K の Hecke 代数的指標 χ の無限型について Dirichlet の単数定理から次が従う．

Proposition 6.1. (Weil) $\chi \in \mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})$ は, 無限型が

$$-k\Sigma_K - \sum_{\sigma \in \Sigma_K} d(\sigma)(\sigma - \overline{\sigma})$$

, $k, d(\sigma) \in \mathbb{Z}$ となる．

CM 体 K の代数的 Hecke 指標 χ が Deligne[De79] の意味で critical とは,

$$\{(-k - d(\sigma), d(\sigma))\}_{\sigma \in \Sigma_K}$$

が Figure 1 の領域に属することである．ここで, 対角成分では偶指標か奇指標であるかで $+$, $-$ を用いている．

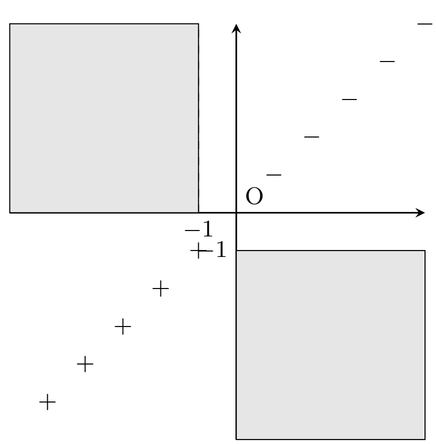

FIGURE 1. critical domain

代数的 Hecke 指標 χ が right half critical であるとは, χ の無限型が

$$k \geq 1, d(\sigma) \geq 0$$

がすべての $\sigma \in \Sigma_K$ で成立するとする．以上のことは, 次の補題に換言される．

Lemma 6.2. *Right half critical な代数的 Hecke 指標 χ の導手が $\mathfrak{f}$ を割り切れば, χ の無限型を $\beta-\alpha$, $\beta \in \mathbb{Z}[\overline{\Sigma}_K], \alpha \in \mathbb{Z}[\Sigma_K]$ としたとき, 次が成立する．ただし, $\Gamma_{\mathfrak{f}} = \{x \in \mathcal{O}_K^\times \mid x \equiv 1 \mod 1\}$ としていたことに注意する．*

$$(\beta, \alpha) \in \mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$$

以下では, このように, 常に無限型が

$$-k\Sigma_K - \sum_{\sigma \in \Sigma_K} d(\sigma)(\sigma - \overline{\sigma})$$

, $k \geq 1$ かつ $d(\sigma) \geq 0$ が任意の $\sigma \in \Sigma_K$ に対して成立するような代数的 Hecke 指標を考察する．

§6.1 CM 周期

この節における基本的な文献は, [Katz78], [OH15] である．
CM 周期 $\{\Omega_{CM,\infty}(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_K} \in (\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_F)^\times$ を定義する．CM 体 (K, Σ_K), p, l に対しては, 第一節で仮定 p-ord, l-ord, 単項性を設けており, p 上の K^+ の素点全てが $\mathbb{Q}$ 上不分岐な素点としていたことに注意する．Σ_K により,

$$\iota_{\Sigma_K} : K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}^{\Sigma_K}; a \otimes r \mapsto (\sigma(a)r)_{\sigma\in\Sigma}$$

が定義できる．これを用いて K の整数環に CM を持つようなアーベル多様体の族を構成する．
全ての成分が純虚かつ, 虚数部分が正である元 $\delta \in K \otimes \mathbb{R}$ に対して Riemann 形式

$$\langle , \rangle_\delta : \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{R} \times \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; (z, w) \mapsto \frac{w\overline{z} - z\overline{w}}{2\delta}$$

が定義できる．これにより, 偏極構造 λ_δ が

$$A(\mathcal{O}_K)^{an} := \mathbb{C}^{\Sigma_K}/\iota_{\Sigma_K}(\mathcal{O}_K)$$

上に定まり, 代数体上定義されたアーベル多様体 $A(\mathcal{O}_K)$ が構成できる．
以下では ι_{Σ_K} を省略する．
$A(\mathcal{O}_K)$ の偏極イデアルは δ に依存し, δ をうまくとることで偏極イデアル d は pl と互いに素であるとしてよい．同様にして, K の pl と互いに素な整イデアル $\mathfrak{A}$ に対し, $\langle , \rangle_\delta$ は次を誘導する．

$$\mathfrak{A} \wedge_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{A} \simeq N_{K/F}(\mathfrak{A})d^* = (N_{K/F}(\mathfrak{A})^{-1}d)^*.$$

したがって, 代数体上定義されたアーベル多様体 $A(\mathfrak{A})$ が取れ, $\langle , \rangle_\delta$ により偏極イデアル $d \cdot N_{K/F}(\mathfrak{A})^{-1}$ の偏極構造が $A(\mathfrak{A})^{an}_{/\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^\Sigma/\mathfrak{A}$ 上に定まる．
このような, K の整数環に CM を持つようなアーベル多様体 $A(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A} : pl$ と互いに素 は, 次を満たす．

Lemma 6.3. *$A(\mathfrak{A})$ に対し, K 上有限次アーベル拡大体 M で p 上全ての素点が $\mathbb{Q}$ 上不分岐なものが取れ, $A(\mathfrak{A})$ は M 上定義される．*

実際, p は仮定により $K^+/\mathbb{Q}$ で不分岐であり, 特に $K/\mathbb{Q}$ でも不分岐．志村-谷山 [ST61] が証明した CM 付きアーベル多様体の主定理から, 定義体に p 上不分岐な代数体が取れることが従う[15].
これを踏まえて, 第一節で構成したようにして必要であれば M を取り換えることで, $A(\mathfrak{f})$ の $R = \mathcal{O}_{M,(v_l)}$ 上定義される Neron モデルを $\mathcal{A}(\mathfrak{f})_{/R}$ とかくことにする．ただし, $\mathfrak{f}$ は pl と互いに素な K の整イデアルとしていた．
ここで, pl と互いに素な $\mathfrak{A}$ に対して,

$$S \mapsto \mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{A}(\mathfrak{f})(S)$$

という R 代数から集合への関手が定まる．ここで, テンソルは $\mathcal{O}_K$ 加群としてのテンソルをとる．これは R 上のアーベルスキームで表現可能であることが知られる ([KS24] の四節を参照).
そこで, このアーベルスキーム $\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})$ とする．この R 上定義されたアーベルスキームの族 $\{\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})_{/R} \mid \mathfrak{A} : pl$ と互いに素 $\}$ に対して, $\omega_{\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R}$ の大域切断に関する R 加群の基底を定義する．

[15]CM 付きアーベル多様体の主定理は Field of moduli M が K 上不分岐であることを示す．Milne[Mil72] により, 定義体を M に取れることが知られることに注意する．

初めに $\mathcal{A}(\mathfrak{f})$ に関して, $\omega_{\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R}$ の大域切断に関する R 加群としての基底 ω を第一節と同様にとる. ここで, 標準的なペアリング

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \times \omega_{\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R} \longrightarrow R$$

が取れ, 第三節の冒頭と同様にして

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \times \omega_{\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R} \longrightarrow \mathcal{O}_K \otimes R(\Sigma)$$

が取れる. ここで $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K, \mathbb{Z}) \otimes R \simeq \mathcal{O}_K \otimes R$ は p が $K/\mathbb{Q}$ で不分岐であることから従う. また, $\mathcal{O}_K \otimes R(\Sigma)$ は $\mathcal{O}_K$ の作用が Σ を経由するような $\mathcal{O}_K \otimes R$ の部分 R 加群とした.
これにより, ω より

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \simeq \mathcal{O}_K \otimes R(\Sigma)$$

が定まり, 逆にこのような同型から ω が定まるので, 両者を同一視する.
各 pl と互いに素な K でのイデアル $\mathfrak{A}$ に対して,

$$\mathrm{Lie}(\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \simeq \mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \otimes_R \mathfrak{A} \simeq \mathcal{O}_K \otimes R(\Sigma)$$

が定まる. ここで, $\mathfrak{A}$ が pl と互いに素なことを踏まえて, 二番目の同型は ω によって定まる

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{A} \simeq \mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \simeq \mathcal{O}_K \otimes R(\Sigma)$$

とした.
この同型により定まる $\omega_{\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R}$ の R 加群としての基底を $\omega(\mathfrak{A})$ と定める.
$\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ によって基底変換することで $\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})_{/M}$ は $\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})_{/\mathbb{C}}$ に係数拡大され, 複素 Lie 群 $(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f}))^{\mathrm{an}}$ が取れる. したがって短完全列

$$0 \longrightarrow \pi(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})) \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})) \longrightarrow (\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f}))^{\mathrm{an}} \longrightarrow 0$$

が従う.
すると, $\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})_{/\mathbb{C}}$ に関して微分形式の層 $\omega_{\mathfrak{A}\otimes A(\mathfrak{f}))/\mathbb{C}}$ の大域切断に関する $\mathbb{C}$ 上の基底 $\omega_{\mathrm{trans}}(\mathfrak{A})$ で,

$$\omega_{\mathrm{trans}}(\mathfrak{A}) : \mathrm{Lie}(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})/\mathbb{C}) \simeq \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}(\Sigma)$$

, $\omega_{\mathrm{trans}}(\pi(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f}))) = \mathfrak{A}\mathfrak{f}$ となるものがとれる[16].

