CM 体における HECKE L 値の非消滅性

田中拓弥

Abstract. 本稿では Lamplugh が虚二次体に対して得た L 値に関する結果を CM 体に拡張する．これを応用して, BSD 予想を仮定したときに CM 体の適切な多重 $\mathbb{Z}_l$ 拡大 K_∞, 及び l 上すべての素点で通常良還元をもつ CM 型単純アーベル多様体 A により定義される $\mathbb{Z}$ 加群 $A(K_\infty)/A(K_\infty)_{\mathrm{tors}}$ が有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群であることを示す.

キーワード: Hecke L 値, Mordell-Weil 階数

Contents

1. 導入

K^+ を総実代数体とする．K を K^+ 上の総虚 2 次拡大体 (CM 体) とする．さらに, K の CM 型 Σ_K, つまり $\mathrm{Emb}\{K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}\} = \Sigma_K \sqcup \overline{\Sigma}_K$ という埋め込み全体の半分の集合 Σ_K を固定する．$p \neq l$ を相異なる素数とする．また, $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ という体の埋め込みを固定する．

以下では, K の整イデアル $\mathfrak{f}$ に対して, $I_K^{(\mathfrak{f})}$ で $\mathfrak{f}$ と互いに素な K の分数イデアルのなす群とする．本稿で扱う対象は, l 上の K における素イデアル λ のべき乗を導手 $\mathfrak{f}_\chi$ に持つ代数的 Hecke 指標 $\chi : I_K^{(\mathfrak{f}_\chi)} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ である．χ に対して定まる無限型 (第 6 節で定義される) を次のようにする．

$$\beta - \alpha \in \mathbb{Z}[\mathrm{Emb}(K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}})].$$

ここで, $\beta = \sum_{\sigma \in \overline{\Sigma}_K} \beta_\sigma \overline{\sigma} \in \mathbb{Z}[\overline{\Sigma}_K],\ \alpha = \sum_{\sigma \in \Sigma_K} \alpha_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[\Sigma_K]$ とした．

この代数的 Hecke 指標 $\chi : I_K^{(\mathfrak{f}_\chi)} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ に対し, Hecke L 函数

$$L(\chi, s) := \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K \\ \mathfrak{a}\text{ は }\mathfrak{f}_\chi\text{ と互いに素}}} \frac{\iota_\infty \circ \chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}$$

が定義され, $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ において絶対収束する．さらに, ガンマ因子を

$$\Gamma_\infty(\chi, s) := \prod_{\sigma \in \Sigma_K} 2(2\pi)^{-(s - \min(\beta_\sigma, -\alpha_\sigma))} \Gamma(s - \min(\beta_\sigma, -\alpha_\sigma))$$

としたときに, $|d_K|$ を K の絶対判別式とすれば $\Lambda(\chi, s) := (|d_K| N(\mathfrak{f}_\chi))^{s/2} \Gamma_\infty(\chi, s) L(\chi, s)$ が次の函数等式を満たす．

$$\Lambda(\chi, s) = W(\chi) \Lambda(\overline{\chi}, 1 - s).$$

ここで $W(\chi)$ は $|W(\chi)| = 1$ を満たす, ある複素数である．

片々のガンマ因子が $s = 0$ で極を持たないような χ を critical な代数的 Hecke 指標という．

複素函数 $L(\chi, s)$ は χ が critical であるとき, 全複素平面に正則に解析接続される．その $s = 0$ での値 $L(\chi, 0)$ を $L(\chi)$ と定める．

本稿では, 次の 2 つのことを行う．

- **A**. χ の導手が l 上の K における素イデアル λ のべき乗であるとし, 無限型を固定して走らせる．この時, 有限個を除くすべての代数的 Hecke 指標 χ に対して $L(\chi) \neq 0$ が成立することを示す．
- **B**. A を K 上 K の整数環に CM を持つ単純 CM 型アーベル多様体として, K 上 λ べきのモジュラスに対して定義される射類体の合成体 $K(\lambda^\infty)$ として, $A(K(\lambda^\infty))/A(K(\lambda^\infty))_{\mathrm{tors}}$ という $\mathbb{Z}$ 加群が有限生成である十分条件を与える．

A については, Lamplugh[Lam15] により $\mathbb{Q}$ 上定義された, 虚二次体 K の整数環に CM を持つような CM 楕円曲線 E が l 上全ての素点で通常良還元を持つ場合に知られる．このことから Lamplugh は 1 次元の場合の **B** の主張, つまり $E(K(\lambda^\infty))/E(K(\lambda^\infty))_{\mathrm{tors}}$ が有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群であることを示した．本稿では, この結果を CM 体に拡張する．

本稿の主結果を述べる．ここで, K を類数 1 とし, λ のべきを導手にもつ $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の位数有限指標のなす指標群 $\mathcal{X}_\lambda$ とする．すると, $\mathcal{X}_\lambda$ は K の類数が 1 であることにより全射となる Artin 写像 $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K(\lambda^\infty)/K)$ による引き戻しを通じて

$$\mathcal{X}_\lambda \subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times, \overline{\mathbb{Q}}^\times)$$

と埋め込まれる．ここで $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ には離散位相を入れて $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}$ は連続な準同型全体とした．

任意の $\rho \in \mathcal{X}_\lambda$ の像が有限なので $\rho : \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f}_\rho)/K) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ となる整イデアル $\mathfrak{f}_\rho$ で, イデアルの包含で最大のものをとることができる．

Artin 写像を介して, $\rho : I_K^{(\mathfrak{f}_\rho)} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ と見做せることに注意する．1 つ目の主結果を述べる．

定理 A (定理 6.12)**.** *$K/\mathbb{Q}$ を CM 体．また l を, $K/\mathbb{Q}$ で不分岐な素数．K の critical な代数的 Hecke 指標 χ は, 導手が 1 となるものとする．さらに, これらの $(K/\mathbb{Q}, l)$ は次の条件を満たしているとする．*

1. l は $K^+/\mathbb{Q}$ で不分岐であり, K/K^+ で l 上の任意の素点が $(l)=\lambda\overline{\lambda}$ と完全分解する.
2. K の類数は 1 で $\mathbb{Q}$ 上ガロアである.
3. K_λ の剰余位数 q として, K は 1 の $q-1$ 乗根を含まない.