Definition 6.4. $\mathfrak{A}$ を pl と互いに素な K の整イデアルとする. *CM* 周期 $\{\Omega_{CM,\infty}(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma} = \Omega_{CM,\infty} \in (\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}(\Sigma))^\times$ を次で定義する.

$$\omega(\mathfrak{A}) = \Omega_{CM,\infty} \cdot \omega_{\mathrm{trans}}(\mathfrak{A})$$

Remark 6.5. $\Omega_{CM} := \Omega_{CM,\infty}$ は $\mathfrak{A}$ の取り方には依らず ω と ι_∞ のみに依存する ([Katz78], [OH15] 参照).

§6.2 部分 Fourier 変換 · 局所因子

この節における基本的な文献は [Katz78] と [KS24] である.
χ を right half critical な代数的 Hecke 指標であるとし, 前節のように無限型を $\beta - \alpha$, $\beta \in \mathbb{Z}[\overline{\Sigma}_K], \alpha \in \mathbb{Z}[\Sigma_K]$ と記述する.
以降の節では χ の導手は $\mathfrak{f}\lambda^\infty$ を割り切るものとする. ここで $\mathfrak{f}$ は pl と互いに素な K の整イデアルとした.
χ の導手における λ べき部分

$$\prod_{v\in\Sigma_l} v^{a_v}$$

, $a_v \geq 0$ とする.
この時, χ は次の準同型を定める.

$$\chi : I_K^{(\mathfrak{f}l)} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

, $I_K^{(\mathfrak{f}l)}$ は K の分数イデアルで $\mathfrak{f}l$ と互いに素なもののなす群. この像は l 進整, すなわち

$$\chi : I_K^{(\mathfrak{f}l)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}^\times$$

を与える. $P_K^{(\mathfrak{f}l^n)}$ を $K^\times$ の元で $\mod {}^\times \mathfrak{f}l^n$ で 1 と合同なもののなす群とする. すると

$$\chi(P_K^{(\mathfrak{f}l^n)}) \subset 1 + l^n \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$$

[16] $\pi(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})) = H_1((\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f}))(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}_K} H_1(A(\mathfrak{f})(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{A}\mathfrak{f}$ が成立することに注意する.

が十分大きな n に対して成立する．したがって, 連続表現

$$\chi : \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f}l^\infty)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}^\times$$

が定まる．この表現は, Artin 写像が与える全射

$$\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f}l^\infty))$$

と合成することで, $\chi : \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}^\times$ を定める．ここで,

$$\chi_f : (\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l)^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times \subset \mathbb{C}_l^\times$$

を χ の有限部分が定める局所定数函数とする．すなわち,

$$\chi_f(a) = \frac{\chi((a))a^\alpha}{\overline{a}^\beta}$$

, $a \in \mathcal{O}_K$: $l\mathfrak{f}$ と互いに素 として定まる χ_f を $(\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l)^\times$ に拡張したもの．
以下で考察するのは特に, 次の条件を満たすものである．

- **χ の条件**

χ の有限部分が

$$\chi_f : (\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma_K))^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

を経由する．
ここで, $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma_K)$ は CM 型 Σ_K と ι_l より定まる素点集合 Σ_l の元で $\mathcal{O}_K$ を完備化したものの直和[17].
この χ_f より次の二つの局所定数函数を定義する．

$$F_\chi, \widetilde{F_\chi} : \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}.$$

これらの写像は, χ_f^{-1} の拡張で与える．
まず, $\widetilde{F_\chi}$ については, 零写像で拡張することで定義する．F_χ への拡張に関しては局所的な議論を要する．
次の分解を考える

$$(\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma_K))^\times \simeq \prod_{v \in \Sigma_l} \mathcal{O}_{K,v}^\times.$$

これより χ_f^{-1} から $\mathcal{O}_{K,v}^\times$ 上の指標が誘導されるが, 以下ではこれを $\chi_{f,v}^{-1}$ と呼ぶ．
$\chi_{f,v}^{-1}$ の $\mathcal{O}_{K,v}$, $v \in \Sigma_l$ への拡張を

$$\begin{cases} 0 \text{ 拡張} & (\chi_{f,v}^{-1} \text{ が非自明}) \\ 1 & (\chi_{f,v}^{-1} = 1) \end{cases}.$$

により定める．この拡張によって $F_\chi : \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma_K) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ を定義する．
このような, 局所定数函数

$$\phi : \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma_K) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

の部分 Fourier 変換を, 次のように定義する．

$$P\phi : \lambda^{-n}/\mathcal{O}_K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}; a \mapsto \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} \exp(-2\pi i tr(xa))\phi(x) d\mu_{Haar}(a)$$

で定義する．ここで, n は ϕ が mod λ^n によらないように十分大きくとり, μ_{Haar} は $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 上の正規化された Haar 測度とした．また, $tr : \mathcal{O}_{K,\lambda} \simeq \mathbb{Z}_l^g \longrightarrow \mathbb{Z}_l$ は, 直和因子の和をとることによる．ここで, l は $K/\mathbb{Q}$ で完全分解していることを $\mathcal{O}_{K,\lambda} \simeq \mathbb{Z}_l^g$ で用いた．
この $P\phi$ は,

$$\lambda^{-n} \otimes \mathbb{Z}_l \longrightarrow \lambda^{-n}/\mathcal{O}_K$$

という自然な射影で引き戻して $\lambda^{-n} \otimes \mathbb{Z}_l$ 上の函数と見なす．
すると, $\mathfrak{A}$ が K の整イデアルで l と互いに素なものとすれば,

$$\lambda^{-n}\mathfrak{A}\mathfrak{f} \otimes \mathbb{Z}_l = \lambda^{-n} \otimes \mathbb{Z}_l$$

であるので, 次が定まる．

$$P^{\mathfrak{A}}\phi : \lambda^{-n}\mathfrak{A}\mathfrak{f}/\mathfrak{A}\mathfrak{f} \simeq \lambda^{-n}/\mathcal{O}_K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

[17] [KS24] の定義に従うと, ここは Σ_K ではなく, $\overline{\Sigma}_K$ になるが, これは, [KS24] の局所因子の定義における誤植と考えられる．[Katz78] の定義を参照

, ただし $\mathfrak{A}$: $\mathcal{O}_K$ の整イデアルで pl と互いに素.
特に, $\lambda^{-n}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\Omega_{CM,\infty}/\mathfrak{A}\mathfrak{f}\Omega_{CM,\infty} \simeq \lambda^{-n}\mathfrak{A}\mathfrak{f}/\mathfrak{A}\mathfrak{f}$ と, $\omega(\mathfrak{A})$ による一意化

$$\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{f})(\mathbb{C})^{\mathrm{an}} \simeq \mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})(\mathbb{C})^{\mathrm{an}} \simeq \mathbb{C}^{\Sigma}/\mathfrak{A}\mathfrak{f}\Omega_{CM,\infty}$$

を踏まえて, 部分 Fourier 変換 $P\phi$ は $(\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{f}))[\lambda^n]$ 上定義される.

$$P^{\mathfrak{A}}\phi : (\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{f}))[\lambda^n] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}.$$

さて, 局所因子を定義する.

Definition 6.6. 上述のような K の代数的 *Hecke* 指標 χ に対して, 導手 $\mathrm{cond}(\chi)$ を次のように分解する.

$$\mathrm{cond}(\chi) = (a)\mathfrak{A}$$

, ここで $a \in K$, $\mathfrak{A}$ を l と互いに素な K のイデアル. この時, χ の局所因子を次のようにして定義する.

$$\mathrm{Local}(\chi;\Sigma) := \frac{PF_{\chi}(a^{-1})a^{\alpha}}{\chi(\mathfrak{A})a^{\beta}}$$

局所因子の基本的な性質として, 次が成立する.

Lemma 6.7. 局所因子は, 導手の分解によらず定義され, 常に 0 にはならない.

Proof. まず, 局所因子について次のように分解される.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Local}(\chi;\Sigma_K) &= \frac{a^{\alpha}}{\chi(\mathfrak{A})a^{\beta}} \times \int_{(\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_l)^2} F_{\chi}(x)\exp(-2\pi i tr(a^{-1}x))d\mu_{Haar}(x) \\
&= \frac{a^{\alpha}}{\chi(\mathfrak{A})a^{\beta}} \prod_{v\in\Sigma_l} \int_{O_{F,v}} \chi_{f,v}^{-1}(x) \times \exp(-2\pi i tr(-a^{-1}x))d\mu_{Haar,v}(x) \\
&= \frac{a^{\alpha}}{\chi(\mathfrak{A})a^{\beta}} \prod_{v\in\Sigma_l^{\mathrm{ram}}} \int_{O_{F,v}^{\times}} \chi_{f,v}^{-1}(x)\exp(-2\pi i tr(a^{-1}x))d\mu_{Haar,v}(x)
\end{aligned}$$

ここで, Σ_l^{ram} は χ が分岐する Σ_l の素点, すなわち $a_v \geq 1$ となる $v \in \Sigma_l$ 全体の集合.
上記の計算から, $(\mathfrak{A}, a)$ を $(t\mathfrak{A}, t^{-1}a)$, $t \in K$ は l と互いに素となるように取り換えてた場合も, 局所因子は不変であることがわかる. したがって, $(\mathfrak{A}, a)$ の取り方に $\mathrm{Local}(\chi;\Sigma_K)$ が依らないのは確かに良い.
局所因子の非消滅性は, 各 $v \in \Sigma_l^{\mathrm{ram}}$ について,

$$\int_{O_{F,v}^{\times}} \chi_{f,v}^{-1}(x)\exp(-2\pi i tr(a^{-1}x))d\mu_{Haar,v}(x)$$

が Gauss 和であることから従う. □

さて, CM 体の Hecke L 値と高次の Eisenstein 数の関係式を導出することで, 本稿の主結果である Hecke L 値の非消滅性を証明する.

§6.3 Hecke L 値の非消滅性

前節と同じように CM 体 K の critical な Hecke 指標 χ を定める. ただし, この節では χ の導手は 1 とし, $\mathfrak{f}$ は pl と互いに素である非自明な K の整イデアル. また, $\Gamma_{\mathfrak{f}} = \{x \in \mathcal{O}_K^{\times} \mid x \equiv 1 \mod \mathfrak{f}\}$. ここで, この節では次のことを仮定する.

- **類数条件**
  K の類数が 1.
- **完全分解**
  $K/\mathbb{Q}$ で l は完全分解.

この仮定のもと, 分岐素点を見ることで次の分解が生じる.

$$\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f}\lambda^{\infty})/K) \simeq \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K) \times \mathrm{Gal}(K(\lambda^{\infty})/K) \simeq \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K) \times \mathcal{O}_{K,\lambda}^{\times}/\overline{\mathcal{O}_K^{\times}}.$$

この $\overline{\mathcal{O}_K^{\times}}$ は $\mathcal{O}_{K,\lambda}^{\times}$ における $\mathcal{O}_K^{\times}$ の位相的閉包である. 最初の同型は, K の類数 1 なので $K(\mathfrak{f}) \cap K(\lambda^{\infty}) = K$ であることによる.

- **アーベルスキーム族 $\{\mathcal{A}_i\}_i$ の構成**

初めに, $\{\mathfrak{A} \mid K$ の整イデアルで $\mathfrak{f}pl$ と互いに素 $\}$ の部分集合 $\{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,\dots,h_\mathfrak{f}}$ を Artin 写像の像 $\{\sigma_{\mathfrak{A}_i}\}_{i=1,\dots,h_\mathfrak{f}}$ が $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K)$ を代表するように定める.
このようにして定めた $\{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,\dots,h_\mathfrak{f}}$ で

$$\mathcal{A}_i := \mathfrak{A}_i^{-1} \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{f})$$

とする. この右辺は前節で定義した R 上のアーベルスキーム.

- **指標群 $\mathcal{X}$ の定義**

$\mathrm{Gal}(K(\lambda^\infty)/K) \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda}^\times/\overline{\mathcal{O}_K^\times}$ の位数有限指標のなす群 $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K(\lambda^\infty)/K), \overline{\mathbb{Q}}^\times)$ とする. このような指標群は, 標準的な全射 $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times \longrightarrow \mathcal{O}_{K,\lambda}/\overline{\mathcal{O}_K^\times}$ での引き戻しにより

$$\mathcal{X} := \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K(\lambda^\infty)/K), \overline{\mathbb{Q}}^\times) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times, \overline{\mathbb{Q}}^\times)$$

という埋め込みを持つ.

以上の設定で, 本稿の主結果を証明する. これまでに仮定した条件である, (p-ord), (l-ord), (類数条件), (完全分解) の仮定をまとめて $(*)$ とする.

Theorem 6.8. *$K/\mathbb{Q}$ を CM 体. また l を, $K/\mathbb{Q}$ で不分岐な素数. K の critical な Hecke 指標 χ は, 導手が 1 とする. さらに, これらの $(K/\mathbb{Q}, l)$ は条件 $(*)$ を満たしているとする.*
この時, 高々有限個の指標を除く任意の $\rho \in \mathcal{X}$ に対して,

$$L(\chi\rho^{-1}) \neq 0$$

Proof. 素数 $p \neq l$ を, $K/\mathbb{Q}$ で p 上の素点が全て完全分解するとするものとする. このような素数は Chebotarev 密度定理から必ず存在する. pl と互いに素で非自明な K の整イデアルとして, 補助イデアル $\mathfrak{f}$ をとる. 次のことが, [KS24] により証明されている (この計算は, 本質的には Katz[Katz78] によるもの).

Lemma 6.9. *$h_\mathfrak{f}$ を $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K)$ の位数とする. また, 部分 Fourier 変換 $P^i := P^{\mathfrak{A}_i^{-1}}$ とし, $x_i \in \mathcal{A}_i[\mathfrak{f}]$ を*

$$x_i := \theta_i(\Omega_{CM} + \mathfrak{f}\mathfrak{A}_\mathrm{i}{}^{-1}\Omega_{CM})$$

で定義する. ここで, θ_i は $\omega(\mathcal{A}_i)$ により定まる一意化 $A_i^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\Omega_{CM}$.
さらに, $f_{[c]}^i$ を $\mathcal{A}_i$ に対して定義した $f_{[c]}$ とする. この時, 次の等式が成立する.

$$\begin{aligned}&\frac{(\alpha-1)!(2\pi i)^{|\beta|}}{{\Omega_{CM}}^{\alpha}{\Omega_{CM}^\vee}^{\beta}}\mathrm{Local}(\chi\rho^{-1},\Sigma)(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}))\prod_{v\in\Sigma_l}(1-\frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)})L_\mathfrak{f}(\chi\rho^{-1})\\ &= \sum_{i=1}^{h_\mathfrak{f}}\chi(\mathfrak{A}_i)\sum_{s_i\in\mathcal{A}_i[\lambda^n]}P^i\widetilde{F_{\chi\rho^{-1}}}(s_i)EK^{\beta,\alpha-1}_{\Gamma_\mathfrak{f},\mathcal{A}_i}(f^i_{[c]}, x_i+s_i)\end{aligned}$$

, ここで $|\beta| := \sum_{\overline{\sigma}\in\overline{\Sigma}}\beta_{\overline{\sigma}}$ とした.

Remark 6.10. *この補題の等式は n の取り方によらない. 特に, n を多重指数 $n := (n_1, \dots, n_g)$ にした場合でも補題の等式が成立する.*

Proof. (補題の証明)
[KS24] の命題 5.27, もしくは本稿の Appendix C を参照. □

定理の証明において $\rho \neq 1$ としてよい. $(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}))\prod_{v\in\Sigma_l}(1-\frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)})L_\mathfrak{f}(\chi\rho^{-1}) \neq 0$ は, この補題により次と同値.

$$\sum_{i=1}^{h_\mathfrak{f}}\chi(\mathfrak{A}_i)\sum_{s_i\in\mathcal{A}_i[\lambda^n]}P^i\widetilde{F_{\chi\rho^{-1}}}(s_i)EK^{\beta,\alpha-1}_{\Gamma_\mathfrak{f},\mathcal{A}_i}(f^i_{[c]}, x_i+s_i) \neq 0. \quad \cdots(5)$$

この式 (5) の左辺を計算する. ここで, $c_i \in \mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ を $\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K,\lambda} \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda}$ で $\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}$ の生成元が対応する $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ の元とする. また, 多重指数 $n = (n_1, \dots, n_g)$ を次のような準同型を経由するもののうち, すべての n_i が最小となるものとする.

$$\rho : \bigoplus_{i=1}^{g}(\mathcal{O}_{K,v_{\sigma_i}}/v_{\sigma_i}^{n_i})^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

v_i は $\sigma_i \in \Sigma_K$ と ι_l が定める $\mathcal{O}_K$ での素イデアルの生成元. 記法の簡明性のため,

$$\mathcal{O}_K/\lambda^n := \bigoplus_{i=1}^{g} \mathcal{O}_{K,v_{\sigma_i}}/v_{\sigma_i}^{n_i} \simeq \bigoplus_{i=1}^{g} \frac{1}{\pi_{v_{\sigma_i}}^{n_i}} \mathcal{O}_{K,v_{\sigma i}}/\mathcal{O}_{K,v_{\sigma_i}} =: \frac{1}{\lambda^n}\mathcal{O}_K/\mathcal{O}_K$$

と記述する. また, 任意の $y=(y_1,\ldots,y_g)\in\mathcal{O}_K/\lambda^n$ に対して, $y/\pi_\lambda^n := (y_1/\pi_{v_{\sigma_1}}^{n_1},\cdots,y_g/\pi_{v_{\sigma_g}}^{n_g})\in\mathcal{O}_K/\lambda^n$ として定める. ただし, K の類数が 1 であることに注意して, $\pi_{v_{\sigma_i}}$ は v_{σ_i} を生成する $\mathcal{O}_K$ の元となるように定めた.