このような条件で, λ により指標群 $\mathcal{X}_\lambda$ を先に定義したように定める. この時, 高々有限個を除く任意の $\rho\in\mathcal{X}_\lambda$ に対して, $L(\chi\rho^{-1})\neq 0$ が成立する.

Lamplugh[Lam15], Lei-Kundu[LK23] は, K が虚二次体の場合に, χ の無限型 $\beta-\alpha$ での $\beta=0$ となる場合に対して, この結果を含む主張を示している.

次に, この結果を Mordell-Weil 群の階数に応用するために, CM 型アーベル多様体のランクに関する BSD 予想を用いる. これにより, 次の主定理 B が証明される.

定理 B (定理 6.18)**.** *K が $\mathbb{Q}$ 上ガロアな CM 体とし, (K,l) が Theorem A の仮定を満たすとする. CM 型単純アーベル多様体 $A_{/K}$ が次の条件を満たすとする.*

1. *$A_{/K}$ は $\mathrm{End}(A)\simeq\mathcal{O}_K$ を満たす.*
2. *$A_{/K}$ は l 上のすべての素点で通常良還元をもつ.*
3. *$A_{/K}$ は全ての素点で良還元を持つ.*

$(l)=\lambda\overline{\lambda}$ を満たす K での素イデアル λ とし, また K の λ 外不分岐最大アーベル拡大体を $K(\lambda^\infty)$ と定義する. $K(\lambda^\infty)/K$ の任意の $\mathbb{Q}$ 上有限次の中間体 F に対して, $A_{/F}$ がランクに関する BSD 予想を満たすとする. この時, $\mathbb{Z}$ 加群 $A(K(\lambda^\infty))/A(K(\lambda^\infty))_{\mathrm{tors}}$ は有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群である.

Lamplugh[LK23] は, 虚二次体 K の整数環に CM を持つような $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線に対して上記の Theomre B が成り立つことを示しており, 定理 B は, Lamplugh の結果の CM 体への拡張である. 本稿の構成を述べる.

- 2 節で, 基本的な記号の準備を行う.
- 3 節で, [KS24] による結果を基にして, 高次の Eisenstein 数を補完する形式函数を構成する.
- 4 節では, 2 節で構成した形式函数と, [BKF15] による形式函数の関係式を記述する.
- 5 節では, Sinnot[Sin87] の有理函数測度を拡張して, 形式函数に付随する測度について議論する.
- 6 節で, L 値を 3 節で構成した形式函数と関係づける. そして 4 節での結果を基に, 1 つ目の主結果を証明する. 系として Mordell-Weil 階数についての結果が従う.

謝辞

まず初めに, この研究の第一歩を導いてくださった指導教官の落合理先生に感謝の意を表したい. 落合先生は, 当該分野の基本的な知識を得るための詳細な文献を提供してくださり, それが本稿の重要な指針となった. また, まだ粗い状態であった本稿の書き方について方向性を示してくださったことにも感謝している.

次に, 私に岩澤理論の道を最初に示してくださった東北大学の山内卓也先生にも感謝したい. 山内先生は, 私が東北大学を卒業した後も, 困ったときは非常にサポートしてくださった.

また, 先行研究者であるオタワ大学の Antonio Lei 先生, トロント大学の Debanjana Kundu 先生にも感謝の意を表したい. 両先生は, 私の繰り返しの問い合わせに対し, 迅速かつ思慮深い返信をくださり, 非常に助けになった。

最後に, 下元数馬先生, 玄承賢君, 小宮伶さん, 清水優大さんにも感謝の気持ちを伝えたい. 皆さんの助けに心から感謝している.

記法

以降では, 以下の記法を使用する.

(1) $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$, $n\geq 1$ という元について, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}^n$ により

$$a^x := a_1^{x_1}\cdots a_n^{x_n}$$

と定める. また, $1\in\mathbb{C}^n$ と書いた場合は,

$$1 := (1,\dots,1)\in\mathbb{C}^n$$

を意味することとする.

(2) 階乗記号について, $x=(x_1,\dots .x_n)\in\mathbb{N}^n$ に対して

$$x! := x_1!\cdots x_n!$$

で定義する.

(3) $a=(a_1,\dots,a_n), b:=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{C}^n$ に対して,

$$a+b:=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n),\ a-b:=(a_1-b_1,\dots,a_n-b_n),\ ab:=(a_1b_1,\dots,a_nb_n)$$

と定める. この $a,b\in\mathbb{C}^n$ が $a\geq b$ とは, すべての $i=1,\dots,n$ に対し, $a_i\geq b_i$ であることとする.

(4) $\mathbb{N}$ として, 本稿では $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を示すこととする.

(5) 環 S に対して, S の素イデアル $\mathfrak{P}$ による完備化を $S_{\mathfrak{P}}$ とし, 積閉集合 $S-\mathfrak{P}$ による局所化を $S_{(\mathfrak{P})}$ とする.

(6) C を体として, G_C を C の絶対ガロア群とする.

(7) K を CM 体として, $\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{C}$ 加群 M を考える. $J\subset\mathrm{Emb}(K\hookrightarrow\mathbb{C})$ を埋め込みの有限部分集合とする. この時,

$$M(J) := \bigoplus_{\sigma\in J} M(\sigma)$$

とする. ここで, $\sigma\in J$ として $M(\sigma):=\{m\in M \mid (a\otimes 1)\cdot m=(1\otimes\sigma(a))m,$ が任意の $a\in\mathcal{O}_K$ で成り立つ$\}$ により $M(\sigma)$ を定義した.

(8) 任意の R 加群 M, 及びその元 $m\in M$ に対して $m^{[n]}:=m\otimes\cdots\otimes m\in M^{\otimes n}$ という記法を用いる.

2. 準備

この節では, CM 型アーベル多様体に関する基本的な事項とともに, 本稿でよく使われる記号を説明する. 本稿を通じて, すべての代数体は $\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体と考える. すなわち, 代数体 K に対して $\tau_K : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ という体の埋め込みを固定する.

以下では, 記号を次のようにとる.

- K : $\mathbb{Q}$ 上の次数 $2g$ であるような CM 体.
- $p \neq l$: 相異なる素数とする.
- M : $\mathbb{Q}$ 上ガロアな K を含む代数体.
- A : K の整数環に CM を持つ M 上の g 次元単純アーベル多様体で, p, l 上の M における全ての素点で良還元を持つもの.
- $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$, $\iota_l : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_l$ を体の埋め込みとして固定する.

M における l 上の素点 v_l を $v_l = \mathcal{O}_K \cap (\iota_l \circ \tau_K)^{-1}(m_{\mathbb{C}_l})$ とする. ここで, $m_{\mathbb{C}_l}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ の極大イデアルで, $\tau_K : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ は固定していた体の埋め込みである. $A_{/M}$ の $\mathcal{O}_{M,(v_l)}$ 上の Neron モデル $\mathcal{A}_{/\mathcal{O}_{M,(v_l)}}$ とする. ここで $\mathcal{O}_{M,(v_l)}$ は局所化とした. 簡単のため, $\mathcal{O}_{M,(v_l)} =: R \subset \mathbb{C}$ と記述する.

この時, つぎの同型が成り立つ.

$$\iota : \mathcal{O}_K \simeq \mathrm{End}_M(A) \simeq \mathrm{End}_R(\mathcal{A}).$$

ここで, 2 番目の同型は Neron 写像原理 (Neron mapping principle)[1] を用いた. $\mathcal{A}_{/R}$ の微分形式について, $\Omega^1_{\mathcal{A}/R}$ の単位切断 e による引き戻しを次で定義する.

$$\omega_{\mathcal{A}/R} := e^*\Omega^1_{\mathcal{A}/R}.$$

この時, $\omega_{\mathcal{A}/R}$ は $\pi_*\Omega^1_{\mathcal{A}/R}$ と一致し, さらに R が離散付値環なので $\Gamma(\mathrm{Spec}(R), \omega_{\mathcal{A}/R})$ は R 上階数 g の自由加群をなす. また, その基底 $\omega(\mathcal{A}) := (\omega_1, \ldots, \omega_g)$ は次の性質を満たす.

補題 2.1 ([BLR80, Section 4, Proposition 1, Corollary 3])**.** 各 ω_i に対し, ある平行移動不変な $\Omega_i \in \Gamma(\mathcal{A}, \Omega^1_{\mathcal{A}/R})$ が一意に存在して $e^*\Omega_i = \omega_i$ を満たす.

$\Gamma(\mathcal{A}, \Omega^1_{\mathcal{A}/R}) = \Gamma(\mathrm{Spec}(R), \omega_{\mathcal{A}/R})$ なので, $\Gamma(\mathcal{A}, \Omega^1_{\mathcal{A}/R})$ も R 上階数 g の自由加群である. このことから, $\iota : \mathcal{O}_K \simeq \mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ を固定したときに, 基底 $\{\Omega_i\}_{i=1,\ldots,g}$ が取れて, 任意の $a \in \mathcal{O}_K$ に対して次を満たすような埋め込み $\sigma_i : K \hookrightarrow M \hookrightarrow \mathbb{C}$ $(i = 1, \ldots, g)$ が取れる.

$$\Omega_i \circ \iota(a) = \sigma_i(a)\Omega_i \tag{1}$$

特に, 必要であれば ι を取り換えることで固定していた $\iota_\infty \circ \tau_K : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ が $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_g\}$ に含まれるようにする.

この埋め込み全体 $\Sigma_K := \{\sigma_1, \ldots, \sigma_g\}$ として K の CM 型をとる. この CM 型は, $A_{/M}$ の CM 型と呼ばれる. (K, Σ_K) が定める Reflex 体を次のように定義する.

$$K^{\mathrm{ref}} := \mathbb{Q}(\mathrm{tr}_{\Sigma_K}(a) \mid a \in K),$$

ここで $\mathrm{tr}_\Sigma(x) := \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(x)$ とする. この体の絶対ガロア群 $G_{K^{\mathrm{ref}}}$ は,

$$\{\sigma \in G_{\mathbb{Q}} \mid \sigma\Sigma_K = \Sigma_K\} = G_{K^{\mathrm{ref}}}$$

を満たす. したがって, 固定された $\tau_{K^{\mathrm{ref}}} : K^{\mathrm{ref}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ として,

$$\{\sigma\Sigma_K \mid \sigma \in G_{\mathbb{Q}}\} \simeq \mathrm{Emb}(K^{\mathrm{ref}}, \overline{\mathbb{Q}}); \sigma\Sigma_K \mapsto \sigma\tau_{K^{\mathrm{ref}}}$$

が全単射を与える.

[1]すなわち, 任意の R 上滑らかなスキーム T に対して成立する次の性質 $\mathrm{Hom}_R(T, \mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_M(T_M, A)$, ここで T_M は T を $R \subset M$ で基底変換したもの

他方, $\tau_K : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ が固定されているので, この全単射より

$$\{\sigma\Sigma_K \mid \tau_K \in \sigma\Sigma_K\} \hookrightarrow \mathrm{Emb}(K^{\mathrm{ref}}, \overline{\mathbb{Q}})$$

という単射が誘導される. このようにして定まる単射の像は K^{ref} の CM 型 $\Sigma_{K^{\mathrm{ref}}}$ を定めている.

2.1. **アーベル拡大体.** この節では, CM 型アーベル多様体の [ST61] による結果を基に, CM 体 K を含む有限次代数体 M に定義体を持つアーベル多様体 $A_{/M}$ で, $\mathrm{End}_M(A) \simeq \mathcal{O}_K$ となるものから, M 上のアーベル拡大体を構成する. 次のような群準同型を考える.

$$M^\times \longrightarrow K^\times; x \mapsto \prod_{\sigma \in \Sigma_{K^{\mathrm{ref}}}} \sigma(N_{M/K^{\mathrm{ref}}}(x))).$$

この準同型を連続に延長したイデールの準同型を $\mu : \mathbb{A}_M^\times \longrightarrow \mathbb{A}_K^\times$ とする.

また, 前節で (1) を満たすように定義した $\Gamma(\mathcal{A}_{/R}, \Omega^1_{\mathcal{A}/R})$ の基底 $\Omega_1, \ldots, \Omega_g$ により定まる一意化[2]$\xi : \mathbb{C}^g/\Lambda_A \longrightarrow A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ をとる.

この一意化により, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\Lambda_A)$ が引き起こされる. $\otimes\, \mathbb{Q}$ を作用することで

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \cdot \Lambda_A)$$

が得られる. さらに, $\mathrm{End}_M(A) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A) \hookrightarrow \mathrm{End}(A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}))$ が成り立つ. ここで, $\mathrm{End}(A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}))$ は, 複素 Lie 群 $A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ としての正則自己準同型写像のなす環である. この 1 番目の同型は, M が K の Reflex 体を含み, A が単純アーベル多様体であることによる. また, 2 番目の単射は, アーベル多様体 A の自己準同型射を, 複素 Lie 群 $A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ の正則な自己準同型射と見做す対応で与える[3].