(5) の左辺

$$= \sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}) \sum_{s_i \in \lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}} \Big(\frac{1}{l^{|n|}} \sum_{x\in(\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^\times} \exp(-2\pi i tr(xs_i))\rho(x)\Big) EK^{\beta,\alpha-1}_{\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathcal{A}_i}(f^i_{[c]}, x_i+\widetilde{s_i})$$

$$= \frac{1}{l^{|n|}} \sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}) \sum_{s\in(\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^\times} \Big(\sum_{x\in(\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^\times} \exp(-2\pi i tr(\frac{xsc_i}{\pi_\lambda^n}))\rho(x)\Big) \times EK^{\beta,\alpha-1}_{\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathcal{A}_i}(f^i_{[c]}, x_i+\widetilde{sc_i})$$

$$= \Big(\frac{1}{l^{|n|}} \sum_{y\in(\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^\times} \rho(y)\exp(-2\pi i tr(\frac{y}{\pi_\lambda^n}))\Big) \times \Big(\sum_{i=1}^{h_f} \chi(\mathfrak{A}_i) \sum_{s\in(\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^\times} \rho(sc_i)^{-1} EK^{\beta,\alpha-1}_{\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathcal{A}_l}(f^i_{[c]}, x_i+\widetilde{sc_i})\Big)$$

$$= G(\rho)\times \Big(\sum_{s\in(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^\times} \rho(s)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{A}_i)\widehat{\partial_{\mathcal{A}_i}}^{[\alpha-1]} F_{x,\beta,[c]}(x_i;\Gamma_{\mathfrak{f}})(t)\big|_{t=\widetilde{s}}\Big)\Big) \quad \cdots(6)$$

ここで, $\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}$ が λ と互いに素なので,

$$\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,\lambda}$$

という標準的な単射が得られ, 像の $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 加群としての生成元 $c_i\in\mathcal{O}_{K,\lambda}$ とする.
二行目から三行目では, この単射により誘導される次の準同型

$$s_i \in \lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1} \hookrightarrow \lambda^{-n}\mathcal{O}_{K,\lambda}/\mathcal{O}_{K,\lambda}$$

の s_i の像を sc_i/π_λ^n と定めた. 但し, $s\in\mathcal{O}_{K,\lambda}$ は $\mathcal{O}_K/\lambda^n$ におけるクラスの代表元と考える.
$\widetilde{s_i}$, $\widetilde{sc_i}$ は, アーベル多様体 $\mathcal{A}_{i/\mathbb{C}}$ の一意化 θ_i が誘導する同型

$$\mathcal{O}_K/\lambda^n \simeq \prod_i v_{\sigma_i}^{-n_i}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\Omega_{CM}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\Omega_{CM} \simeq \mathcal{A}_i[\prod_{i=1}^{g} v_{\sigma_i}^{n_i}] \quad \cdots(7)$$

で, それぞれ $s_i, sc_i\in\mathcal{O}_K/\lambda^n$ が対応する $\mathcal{A}_i$ の等分点とする. また, $G(\rho)$ は次で定義される Gauss 和である.

$$G(\rho) := \frac{1}{l^{|n|}} \sum_{y\in(\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^\times} \rho(y)\exp(-2\pi i tr(\frac{y}{\pi_\lambda^n})) = \prod_{i=1}^{g}\Big(\frac{1}{l^{n_j}} \sum_{x\in(\mathcal{O}_{K,v_{\sigma_i}}/v_{\sigma_i}^{n_i})^\times} \rho_i(x)\exp(\frac{-2\pi i x}{\pi_{v_{\sigma_i}}^{n_i}})\Big).$$

ここで, $|n| := n_1+\ldots+n_g$ とし, $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_g):(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ とした.
三行目で $s\in(\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^\times$ を足し上げるのは, $s\notin(\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^\times$ となった場合, n の取り方と Gauss 和の性質より項が 0 となることによる. また, 三行目から四行目では $y=xsc_i$ とする. 四行目から五行目では, 命題 3.11 を用いる.
さて, ここで R 上のアーベルスキームにおける同種写像

$$\lambda_i : \mathcal{A}(\mathfrak{f}) \longrightarrow \mathcal{A}_i$$

を定める. $\mathcal{A}_i = \mathfrak{A}_i^{-1}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})$ なので,

$$\lambda_i := [\mathfrak{A}_i] : \mathcal{A}(\mathfrak{f}) \longrightarrow \mathcal{A}_i = \mathfrak{A}_i^{-1}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})$$

が R 上定義され, エタール射となる ([KS24] 命題 4.7).
この射により, $\widehat{\partial_{\mathcal{A}_i}}^{[\alpha-1]}F_{x,\beta,[c]}(x_i;\Gamma_{\mathfrak{f}})(t)$ を $\mathcal{A}(\mathfrak{f})$ 上に引き戻したもの

$$\widehat{\partial_{\mathcal{A}_i}}^{[\alpha-1]}F_{x,\beta,[c]}(x_i;\Gamma_{\mathfrak{f}})(\lambda_i(t)) := \lambda_i^*(\widehat{\partial_{\mathcal{A}_i}}^{[\alpha-1]}F_{x,\beta,[c]}(x_i;\Gamma_{\mathfrak{f}})(t))$$

を考える. $\mathcal{A}(\mathfrak{f})_{/R}$ の単位切断に沿った完備化 $\widehat{\mathcal{A}}(\mathfrak{f})_{/R}$ 上の形式函数 Θ_χ を次のように定義し, Θ_χ に付随する測度を考える.

Definition 6.11.

$$\Theta_\chi(t) := \sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{A}_i)\widehat{\partial_{\mathcal{A}_i}}^{[\alpha-1]}F_{x,\beta,[c]}(x_i;\Gamma_{\mathfrak{f}})(\lambda_i(t)) \in \Gamma(\widehat{\mathcal{A}}(\mathfrak{f}), \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}(\mathfrak{f})}})$$

として $\widehat{\mathcal{A}}(\mathfrak{f})_{/R}$ 上の構造層の大域切断を定義する.

このようにすると, Proposition3.16 により, 充分大きな自然数 N が取れ, $p^N\Theta_\chi(t) \in \mathcal{F}_{M,\mathcal{A}(f)}$ が従う. そこで, $p^N\Theta_\chi(t)$ に対して, Definition5.2 の意味で対応する $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ 上の p 進測度を α_χ とする. このような測度が構成できることは, Lemma5.3 による. 次が成立することを示す.

Lemma 6.12. *$M_{\alpha_\chi}(\rho) \neq 0$ が成立すれば, $L(\chi\rho^{-1}) \neq 0$ が成り立つ.*

Proof. (補題の証明)
$\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n \simeq \mathcal{A}(\mathfrak{f})[\prod_{i=1}^g v_{\sigma i}^{n_i}] \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathfrak{f})_{\mathrm{tors}}$ を先に与えたアーベル群の準同型 (7) とする. さらに, 次のような同型を考える.

$$\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n = \bigoplus_{i=1}^{g}(\mathcal{O}_{K,\lambda}/(\pi_{v_{\sigma i}}^{n_i})) \simeq \bigoplus_{i=1}^{g}\mathbb{Z}_l/l^{n_i}\mathbb{Z}_l \simeq \mu_{l^\infty}^g$$

最後の同型は,

$$(a_1 \mod l^{n_1}, \ldots, a_g \mod l^{n_g}) \mapsto (\exp(\frac{2\pi i a_1}{l^{n_1}}), \ldots, \exp(\frac{2\pi i a_g}{l^{n_g}}))$$

で与える. これらのアーベル群の準同型を合成したものとして

$$\delta : \mu_{l^\infty}^g \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathfrak{f})_{\mathrm{tors}}$$

を定義する. 以下では,

$$\zeta := (\exp(\frac{2\pi i}{l^{n_1}}), \ldots, \exp(\frac{2\pi i}{l^{n_g}})) \in \mu_{l^\infty}^g$$

として ζ を定義する.
式 (5), (6) により, $(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}))\prod_{v\in\Sigma_l}(1 - \frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)})L_{\mathfrak{f}}(\chi\rho^{-1}) \neq 0$ であることと, 次が成り立つことは同値.

$$G(\rho) \times \sum_{s\in(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^\times} \rho^{-1}(s)\Theta_\chi(t)|_{t=\delta(\zeta^s)} \neq 0$$