この単射に, 再び $\otimes\, \mathbb{Q}$ を作用させることで次の単射を得る.

$$\mathrm{End}_M(A) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathrm{End}(A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{Q}$$

以上の 2 つの単射 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\Lambda_A)$, $\mathrm{End}_M(A) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathrm{End}(A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{Q}$ を合成することで, $\Phi_1 : \mathrm{End}_M(A) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \cdot \Lambda_A)$ という単射が次を満たすように定義される.

$$a(\xi(v)) = \xi(\Phi_1(a)(v)),$$

ここで $a \in \mathrm{End}_M(A), v \in \mathbb{Q} \cdot \Lambda_A$ は任意.

$\iota : K \simeq \mathrm{End}_M(A) \otimes \mathbb{Q}$ と Φ_1 を合成することで, $\mathbb{Q}$ 代数の単射準同型

$$\Phi := \Phi_1 \circ \iota : K \longrightarrow \mathrm{End}_M(A) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{Q} \cdot \Lambda_A)$$

が取れる. この Φ を通じて $\mathbb{Q} \cdot \Lambda_A$ が K ベクトル空間の構造をもつことに注意する.

$\mathbb{Q} \cdot \Lambda_A$ は $\mathbb{Q}$ 上 $2g = [K : \mathbb{Q}]$ 次元のベクトル空間である. 従って, $\mathbb{Q} \cdot \Lambda_A$ は K ベクトル空間として次元 1 であるので, $\Phi(K) \cdot w = \mathbb{Q} \cdot \Lambda_A$ となる $w \in \mathbb{Q} \cdot \Lambda_A$ が存在する. 特に, Φ から定まる標準的な K ベクトル空間の間の同型を以下のように定義する.

$$u : K \simeq \mathbb{Q} \cdot \Lambda_A \subset \mathbb{C}^g.$$

また $\mathfrak{a} := u^{-1}(\Lambda_A)$ とする.

定理 2.2 ([Shi71, Proposition 5.15])**.** $A_{/M}$ をこれまで考えてきたアーベル多様体とする. $\sigma_s \in G_M$ を $\sigma_s|_{\mathrm{Gal}(M^{\mathrm{ab}}/M)} = (s, M^{\mathrm{ab}}/M)$ を満たすような絶対ガロア群の元とする. ここで M^{ab} は M の最大アーベル拡大体で $s \in \mathbb{A}_M^\times$ とした.

[2]周期ペアリング, $H^1_{dR}(A, \Omega^1_{A/\mathbb{C}}) \times H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ により, Ω_i から $H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathbb{C}^g$ という単射が定まり, この像が Λ_A

[3]この対応が単射であるのは, $A_{/M}$ の非自明な射が, $A^{\mathrm{an}}(\mathbb{C})$ の原点における接空間に非自明な射を誘導することから確認できる.

この時, $A^{\sigma_s}_{/M}$ に関する, ある一意化 ξ' が存在し, 次の可換図式を満たす.

$$\begin{tikzcd} K/\mathfrak{a} \arrow[r, "\xi\circ u"] \arrow[d, "1/\mu(s)"] & A(\mathbb{C}) \arrow[d, "\sigma_s"] \\ K/\mu(s)^{-1}\mathfrak{a} \arrow[r, "\xi'\circ u"] & A^{\sigma_s}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

注意 2.3. この主張は, より一般に K の *Reflex* 体 K^{ref} を含むような有限次代数体 k 上定義された *CM* 型単純アーベル多様体 $A_{/k}$ に対して成立する.

この定理により, 次の命題が成立することを示す.

命題 2.4. $A_{/M}$ を本節冒頭で定義したアーベル多様体とする. p 上の全ての素点で $A_{/M}$ が良還元を持つとする. この時, $M(A[l^\infty])$ は p 上の任意の M における素点で不分岐となるような M のアーベル拡大体である.

証明. 以下では, $L := M(A[l^\infty])$ とする. 定理 2.2 により任意の $v \in l^{-n}\mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\sigma_s \cdot \xi(u(v)) = \xi'(u(\frac{1}{\mu(s)}v)).$$

また, σ_s は M を固定するので $A_{/M}$ が $A^{\sigma_s}_{/M}$ と同種であることがわかる. したがって同種写像 $\tau : A \longrightarrow A^{\sigma_s}$ に対応する K 線形変換 $T : \mathbb{Q}\cdot\Lambda_A \longrightarrow \mathbb{Q}\cdot\Lambda_A$ が一意に存在して次が成立する.

(1) $\tau \circ \xi' = \xi \circ T$
(2) $T : u(\mu(s)^{-1}\mathfrak{a}) \longrightarrow u(\mathfrak{a})$

ここで, $\mathbb{Q}\cdot\Lambda_A$ は Φ により K ベクトル空間となっている. すると, $T = \Phi(\alpha_s)$ という $\alpha_s \in K$ が取れる. 特に

$$\sigma_s \cdot \xi(u(v)) = \xi'(u(\frac{1}{\mu(s)}v)) = \xi(u(\frac{\alpha_s}{\mu(s)}v))$$

が任意の $u(v) \in A[l^\infty]$ に対して成立している. ここで,

$$\mathrm{Gal}(L/M) \longrightarrow \{s \in \mathbb{A}_M^{(\infty),\times} \mid s\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}; \sigma_s \mapsto \frac{\alpha_s}{\mu(s)}$$

を考える. $\mathbb{A}_M^{(\infty),\times}$ は M のイデールの有限部分とした.

これが準同型なのはよく, 単射であることのみ確認する. $\sigma_s \in \mathrm{Gal}(L/M)$ の像 $\alpha_s/\mu(s) = 1$ とする. この時,

$$\sigma_s \cdot (\xi(u(v))) = \xi(u(\frac{\alpha_s}{\mu(s)}v)) = \xi(u(v))$$

が任意の $v \in A[l^\infty]$ で成立するので, $L = M(A[l^\infty])$ を踏まえて $\sigma_s = 1$ が成立するのは良く, これより L/M は確かにアーベル拡大である.

ここで, Neron-Ogg-Shafarevich の定理から L/M が p 上の全ての素点において不分岐であるのは良く, 命題の主張が従う. □

$A_{/M}$ は CM 型アーベル多様体なので, すべての素点で常に潜在的良還元を持つ. したがって, $M(A[l^\infty])/M$ の有限次中間体 M' が存在して $M(A[l^\infty])/M'$ は l 外不分岐アーベル拡大体となる.

類体論により, 代数体の l 外不分岐最大アーベル拡大体のガロア群は 有限群 $\times\,\mathbb{Z}_l^a$, $a \in \mathbb{Z}$ と書ける. 以上より, ある自然数 d を用いて以下のような同型が存在することがわかる.

$$\mathrm{Gal}(M(A[l^\infty])/M) \simeq 有限群 \times \mathbb{Z}_l^d. \tag{2}$$

この同型 (2) と, 局所類体論から次が成立する.

系 2.5. *$M(A[l^\infty])$ を ι_p による素点で完備化したものを J とすると, k: $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次拡大体が存在して $J = k(\mu_{l^\infty})$ が成立する.*

証明. $M(A[l^{\infty}])/M$ は p 上の素点全てで不分岐であった. また, Weil ペアリングの存在より $\mu_{l^\infty} \subset J$ である. ここで, 同型 (2) を用いれば, M の ι_p より定まる p 上の素点で完備化したものを k' とすれば

$$\mathrm{Gal}(J/k') \simeq 有限群 \times \mathbb{Z}_l^c,$$

$c \in \mathbb{Z}$ という記述を持つことがわかる. $\mu_{l^\infty} \subset J$ より $c \geq 1$ はよい.

局所類体論から $c \leq 1$ であるので $c = 1$ を得る. ゆえに k'' として, 上記の $\mathbb{Z}_l$ の固定体に対応する J/k' の部分体をとれば, $k''(\mu_{l^\infty}) \subset J$ は有限次拡大になっているので, 必要であれば k'' の有限次部分拡大体 $k \subset J$ をとることにより, $J = k(\mu_{l^\infty})$ が成立する. □

2.2. **$\mathcal{A}_{/R}$ の形式完備化.** この節では, 前節の R 上定義されたアーベルスキーム $\mathcal{A}_{/R}$ の単位切断に沿った形式化 $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ について議論する. 本節でも, K の CM 型 Σ_K を (1) を満たすように定義する.

体の埋め込み, $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$, $\iota_l : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_l$ に, 次の条件を課す.

- **p-ord, l-ord**
  ι_p (resp. ι_l), $\sigma \in \Sigma_K$ が定める K の p, (resp.l) 上の素点 $\mathfrak{P}_\sigma := (\iota_p \circ \sigma)^{-1}(m_{\mathbb{C}_p}) \cap \mathcal{O}_K$ (resp. λ_σ) は $\mathfrak{P}_\sigma \neq \overline{\mathfrak{P}_\sigma}$ (resp. $\lambda_\sigma \neq \overline{\lambda_\sigma}$) を満たす. ここで, $m_{\mathbb{C}_p}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ の極大イデアルとした.
- **単項性**
  K における l 上, および p 上の素点は全て単項イデアル.

$\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ を $\mathcal{A}_{/R}$ の単位切断に沿った形式完備化とする. 初めに, Σ_K と ι_l により定まる K での素イデアルの集合 Σ_l として, $\mathfrak{L} \subset \mathcal{O}_K$ というイデアルを $\mathfrak{L} = \prod_{\lambda_\sigma \in \Sigma_l} \lambda_\sigma$ として定義する.

補題 2.6. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]_{/R}$ は連結な有限群スキーム.

証明. $\mathcal{A}[\overline{\mathfrak{L}}^n]_{/R}$ がエタールであることを示せればよい. 実際, $\mathcal{A}[l^n]_{/R}$ の連結成分 $\mathcal{A}[l^n]^\circ_{/R}$ の位数は l^{ng} 以上である ([Shatz86, p.64] を参照). $\mathcal{A}[\overline{\mathfrak{L}}^n]_{/R}$ が R 上エタールであることが示されたとする. この時, $\mathcal{A}[l^n] = \mathcal{A}[\mathfrak{L}^n] \times_R \mathcal{A}[\overline{\mathfrak{L}}^n]$ なので

$$\mathcal{A}[l^n]^\circ = (\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n] \times_R \mathcal{A}[\overline{\mathfrak{L}}^n])^\circ = \mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]^\circ$$

が成立する. ここで, $\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]^\circ_{/R}$ は $\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]_{/R}$ の単位元を含む連結成分とした.

従って, $\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]^\circ$ の位数が l^{ng} 以上であることがわかるので, $\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]^\circ = \mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]$ でなければならない.

$\overline{\mathfrak{L}}^n$ の生成元 $a \in \overline{\mathfrak{L}}^n$ による $\iota(a) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ がエタールであることを示す. $\iota(a)$ は同種写像で平坦なので, 相対次元 0 かつ不分岐であることを示す. 相対次元 0 であるのは良いので, $\iota(a) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ による微分形式の層 $\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{A}}$ について $\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{A}} = 0$ が成立することを示す. このことを示すには, 導分の第一短完全系列から

$$\iota(a)^* \Omega^1_{\mathcal{A}/R} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{A}/R} \tag{3}$$

という標準的射が全射であることを示せばよい.

$\Omega^1_{\mathcal{A}/R}$ は大域切断 $\Omega_1, \ldots, \Omega_g$ により生成される層であり, これらは $\Omega_i \circ \iota(a) = \sigma_i(a)\Omega_i$ を $i = 1, \ldots, g$ で満たしている. $\sigma_i(a) \in R^\times$ であるので $\iota(a)$ による標準的射の全射性は確かに良い. したがって, $\iota(a)$ がエタールとなる. 特に, $\iota(a)$ を単位切断 $e : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathcal{A}$ で基底変換した $\mathcal{A}[\overline{\mathfrak{L}}^n] \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ もエタール射となる. □

この補題より, $\mathcal{A}[l^n]_{/R}$ の連結成分が $\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]_{/R}$ であることがわかる. 特に, $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ は g 次元の形式 Lie 群となり, $\mathcal{A}_{/R}$ は通常良還元を持つ.

2.3. **形式群.** 本節では前節で定義した形式 Lie 群 $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ の直積における閉部分形式 Lie 群について調べる. 本稿では, 素数 l と K に対して次のような条件を加える.

- K の最大総実部分体 K^+ として, l 上の K^+ における素イデアル $\mathfrak{l}$ は唯 1 つしかない. さらに $\mathfrak{l} = (\lambda)(\overline{\lambda})$ が成立する.