初めに, すべての $\rho \in \mathcal{X}$ に対して

$$(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}))\prod_{v\in\Sigma_l}(1 - \frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)}) \neq 0 \quad \cdots (8)$$

が成立することを示す.
まず, 任意の $v \in \Sigma_l$ をとる. この時, ある $\rho \in \mathcal{X}$ に対し,

$$N(v) - \chi\rho^{-1}(v^{-1}) = 0$$

が成立するとする. これは,

$$v^{\Sigma_K}\overline{v}^{\Sigma_K} = v^{-\beta+\alpha}\rho(v) \Leftrightarrow v^{\Sigma_K-\alpha}\overline{v}^{\beta+\Sigma_K} = \rho(v)$$

であることと同値であり, $(\beta,\alpha) \in \mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$ なので, 上式右側の等式における左辺は 1 のべき乗根にはなりえず, 矛盾が生じる. 同様にして, すべての $\rho \in \mathcal{X}$ に対して

$$Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}) \neq 0$$

が成立するので, 式 (8) が成り立つ. 従って, $\rho \in \mathcal{X}$ に対し,

$$(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}))\prod_{v\in\Sigma_l}(1 - \frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)})L_{\mathfrak{f}}(\chi\rho^{-1}) \neq 0 \Leftrightarrow G(\rho) \times \sum_{s\in(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^\times} \rho^{-1}(s)\Theta_\chi(t)|_{t=\delta(\zeta^s)} \neq 0$$

であれば, $L(\chi\rho^{-1}) \neq 0$ が成立する.
以上のことから最後に, 任意の $\rho \in \mathcal{X}$ に対して

$$M_{\alpha_\chi}(\rho) = G(\rho) \times \sum_{s\in(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^\times} \rho^{-1}(s)\Theta_\chi(t)|_{t=\delta(\zeta^s)} \quad \cdots (9)$$

が成立することが示せればよい. 一般に次の補題が成立する.

Lemma 6.13 ([LK23] 補題 3.2)**.** *α を $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 上の p 進測度とする. この時, 任意の $\rho \in \mathcal{X}$ に対して, 次が成立する.*

$$M_\alpha(\rho) = G(\rho) \times \sum_{s\in(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^\times} \rho^{-1}(s)\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} \zeta^{sx} d\alpha(x).$$

従って, 定義から α_χ がある自然数 N を用いて

$$\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} \zeta^{sx} d\alpha_\chi(x) = p^N \Theta_\chi(\delta(\zeta^s))$$

のように書けることを踏まえ, この補題 6.13 を α_χ に対して用いることで等式 (9) を得る. □

以上のことから, 定理を示すには α_χ に対して, 有限個を除くすべての $\rho \in \mathcal{X}$ について

$$M_{\alpha_\chi}(\rho) \neq 0$$

を示せばよい. このことは命題 5.11 および, その系 5.14 から従うので, 定理の主張が従う. □

この定理を Mordell-Weil 群の構造へ応用する.

§6.4 Mordell-Weil 群への応用

この節では, K を $\mathbb{Q}$ 上ガロアな CM 体とする. 前節で示した Hecke L 函数値の非消滅性 (Main Theorem A) をもとにして, Mordell-Weil 群の有限性である Main Theorem B を示す. その上で, Mordell-Weil 階数に関する次の BSD 予想の成立を仮定する.

> A_F を代数体 F 上のアーベル多様体とする. $L(A,F,s)$ をその Hasse-Weil の L 函数としたときに, これは $s=1$ へ解析接続されて
>
> $$\mathrm{ord}_{\mathrm{s=1}} L(A,F,s) = \mathrm{rk} A(F).$$
>
> ここで, rk は $\mathbb{Z}$ 加群としての階数である.

Theorem 6.14. (K,l) が *Theorem6.8* における条件 $(*)$ を満たすとする. さらに, K 上定義された単純アーベル多様体 $A_{/K}$ が次の条件を満たすものとする.

1. $A_{/K}$ は, $\mathrm{End}(A) \simeq \mathcal{O}_K$ を満たしている.
2. $A_{/K}$ は, l 上のすべての素点で通常良還元をもつ.
3. $A_{/K}$ は全ての素点で良還元を持つ.

A_K は, 付随する *CM* 型 Σ_K を定めるとし, ι_l と Σ_K より定まる l 上の素点の集合 Σ_l として

$$\lambda := \prod_{v\in\Sigma_l} v$$

で λ を定義する. $K(\lambda^\infty)/K$ の任意の有限次中間体 F に対して $A_{/F}$ で階数に関する *BSD* 予想が成り立つとする. この時 $A_{/K}$ の *Mordell-Weil* 群について次が成立する. すなわち, K の λ 外不分岐最大アーベル拡大体 $K(\lambda^\infty)$ とする. この時, $\mathbb{Z}$ 加群 $A(K(\lambda^\infty))/A(K(\lambda^\infty))_{\mathrm{tors}}$ は有限生成である.

定理の証明に入る前に, CM 体 K 上の代数体 F を定義体とし, $\mathcal{O}_K$ に CM をもつ CM 型アーベル多様体 A に関する Hasse-Weil の L 函数について議論する. 第一節 Theorem2.1 で, 次のような準同型を構成した.

$$s \in \mathbb{A}_F^\times \mapsto \frac{\alpha_s}{\mu(s)} \in K.$$

特に, K の無限素点 v_∞ に対応する埋め込み

$$v_\infty : K \longrightarrow \mathbb{C}$$

により, $\psi_{F,v_\infty} = \psi_{v_\infty} : \mathbb{A}_F^\times/F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ が定義できる. これは, 連続であり, Hecke 代数的指標となる.
さらに, 絶対ガロア群 G_F の $A[l^\infty]$ への作用が G_F^{ab} を経由することに注意しながら Neron-Ogg-Shafarevich の判定法を用いることで, ψ_{v_∞} の不分岐素点の集合と A_F が良還元を持つ素点の集合が一致することが従う.
ここで, $L(s,\psi_{v_\infty})$ を次で定義する.

Definition 6.15.

$$L(s,\psi_{v_\infty}) := \prod_v (1-\psi_{v_\infty}(\pi_v)N(v)^{-s})^{-1}$$

とする. ここで, v は ψ_{v_∞} の不分岐素点, すなわち F における有限素点 v で $\psi_{v_\infty}(\mathcal{O}_{F,v}^\times)=1$ となるものを走るとする. また, π_v は $\mathcal{O}_{F,v}$ の素元とした.

すると, Hasse-Weil の L 函数と定義した L 函数の関係として次が成立する.

$$c \times L(A, F, s) = \prod_{v_\infty} L(s, \psi_{F,v_\infty}) L(s, \overline{\psi_{F,v_\infty}})$$

となる複素数 $c \in \mathbb{C}$ が取れる. ここで v_∞ は K の無限素点全体を走るとする.
この c は $A_{/F}$ の導手 (conductor) を割り切る素点での Eular 因子の積である. 従って, $A_{/F}$ が至る所で良還元を持つ時には $c = 1$ である.
Shimura[Shi] Theorem I, Proposition 5 (虚二次体の場合), Harder[Har87] corollary 4.3.1, 及び p.87(一般の critical な Hecke 代数的指標の場合) により次のことが示されている.

Lemma 6.16. ある v_∞ に対して $L(1, \psi_{F,v_\infty}) \neq 0$ ならば, 全ての v_∞ に対して $L(1, \psi_{F,v_\infty}) \neq 0$, $L(1, \overline{\psi_{F,v_\infty}}) \neq 0$.

以上のことは次の主張にまとめられる.

Lemma 6.17. *A_F を, CM 体 K の整数環を CM にもつ代数体 $F \supset K$ 上定義された CM 型アーベル多様体とする. $A_{/F}$ が階数に関する BSD 予想を満たすとする. この時, ある K の無限素点 v_∞ に対して, $L(1, \psi_{F,v_\infty}) \neq 0$ であれば $A(F)$ は有限群である.*

以下, 特に A の定義体として K が取れるような場合を考える. すると, 第一節で固定していた $\iota_\infty \circ \tau_K : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ により K の無限素点が定まるので, これに関して $\psi_K := \psi_{\iota_\infty \circ \tau_K}$ をとれば, 無限型が Σ_K となる. したがって, $\psi_K \cdot N_{K/\mathbb{Q}}^{-1}$ は right half critical な Hecke 代数的指標となる. 以上のことを踏まえて, Theorem 6.14 を証明する.