ここで, 補題 2.6 での $\mathfrak{L}$ と一致するように素イデアル λ をとる. $\mathcal{O} := \mathrm{End}_R(\widehat{\mathcal{A}}) \subset \mathrm{End}_{\widehat{R}}(\widehat{\mathcal{A}}) \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda}$ として定義する. ただし, $\widehat{R}$ は R の極大イデアルによる完備化とした. $\mathcal{O}$ の環構造は次のように記述される.

補題 2.7. $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O} \simeq R \cap \mathcal{O}_{K,\lambda}$ という環としての包含と同型が存在する．ここで, $R \cap \mathcal{O}_{K,\lambda}$ という交叉は $\widehat{R}$ においてとる．特に, $\mathcal{O}$ は単項イデアル整域である．

証明．最初の包含 $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}$ は明らかである．そこで, 2 つ目の同型 $\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda} \cap R$ を示す．$\widehat{\mathcal{A}}_{/R} = \mathrm{Spf}(R[[t_1, \ldots, t_g]])$ であり, $\mathrm{End}_R(\widehat{\mathcal{A}})$ の元 a は, $a \in \mathcal{O}_{K,\lambda}$ で, a が定める $\widehat{R}$ 上の形式群の準同型 $[a] : \widehat{R}[[t_1, \ldots, t_g]] \longrightarrow \widehat{R}[[t_1, \ldots, t_g]]$ が $R[[t_1, \ldots, t_g]] \longrightarrow R[[t_1, \ldots, t_g]]$ を与える元である．これは特に, $M[[t_1, \ldots, t_g]] \longrightarrow M[[t_1, \ldots, t_g]]$ を定める．逆に, $a \in \mathcal{O}_{K,\lambda}$ で $[a] : M[[t_1, \ldots, t_g]] \longrightarrow M[[t_1, \ldots, t_g]]$ を与えるようなものは $\mathcal{O}$ の元となる．$\widehat{\mathcal{A}}$ は M 上に基底変換すると, 形式対数が存在するので $\widehat{\mathbb{G}_a}^g$ と形式群として M 上同型である．今, $a \in \mathcal{O}_{K,\lambda} \cap R$ であれば, $[a]$ が定める M_v 上の形式群 $\widehat{\mathbb{G}}^g_{a/M_v}$ の自己準同型は M 上定義される．したがって, $a \in \mathcal{O}$ となることがわかる．逆の包含は, $a \in \mathcal{O}$ の時には $\Omega^1_{\widehat{\mathcal{A}}_{/R}} \longrightarrow \Omega^1_{\widehat{\mathcal{A}}/R}$ を定めることにより, $a \in R$ であるので確認される．以上のことから, $a \in \mathcal{O}_{K,\lambda} \cap R$ が $a \in \mathcal{O}$ であることと同値であることが確認されたので主張を得る．$R \cap \mathcal{O}_{K,\lambda}$ は整閉整域であり, $\mathrm{Frac}(\mathcal{O})$ の整数環の局所化で得られる．したがって $\mathcal{O}$ は単項イデアル整域である． □

$R = \mathcal{O}_{M,(v_l)} \subset M$ という v_l での局所化を極大イデアルで完備化したものを $\widehat{R}$ とかく．Tate により, 次のことが示されている．

定理 2.8 ([Tate67])**.** 体 k を剰余標数 l であるような完備ネータ局所環 $\widehat{R}$ の標数 0 の商体とする．この時, 以下のような共変である充満忠実関手が存在する．

$$\{\widehat{R} \text{ 上の } l \text{ 可除群のなす圏 }\} \to \{\text{ 連続な } G_k \text{ 作用を持つ階数有限自由 } \mathbb{Z}_l \text{ 加群のなす圏 }\}.$$

ここで, 左辺から右辺は *Tate* 加群をとることで構成する．さらに, $\widehat{R}$ 上の連結な l 可徐群の圏と $\widehat{R}$ 上の l 可徐形式 *Lie* 群の圏の間には圏同値が存在する．

また, 有限体上の単純アーベル多様体については, 次のことが示されている．

定理 2.9 ([Tate66])**.** k を有限体とする．$A_{/k}$ を単純アーベル多様体とし, その幾何的 *Frobenius* $\pi_A \in \mathrm{End}_k(A)$ とする．この時, $\mathbb{Q}(\pi_A) \subset \mathrm{End}_k(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は斜体 $\mathrm{End}_k(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の中心と一致する．

$\widehat{R}$ 上の形式 Lie 群 $\mathcal{A}_{/\widehat{R}}$ の部分形式 Lie 群を定義する．以下では, $\widehat{R}$ の剰余体を κ とする．初めに $\widehat{\mathcal{A}}_{/\widehat{R}}$ の閉部分形式群スキームについて次が示される．

補題 2.10. 形式 *Lie* 群 $\widehat{\mathcal{A}}$ の, $\widehat{\mathcal{A}}$ と一致しないような R 上閉部分形式群スキームの l 進 *Tate* 加群は自明である．

補題の証明．$\widehat{\mathcal{A}}_{/\widehat{R}}$ が主張の反例となる非自明な部分形式群スキーム $\mathcal{G}_{/\widehat{R}}$ を含むとする．この時, M を素点 v_l で完備化した体を k としたとき, $\mathcal{G}_{/\widehat{R}}$ の Tate 加群, $Y := \varprojlim_n \mathcal{G}[l^n](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ は, G_k の作用で安定かつ非自明な部分 $\mathbb{Z}_l$ 加群 $Y \subset \varprojlim_n \mathcal{A}[\lambda^n](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) =: T\widehat{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda}$ を与える．$\mathcal{A}_{/R}$ の還元 $\widetilde{A}_{/\kappa}$ に, 定理 2.9 を用いることで, $\widetilde{A}$ の幾何的 Frobenius を与える $\pi \in \mathcal{O}_K \simeq \mathrm{End}_R(\mathcal{A}) \subset \mathrm{End}_\kappa(\mathcal{A})$ が存在し, $\mathbb{Q}(\pi) = K$ が成立することが従う．特に $\mathbb{Z}[\pi] \subset \mathcal{O}_K$ は, K の整環となる．$Y \subset T\widehat{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda}$ は特に, $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ の非自明な部分 $\mathbb{Z}_l[\pi]$ 加群を定めている．他方, $\mathbb{Z}[\pi] \subset \mathcal{O}_K$ は整環であるので, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_l} Y = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_l} T\widehat{\mathcal{A}}$ である．ここで, $\mathbb{Z}[\pi] \subset \mathcal{O}_K \hookrightarrow \mathrm{End}_{\widehat{R}}(\widehat{\mathcal{A}})$ を介して $\mathbb{Z}[\pi]$ は Y に作用することに注意する．