Proof. 初めに, A を $K(\lambda^\infty)/K$ の有限次中間体 F に基底変換した A_F を考える. すると, 定義から

$$\psi_F = \psi_K \circ N_{F/K}$$

が成立する. このことから, $\Gamma := \mathrm{Gal}(F/K)$ としたときに次が成立する.

$$L(\psi_F, s) = \prod_{\rho \in \widehat{\Gamma}} L(\psi_K \cdot \rho, s)$$

, ここで $\widehat{\Gamma}$ は Γ の $\overline{\mathbb{Q}}$ に値を持つすべての位数有限指標全体とした. A が, すべての K での素点で良還元を持つことにより ψ_K は導手 1 であり, $\psi_K \cdot N_{K/\mathbb{Q}}^{-1}$ は Theorem6.8 の仮定を満たすような Hecke 代数的指標である. したがって, Theorem6.8, Lemma6.17 により,

$$\{\mathrm{ord}_{s=1}(L(A, F, s)) \in \mathbb{Z} \mid F \text{ は任意の } K(\lambda_\infty)/K \text{ の有限次中間体全体を走る.}\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が有界であることが従う. そこで, 階数に関する BSD 予想の仮定のもと,

$$\{\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} A(F) \in \mathbb{Z} \mid F \text{ は任意の } K(\lambda_\infty)/K \text{ の有限次中間体全体を走る.}\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

も有界な集合であるので, 命題が従う. □

Appendix

Appendix A -- 対称テンソル加群のなす代数 --

R を可換環とする. M を R 加群として, n 次の対称テンソルのなす加群 $TSym_R^n(M)$, $n \geq 0$ を次のようにして定義する.

Definition 6.18. *S_n を n 次の対称群とする. $M^{\otimes n} := M \otimes_R M \ldots \otimes_R M$ を M の R 上の n 回テンソルにより得られる R 加群とする. この時, $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \in M^{\otimes n}$, $\sigma \in S_n$ として*

$$\sigma \cdot a_1 \otimes \ldots \otimes a_n := a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}$$

により, S_n の $M^{\otimes n}$ への作用を定義する. この時,

$$\mathrm{TSym}_R^n(M) := (M^{\otimes n})^{S_n} = \{m \in M^{\otimes n} \mid \sigma \cdot m = m,\ \sigma \in S_n \text{ は任意.}\}$$

として R 部分加群を定義する.

このようなものから, 次数付き R 加群

$$\mathrm{TSym}_R^*(M) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{TSym}_R^n(M)$$

が定まる. この R 加群はシャッフル積と呼ばれる積で次数付き R 代数となる.

Definition 6.19. $m = m_1 \otimes \ldots \otimes m_k \in \mathrm{TSym}_R^k(M)$, $m^{'} = m_1^{'} \otimes \ldots \otimes m_l^{'} \in \mathrm{TSym}_R^l(M)$ に対して, シャッフル積を次のように定義する.

$$m \cdot m^{'} := \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \sigma(m \otimes m^{'}) \in \mathrm{TSym}_R^{k+l}(M).$$

ここで, $S_{k,l} \subset S_{k+l}$ は

$$S_{k,l} := \{\sigma \in S_{k+l} \mid \sigma(1) < \ldots < \sigma(k),\ \sigma(k+1) < \ldots < \sigma(k+l)\}$$

で定義する.

このようにして定義された, 対称テンソル加群のなす代数は, 次の分解公式を満たす.

Lemma 6.20. M, N を平坦 R 加群とする. この時, $n \geq 0$ に対し, 次が成立する.

$$\mathrm{TSym}_R^n(M \oplus N) \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{TSym}_R^k(M) \otimes_R \mathrm{TSym}_R^{n-k}(N).$$

この同型は, 右辺から左辺へ, シャッフル積をとることにより与えられる.

Proof. R 加群 M に対して, divided power 包絡環 $\Gamma_R(M)$ がさだまる. M が R 上平坦であれば,

$$\mathrm{TSym}_R^*(M) \simeq \Gamma_R(M)$$

が成立 ([De79]5.5.2.5, p 123 参照).
$\Gamma_R(M \oplus N)$ に対して補題の性質が満たされること ([R63], III § 7, p.256) より補題が従う. □

Appendix B -- 最大値原理 --

付値体上の有限生成代数整域に対して, 次の最大値原理が成立する.

Theorem 6.21. J は付値体で乗法付値 $|\cdot|$ を持つとする. また, R を有限生成 J 代数整域とする.
この時, *Noether* の正規化定理により, ある J 上の多項式環 $S := J[y_1, \ldots, y_s]$ が存在して $S \subset R$ で R は S 上整である. 特に, $f \in R$ に対して $a_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$ がとれ, $f \in R$ は

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

の根となる.
すると, この a_i, $i = 1, \ldots, n$ を用いて次が成立する.

$$\sup_{x \in \mathrm{Spm}(R)} |f(x)| = \max_i \{|a_i|^{\frac{1}{i}}\}$$

ここで, $\mathrm{Spm}(R)$ は R の極大イデアルよりなる集合で, 各 $x \in \mathrm{Spm}(R)$ に関して, $f(x) := f \mod x \in R/x \subset \overline{J}$ として定める. ただし, $\overline{J}$ は J の代数閉包, $|a_i|$, $a_i \in S$ は多項式の *Gauss* ノルムとした.

Remark 6.22. 定理の左辺 $\sup_{x \in \mathrm{Spm}(R)} |f(x)|$ を $|f|$ と記述する.

まずは次の補題を証明する:

Lemma 6.23. $f \in S$ に対して, ある $x \in \mathrm{Spm}(R)$ が取れて

$$|f(x)| = \sup_{x \in \mathrm{Spm}(R)} |f(x)|$$

が成立する.

Proof. (補題の証明)
$f=0$ の場合は明らかなので $f\neq 0$ として示す. まず, Gauss ノルムの定義より, ある $a\in J$ に対して

$$|f|=|a|$$

となる. f を $a^{-1}f$ により変えることで

$$|f|=1.$$

としてよい. $\tilde{f}$ を f の $\mathcal{O}_J/m_j[y_1,\dots,y_s]$ への像とし, m_J を $\mathcal{O}_J$ の極大イデアルとする. この時, $\tilde{f}\neq 0$ であるので, $\mathcal{O}_J/m_J$ の有限次拡大体 W を適切にとることで, $(\tilde{t_1},\dots,\tilde{t_s})\in W^s$ が存在して $\tilde{f}((\tilde{t_1},\dots,\tilde{t_s}))\neq 0$.
すると, ある J の有限次拡大体 M が存在して

$$x=(y_1-t_1,\dots,y_s-t_s)\cap R$$

, $t_1,\dots,t_s\in M$, かつ $f(x)\not\equiv 0 \mod m_J$ が成立する. 従って, $|f(x)|=|f|$ が成り立つ. □

この補題を使うことで, 定理を証明する.

Proof. (定理の証明)
初めに, 補題から

$$|f(x)|^n\leq \max_i\{|a_i(x)||f(x)|^{n-i}\}\leq \max\{|a_i|\sup_{x\in Spm(R)}|f(x)|^{n-i}\}$$

が任意の $x\in \mathrm{Spm}(R)$ で成立するのはよい. 従って,

$$\max_i\{|a_i|^{\frac{1}{i}}\}\leq \sup\{|f(x)|\mid x\in \mathrm{Spm}(R)\}$$

が成立することを証明すれば十分である. 以下, $\Gamma:=Aut(R/S)$ とする. すると, a_i は $\{f^\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ の内 i 個の積をとった線形和なので

$$|a_i(x)|=|a_i(y)|\leq \max\{|f^\sigma(x)|^i\}_\sigma$$

がすべての $x\in \mathrm{Spm}(R), y:=x\cap S\in \mathrm{Spm}(S)$ で成立する. すると,

$$\sup_{x\in \mathrm{Spm}(R)}|f(x)|=\sup_{x\in \mathrm{Spm}(R)}|f^\sigma(x)|$$

がすべての $\sigma\in\Gamma$ で成立することが分かる. 従って,

$$|a_i|\leq \sup_{x\in \mathrm{Spm}(R)}|f(x)|^i$$

を得る. □

Appendix C -- 部分 L 函数 --

この節では, CM 型 Σ_K である CM 体 K の Hecke L 函数について主結果の証明において認めたことを証明する.
χ を導手が K の整イデアル $\mathfrak{f}$ を割り切るような K の代数的 Hecke 指標とする. χ の無限型を, 以下では

$$\beta-\alpha$$

, $\beta\in\mathbb{Z}[\overline{\Sigma}_K]$, $\alpha\in\mathbb{Z}[\Sigma_K]$ とする.
次のような原始的でない (imprimitive) Hecke L 函数を調べる.

$$L_{\mathfrak{f}}(\chi,s):=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in I_{\mathfrak{f}}\\ \mathfrak{A}\subset\mathcal{O}_K}}\frac{\iota_\infty\circ\chi(\mathfrak{A})}{N(\mathfrak{A})^s}$$

, ここで $N(\mathfrak{A}):=|\mathcal{O}_K/\mathfrak{A}|$, $I_{\mathfrak{f}}$ は K の分数イデアルで $\mathfrak{f}$ と互いに素なもののなす群.
$P_{\mathfrak{f}}:=\{(a)\in I_{\mathfrak{f}}\mid a\in K,\ a\equiv 1 \mod {}^\times\mathfrak{f}\}$ と定義したとき,

$$L_{\mathfrak{f}}(\chi,s)=\sum_{[\mathfrak{a}]\in I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}}\sum_{\substack{b\in[\mathfrak{a}]\\ b\in\mathcal{O}_K\\ b\text{ は }f\text{ と互いに素}}}\frac{\iota_\infty\circ\chi(b)}{N(b)^s}$$

が成立する. 部分 L 函数を

$$L_{\mathfrak{f}}(\chi,s,\sigma_{\mathfrak{a}}):=\sum_{\substack{b\in[\mathfrak{a}]\\ b\in\mathcal{O}_K\\ b\text{ は }\mathfrak{f}\text{ と互いに素}}}\frac{\iota_\infty\circ\chi(b)}{N(b)^s}$$

とする.

$$b \in [\mathfrak{a}], b \in \mathcal{O}_K$$

であれば, $b = \mathfrak{a}\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{a}^{-1}$ かつ $\lambda \in P_{\mathfrak{f}}$ という λ が存在する. したがって, $\lambda \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}$.
$\lambda_1, \lambda_2 \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}$ が

$$\lambda_1 \mathfrak{a} = \lambda_2 \mathfrak{a}$$

を満たしているとき, ある $\epsilon \in \mathcal{O}_K^\times$ が存在して

$$\lambda_1 = \lambda_2 \epsilon$$

である. この ϵ は $\epsilon \in \Gamma_{\mathfrak{f}}$ を満たす.
以上より, 次の等式を得る.

$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{f}}(\chi, s, \sigma_{\mathfrak{a}}) &= \sum_{\substack{b \in [\mathfrak{a}] \\ b \in \mathcal{O}_K \\ b \text{ は } \mathfrak{f} \text{ と互いに素}}} \frac{\iota_\infty \circ \chi(b)}{Nb^s} \\ &= \sum_{\mathfrak{l} \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}/\Gamma_{\mathfrak{f}}} \iota_\infty \circ \chi(\mathfrak{a}) \frac{\bar{\mathfrak{l}}^\beta}{\mathfrak{l}^\alpha N(\mathfrak{a}\mathfrak{l})^s} \\ &= \iota_\infty \circ \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s} \sum_{\mathfrak{l} \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}/\Gamma_{\mathfrak{f}}} \frac{\bar{\mathfrak{l}}^\beta}{\mathfrak{l}^\alpha N(\mathfrak{l})^s} \end{aligned}$$

したがって, 次の補題が成立する.

Lemma 6.24. χ の導手が $\mathfrak{f}$ を割り切るとする. また, $R_{\mathfrak{f}}$ は $I_{\mathfrak{f}}$ の部分集合で $I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}$ の代表系となるものとする. この時

$$L_{\mathfrak{f}}(\chi, s) = \sum_{\mathfrak{a} \in R_{\mathfrak{f}}} \iota_\infty \circ \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s} E^{\beta,\alpha}(1, 0, \mathfrak{a}^{-1}f; \Gamma_{\mathfrak{f}})$$

が成立する.

この補題を基にして, 補題 6.9 を証明する. 補題 6.9 を再掲する.

Lemma 6.25 (6.9)**.** $h_{\mathfrak{f}}$ を $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K)$ の位数とする. また, 部分 *Fourier* 変換 $P^i := P^{\mathfrak{A}_i^{-1}}$ とし, $x_i \in \mathcal{A}_i[\mathfrak{f}]$ を

$$x_i := \theta_i(\Omega_{CM} + \mathfrak{f}\mathfrak{A}_i{}^{-1}\Omega_{CM})$$

で定義する. ここで, θ_i は $\omega(\mathcal{A}_i)$ により定まる一意化 $A_i^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\Omega_{CM}$.
さらに, $f_{[c]}^i$ を $\mathcal{A}_i$ に対して定義した $f_{[c]}$ とする. この時, 次の等式が成立する.

$$\begin{aligned} &\frac{(\alpha-1)!(2\pi i)^{|\beta|}}{{\Omega_{CM}}^\alpha {\Omega_{CM}^\vee}^\beta} \mathrm{Local}(\chi\rho^{-1}, \Sigma)(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1})) \prod_{v \in \Sigma_l} (1 - \frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)}) L_{\mathfrak{f}}(\chi\rho^{-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{A}_i) \sum_{s_i \in \mathcal{A}_i[\lambda^n]} P^i \widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i) EK_{\Gamma,\mathcal{A}_i}^{\beta,\alpha-1}(f_{[c]}^i, x_i + s_i) \end{aligned}$$

, ここで $|\beta| := \sum_{\overline{\sigma} \in \overline{\Sigma}} \beta_{\overline{\sigma}}$ とし, n は ρ の導手が λ^n を割り切るような十分大きな整数とした.

Proof. ここでは簡単のため, ρ がすべての K における l 上の素点で分岐している場合に対して証明する.
この場合では, $\widetilde{F_{\rho^{-1}}} = F_{\rho^{-1}}$ が成立することに注意する.
簡単のため,

$$C := \frac{(\alpha-1)!(2\pi i)^{|\beta|}}{{\Omega_{CM}}^\alpha {\Omega_{CM}^\vee}^\beta}$$

と定義する.

高次の Eisenstein 数の定義を用いることで, 次の等式が成立する.

$$C^{-1}\sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}}\chi(\mathfrak{A}_i)\sum_{s_i\in\mathcal{A}[\lambda^n]}P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i)EK^{\beta,\alpha-1}_{\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathcal{A}_i}(f^i_{[c]},x_i+s_i)$$

$$=\sum_{t\in\Gamma_{\mathfrak{f}}\backslash c^{-1}\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{f}/\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{f}}(\sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}}\chi(\mathfrak{A}_i)\sum_{s_i\in\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}}P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i)f_{[c]}(-t)E^{\beta,\alpha}(t+1+s_i,\mathfrak{f}\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}{}^{-1};\Gamma_{\mathfrak{f}}))$$

$$=\sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}}\chi(\mathfrak{A}_i)(\sum_{s_i\in\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}}N(c)P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i)E^{\beta,\alpha}(s_i+1,\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1};\Gamma_{\mathfrak{f}})$$

$$-\sum_{s_i\in\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}}P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i)E^{\beta,\alpha}(1+s_i.c^{-1}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}{}^{-1};\Gamma_{\mathfrak{f}}))\qquad\cdots(1)$$

ここで, 一行目から二行目は, [KS24] の Proposition 4.6 による $\langle,\rangle$ の計算から従う. 二行目から三行目は $f^i_{[c]}=Nc1_{e(R)}-1_{\mathcal{A}_i[c]}$ から従う. 等式 (1) における, 次の部分を計算すればよい.

$$\sum_{s_i\in\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}}P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i)E^{\beta,\alpha}(s_i+1,\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1};\Gamma_{\mathfrak{f}})\qquad\cdots(2)$$

以下では, 簡単のため $\Gamma:=\Gamma_{\mathfrak{f}}$ とし, $\Gamma^{'}:=\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}$ とする. 上記の等式で $E^{\beta,\alpha}(1+s_i,f\mathfrak{A}_i^{-1};\Gamma)=[\Gamma:\Gamma^{'}]^{-1}E^{\beta,\alpha}(1+s_i,f\mathfrak{A}_i^{-1};\Gamma^{'})$ により Γ を $\Gamma^{'}$ に取り換えて計算すると, 次の式が得られる.

$$(2)=[\Gamma:\Gamma^{'}]^{-1}\sum_{\mathfrak{l}\in 1+\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\Gamma^{'}}\frac{P^iF_{\rho^{-1}}(\mathfrak{l})\overline{\mathfrak{l}^{\beta}}}{\mathfrak{l}^{\alpha}N(\mathfrak{l})^s}|_{s=0}$$

ここで, $P^iF_{\rho^{-1}}=P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}$ という $\lambda^{-n}\otimes\mathbb{Z}_l\cap(1+\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1})$ 上で定義された局所点数函数のサポートを考える. すると, このサポートは, 次のようになる.

$$1+\prod_{\lambda_\sigma\in\Sigma_l}\lambda_\sigma^{-v_\sigma}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}{}^{-1}.$$

ここで, ρ の導手

$$\prod_{\lambda_\sigma\in\Sigma_l}\lambda_\sigma^{v_\sigma}$$

と定めた. 第 6.2 節と同様にして, 次のように分解する.

$$\prod_{\lambda_\sigma\in\Sigma_l}\lambda_\sigma^{v_\sigma}=(a)\mathfrak{b}$$

, ここで $a\in 1+\mathfrak{f}$, $\mathfrak{b}$ は l と互いに素となる K の整イデアルをとる. この分解を用いて, $P^iF_{\rho^{-1}}$ のサポートは次のように記述される.