ゆえに, $\mathcal{G}_{/\widehat{R}}$ は $\widehat{\mathcal{A}} = \mathrm{Spf}(\widehat{R}[[T_1, \ldots, T_g]])$ としたとき, $\widehat{\mathcal{A}}$ の $\widehat{R}$ 上 g 次元な部分形式群スキームとなる．従って, $\mathcal{G} = \widehat{\mathcal{A}}$ が成立してしまい, $\mathcal{G}$ を非自明な $\widehat{\mathcal{A}}$ の部分形式群スキームと仮定していたことに矛盾する． □

次に, $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ の直積における, 或る閉部分形式 Lie 群について調べる．

補題 2.11. $\mathcal{A}^s[\lambda^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ の l 可除部分群[4] H とする．$H \subset \widehat{\mathcal{A}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ の形式 *Lie* 群 $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ における *Zariski* 閉包 $\overline{H} \subset \widehat{\mathcal{A}}^s$ は R 上の閉部分形式 *Lie* 群 $\mathcal{H} \subset \widehat{\mathcal{A}}^s$ を与える．さらに, $\mathcal{H}$ が $\mathcal{A}[\lambda^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) \not\subset \mathcal{H}[l^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ を満たすよう

[4] l 可徐群とは l 倍写像が全射準同型になるアーベル群のことである．

な閉部分形式 *Lie* 群であるとする．ある $\alpha_i \in \mathcal{O}$, $i = 1, \ldots, n$ が存在して, $\mathcal{H} \subset \mathrm{Ker}(\Phi)$ が成立するように, 次のような射 Φ が構成できる．

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \circ \mathrm{pr}_i : \widehat{\mathcal{A}}^s \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}.$$

ここで, pr_i は第 i 成分への射影とした．

注意 2.12. この補題は, *Schneps*[Sch87] の補題 *1*, 補題 *2*, 補題 *3* の形式群に対する類似である．ここで, *Schneps* の補題では楕円曲線を扱っているが, 同じ証明手法で本補題の $\widehat{\mathcal{A}}$ の代わりに, 体上定義されたアーベル多様体を用い, $\mathcal{H}$ の代わりに非自明な閉部分アーベル多様体に置き換えた主張が得られることに注意する．

補題の証明．1 つ目の主張を示す．$\overline{H} \subset \widehat{\mathcal{A}}^s_{/R}$ という形式的スキームにおける閉部分形式的スキーム $\overline{H}$ を考える．これが, $\widehat{\mathcal{A}}^s_{/R}$ における乗法 m, 及び逆 ι で, $\overline{H}$ の乗法, 逆を well-defined に定めることを示す．逆についての証明は同様なので, 乗法に対する証明のみ行う．$\widehat{\mathcal{A}}^s = \mathrm{Spf}(R[[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_s]])$ として g 個の変数のペア $\underline{X}_i$ を用いて表示する．$\widehat{\mathcal{A}}^s$ の形式群則 ϕ を考える．これは, $2gs$ 変数べき級数のペアである．

$H \subset \overline{H}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ という部分集合について, H がアーベル群であることから, $m(H \times H) \subset \overline{H}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ であることがわかる．H が $\overline{H}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ で稠密であることに注意する．ゆえに, $\overline{H} = \mathrm{Spf}(R[[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_s]]/J)$ として, イデアル J をとれば, 任意の $f \in J$ について $f \circ \phi$ は $\overline{H}$ で稠密な部分集合 H においてゼロになる．したがって, $\overline{H}$ は形式群則で安定であることが示された．

同様にして, $[l] : \overline{H}[l^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) \longrightarrow \overline{H}[l^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ が全射的であることもわかる．l 可徐群の構造定理から, $\overline{H}[l^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ が, アーベル群として $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$ の有限直和と同型であることに注意する．今, $\overline{H}[l^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) \subset \mathcal{A}^s[\lambda^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ であり, $\mathcal{A}^s[\lambda^n]$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ に基底変換すれば, 有限群スキームとして μ_{l^n} の有限個の直積と同型で, $\overline{H}[l^n](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ もまた, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ 上では有限個の μ_{l^n} の直積と同型である．ゆえに, $\{\overline{H}[l^n]\}$ は連結な l 可徐群となる．したがって, $\overline{H}$ を $\widehat{R}$ に基底変換すれば, 定理 2.8 により形式 Lie 群となるので, 閉部分群スキーム $\overline{H}$ は, 閉部分形式 Lie 群であったことが示された．

次に, このようにして $\overline{H}$ に群構造を入れた $\widehat{\mathcal{A}}^s_{/R}$ の閉部分形式 Lie 群 $\mathcal{H}$ について, 2 番目の主張を示す．以下では, 特にこれが非自明な閉部分形式 Lie 群であるとする．$T_\lambda \mathcal{A}^s := \varprojlim_n \mathcal{A}^s[\lambda^n] \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda} b_1 + \ldots + \mathcal{O}_{K,\lambda} b_s$ として, $b_1, \ldots, b_s$ を基底に持つ Tate 加群を定義する．$T_\lambda \mathcal{A}^s$ の部分 $\mathbb{Z}_l$ 加群 $C := T_l \mathcal{H} := \varprojlim_n \mathcal{H}[l^n]$ と定義する．$R = \mathcal{O}_{M,(v_l)}$ で, v_l における M の完備化 $k := M_{v_l}$ とする．