$$1+\prod_{\lambda_\sigma\in\Sigma_l}\lambda_\sigma^{-v_\sigma}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}{}^{-1}=a^{-1}(a+\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{b}^{-1})=a^{-1}(1+\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{b}^{-1}).$$

この時, $\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ の元は λ 進的に整, すなわち $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ の元であることに注意する. そこで, 任意の $\mathfrak{l}\in 1+\prod_{\lambda_\sigma\in\Sigma_l}\lambda_\sigma^{-v_\sigma}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}{}^{-1}$ を $\lambda=a^{-1}\omega$, $\omega\in 1+\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ と記述することができる. さらに, Gauss 和の性質から $\omega\notin\mathcal{O}_{K,\lambda}^{\times}$ であれば $P^iF_{\rho^{-1}}(a^{-1}\omega)=0$ であることを踏まえれば次が従う.

$$P^iF_{\rho^{-1}}(a^{-1}\omega)=\rho^{-1}(\omega)P^iF_{\rho^{-1}}(a^{-1}).$$

以上のことから次の等式を得る.

$$(2)=\frac{a^{\alpha}P^iF_{\rho^{-1}}(a^{-1})}{\overline{a}^{\beta}}\times[\Gamma:\Gamma^{'}]^{-1}\sum_{\omega\in(1+\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{b}^{-1})/\Gamma^{'}}\frac{\rho^{-1}(\omega)\overline{\omega}^{\beta}}{\omega^{\alpha}N(\omega)^s}|_{s=0}$$

$$=\frac{a^{\alpha}P^iF_{\rho^{-1}}(a^{-1})}{\overline{a}^{\beta}}\chi\rho^{-1}(\mathfrak{b})^{-1}\times\chi\rho^{-1}(\mathfrak{A}_i)^{-1}\times\sum_{\substack{a\in[\mathfrak{b}\mathfrak{A}_i]\\ a\subset\mathcal{O}_K\\ a:\mathfrak{f}\lambda\text{ と互いに素}}}\frac{\chi\rho^{-1}(a)}{N(a)^s}|_{s=0}$$

ここで, 最後の等式は補題 6.16 と同様. $[\mathfrak{b}\mathfrak{A}_i]$ は $I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}$ において定まるイデアル $\mathfrak{b}\mathfrak{A}_i$ の同値類とした. ρ の定義から, $\rho(\mathfrak{A}_i)=1$ であることを踏まえて, (2) 式を (1) に代入することで求める等式を得る. □

References

[AC17] Aurelirn Galateau, Cesar Martien, "A bound for the torsion on subvariety of abelian varieties", 2017, Arxiv.

[Ar69] E.Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 36, 1969,

[BLR80] S. Bosh, W.Lutkebormat, M.Reynaud, " Neron Models ", 1980, Springer Berlin, Heidelberg.

[Ma72] B. Mazur, Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields, Invent. Math. 18 (1972) 183-266.

[Del73] P.Deligne, Cohomologie a supports propers, expose XVII of SGA 4, Theorie de topos et Cohomologie etale des Schemas, Tome 3, Springer Verlag, Berlin 1973, p250-480, Lecture Note in Math, Vol 269.

[De79] P.Deligne, "Values of L-functions and Periods of Integrals", on seminar website. Translation of P. Deligne, "Valeurs de Fonctions L et périodes d ' intégrales", Proceedings of Symposia in Pure Math. 33, 1979, Part 2, 313-346.

[Ds87] Ehud de Shalit, "The Iwasawa Theory of Elliptic Curves with Complex Multiplication", 1987

[Gro57] A.Grothendieck, Sur quelques points d ' alg'ebre homologique, Tohoku math, 1957.

[Ds22] Ehud de Shalit, "The Furgues-Fontaine Curve and p-adic Hodge Theory ", 2022, Prfectoid Spaces, Banerjee et al, Infosys Science Series.

[Har87] Harder, G. Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case GL2 . Invent Math 89, 37–118 (1987).

[Ha10] M. Hazewinkel, " FORMAL GROUPS AND APPLICATIONS", 2010, AMS CHELSEA PUBLISHING American Mathematical Society.

[Hida04] H. Hida, Non-vanishing modulo p of Hecke L–values, in: " Geometric Aspects of Dwork ' s Theory, II " (edited by Alan Adolphson, Francesco Baldassarri, Pierre Berthelot, Nicholas Katz, and Francois Loeser), Walter de Gruyter, 2004, pp. 735–784

[Hida1] H.Hida, "p adic automorphic forms on Shimura varieties", Springer Monographs in Mathematics (SMM).

[Hru01] E. Hrushovski, " The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields ". Ann. Pure Appl. Logic 112 (2001), no. 1.

[BK07] K. Bannai and S. Kobayashi, Algebraic theta functions and p-adic interpolation of Eisenstein-Kronecker numbers, preprint, arXiv:math.NT/0610163v2, 2007.

[BKF15] K.Bannai, S.Kobayashi, H.Furusho, p-adic Eisenstein-Kronecker series for CM elliptic curves and the Kronecker limit formulas, Nagoya Math. J. 219 (2015), 269-302.

[BKT07] K. Bannai, S. Kobayashi, and T. Tsuji, On the real Hodge and p-adic realizations of the Elliptic Polylogarithm for CM elliptic curves, preprint 2007, arXiv:0711.1701v1 [math.NT]

[KS24] Kings, Sprang, "Eisenstein-Kronecker classes, integrality of critical values of Hecke L-functions and p-adic interpolation", 2024,Arxiv.

[Katz78] N. M. Katz, "p-adic L-functions for CM fields", Invent. Math., 49, 199–297 (1978).

[LK23] A.Lei, D.Kundu "non-vanishing modulo p of Hecke L value over imaginary quadratic fields", 2023, Arxiv.

[Lam15] J.Lamplugh, "An analogue of the Washington–Sinnott theorem for elliptic curves with complex multiplication I", J. London Math. Soc. 91 (2015), no. 3, 609–642

[Lau96] G. Laumon, " Transformation de Fourier generalisee ", arxiv:9603004, 1996.

[Liu03] Qing Liu, "Algebraic geometry and Arithmetic curves", 2008, Oxford University press.

[Mil72] J.Milne, Abelian varieties defined over their Fields of Moduli, I †, 1972, Bulletin of The London Mathematical Society.

[Mo] Morret. Bailly, " Henselian preparation theorem ", 2024, Arxiv.

[Mc95] M. McQuillan, Division points on semi-abelian varieties, Invent. Math. 120 (1995), no. 1, 143–159

[OH15] T.Ochiai, T.Hara, "The cyclotomic Iwasawa main conjecture for Hilbert cusp forms with complex multiplications", 2015, Arxiv.

[R63] N. Roby, Lois polynomes et lois formelles en theorie des modules, An. Sci. Ecole. Norm. Sup(1963), no80, 213-248.

[R84] D. Rohrlich, On L-functions of elliptic curves and cyclotomic towers. Invent. Math. 75, 409–423 (1984).

[Ray83] M.Raynaud, Sous-variétés d ' une variété abélienne et points de torsion, Prog. Math. 35 (1983), 327–352.

[Shatz86] S.S.Shatz, "Group Schemes, Formal Groups, And p-Divisible Groups", Arithmetic Geometry, edited by Cornel, Silverman, Springer-Verlag, New York, Berlin Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1986.

[Schn85] P. Schneider, p-adic height pairings. II, Invent. Math. 79 (1985) 329-374

[Sch87] L. Schneps, " On the μ-invariant of p-adic L-functions attached to elliptic curves with complex multiplication", J. Number Theory 25 (1987) 20–33.

[Shi71] G.Shimura, " Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions", 1971, Kanô Memorial Lectures, No. 1. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J.]

[Shi] G.Shimura, The special values of the zeta functions associated with cusp forms. Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 783–804.

[ST61] G.Shimura, Y.Taniyama, AMA, ”Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory”, Publ. Math. Soc. Japan No. 6, 1961.

[Sin87] Warren M. Sinnott, Γ-transforms of rational function measures on ZS, Invent. Math. 89 (1987), no. 1, 139–157

[Tate66] J.Tate, ”p-divisible group”, roc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966), 158–183, Springer, Berlin, 1967.

[TZ08] Y. Tian and S. W. Zhang, Kolyvagin systems of CM points on Shimura curves. preprint, 2008.

[Po03] A. Polishchuk , “ Abelian Varieties, Theta Functions and the Fourier Transform ” . Cambridge University Press; 2003.

[Y13] S. Yasuda. Explicit t-expansions for the elliptic curve E : $y^2 = 4(x^3 + Ax + B)$. Proc. Japan Acad. Ser. A Math Sci., 89(9):123–127, 2013.

[Z12] Umberto Zannier. Some problems of unlikely intersections in arithmetic and geometry, volume 181 of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. With appendixes by David Masser.

Takuya Tanaka, Mathematical Inst. Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, Ookayama, Meguro, Tokyo, 152-8550, JAPAN

Email address: tanaka.t.ch@m.titech.ac.jp