補題 2.10 と同様にして, $A_{/k}$ の幾何的 Frobenius $\pi \in \mathrm{End}_k(A) \simeq \mathcal{O}_K$ を用いて, $\mathcal{O}_K$ の部分環 $\mathbb{Z}[\pi] \subset \mathcal{O}_K$ を構成すれば, これは整環となる．さらに, 定義より $\mathcal{H}, \widehat{\mathcal{A}}$ は R 上で定義されるので, $C, T_\lambda \mathcal{A}^s$ はいずれも $\mathbb{Z}_l[\pi]$ 加群である．ここで, $\lambda = \lambda_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_K$ としていたことを踏まえ, $T_\lambda \mathcal{A}^s$ には $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l$ が, 自然な射影 $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathcal{O}_{K,\lambda}$ を介して作用することに注意する．特に, $\mathbb{Z}_l[\pi] \hookrightarrow \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathcal{O}_{K,\lambda}$ を, 包含と自然な射影の合成とし, その像を $\mathcal{O}_l$ とすれば, $T_\lambda \mathcal{A}$, 及び C には $\mathbb{Z}_l[\pi]$ が $\mathbb{Z}_l[\pi] \longrightarrow \mathcal{O}_l$ を介して作用する．$\mathbb{Z}[\pi]$ が K の整環であることより, $\mathcal{O}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l \simeq K_\lambda$ である．

$C \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ は K_λ ベクトル空間として階数 r であるとする．もし, $r = s$ であるとすれば, 補題 2.10 を踏まえて, $\widehat{R}$ 上の形式 Lie 群の同型 $\widehat{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{H}$ を得るが, これは $\mathcal{H}$ が $\mathcal{A}[\lambda^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) \not\subset \mathcal{H}[l^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ を満たすとしていたことに矛盾する．

ゆえに, $r < s$ でなければならない．

さて, そこで, $C \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ という K_λ ベクトル空間を考える．環 S 上の l 可除群 $\mathcal{G}$ に対し, 零元での接空間を $t_{\mathcal{G}}(S)$, 余接空間を $t^*_{\mathcal{G}}(S)$ とする．また, $\mathcal{G}'_{/S}$ でその Cartier 双対とする．

Hodge-Tate 分解により, 次のような $\mathbb{C}_l[\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)]$ 加群としての同型を得る ([Tate67] を参照されたい).

$$T_\lambda \mathcal{A}^s \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{C}_l \simeq t^*_{\widehat{\mathcal{A}}^{s,\prime}}(\mathbb{C}_l) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}(\mathbb{C}_l(-1), t_{\widehat{\mathcal{A}}^s}(\mathbb{C}_l)).$$

$t^*_{\widehat{\mathcal{A}}^{s,\prime}}(M) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}(M(-1), t_{\widehat{\mathcal{A}}^s}(M)) =: X$ として M 上のベクトル空間を考え, その部分空間 Y を, 次のように定義する．

$$Y := t^*_{\mathcal{H}'}(M) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}(M(-1), t_{\mathcal{H}}(M)).$$

すると, これらは次の包含関係を満たしている.

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i=1}^{s}\mathbb{C}_l b_i & = & X\otimes_M \mathbb{C}_l & \supset & Y\otimes_M \mathbb{C}_l \\ \cup & & \cup & & \cup \\ T_\lambda\mathcal{A}^s & = & T_\lambda\mathcal{A}^s & \supset & T\mathcal{H}. \end{array}$$

ここで, 上記の包含関係において, $\mathcal{H}$ に対して Hodge-Tate 分解を考えることで $T\mathcal{H}\otimes_{\mathcal{O}_l}\mathcal{O}_{K,\lambda}=T_\lambda\mathcal{A}\cap Y\otimes_M\mathbb{C}_l$ が成立することに注意する.

$T_\lambda\mathcal{A}^s\cap Y$ という $\mathcal{O}_{K,\lambda}\cap M=\mathcal{O}$ 自由加群の基底を $f_1,\ldots,f_r$ とする. $f_i\in\mathcal{O}b_1+\ldots+\mathcal{O}b_s=T_\lambda\mathcal{A}^s\cap X$ であるので, f_i は, $c_{ij}\in\mathcal{O}$ を用いて, $f_i=\sum_{j=1}^{s}c_{ij}b_j$ と記述される.

次のような, $\widehat{R}$ 上の形式 Lie 群における射 τ_i を各 $i=1,\ldots,r$ に対して考える. ただし, Δ は対角閉埋め込みとする.

$$\tau_i:\widehat{\mathcal{A}}\xrightarrow{\Delta}\widehat{\mathcal{A}}^s\xrightarrow{(c_{ij})}\widehat{\mathcal{A}}^s; x\mapsto(x,\ldots,x)=(x_1,\ldots,x_s)\mapsto(c_{i1}x_1,\ldots,c_{is}x_s).$$

この射 τ_i, $i=1,\ldots,r$ を用いて, 次の射を考える.

$$\tau:=\tau_1\widehat{\oplus}\ldots\widehat{\oplus}\tau_r:\widehat{\mathcal{A}}^r\longrightarrow\widehat{\mathcal{A}}^s;(x_1,\ldots,x_r)\mapsto(\sum_{i=1}^{r}c_{ij}x_i)_j \tag{4}$$

このような τ の像として $\widehat{R}$ 上定義された $\widehat{\mathcal{A}}^s$ の閉部分形式群スキーム $\widehat{C}$ を定義する. この $\widehat{\oplus}$ は, 形式 Lie 群 $\widehat{\mathcal{A}}^s_{/\widehat{R}}$ における加法であるとした. $\widehat{C}$ は $\mathcal{H}$ に対する証明と同様にして, $\widehat{R}$ 上の形式 Lie 群であることが確認できる.

この時, $\widehat{C}_{/\widehat{R}}$ の構成法により, $T_l\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Z}_l}\mathbb{Q}_l=T_l\widehat{C}\otimes_{\mathbb{Z}_l}\mathbb{Q}_l$ が成立する. 実際, この等号は (4) と, 任意の $\sum_{i=1}^{r}x_if_i\in T_l\mathcal{H}$ が満たす, 次の等式から従う.

$$\sum_{i=1}^{r}x_if_i=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_ic_{ij}b_j=\sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r}c_{ij}x_i)b_j.$$

特に, 或る正の整数 n,m が存在し, $l^nT_l\mathcal{H}\subset l^mT_l\widehat{C}\subset T_l\mathcal{H}$ という包含関係が成立する.

したがって, 以上のことから, $\mathcal{O}_l[G_k]$ 加群 $C=T_l\mathcal{H},T_l\widehat{C}=:D$ という $T_\lambda\mathcal{A}^s$ の部分 $\mathcal{O}_l[G_k]$ 加群が, $\mathcal{O}_l$ 部分加群として, $l^nC\subset l^mD\subset C$ を満たすことがわかったので, $\mathcal{O}_l[G_k]$ 加群として包含 $l^nC\subset l^mD\subset C$ が成立する. 他方, 定理 2.8 により, これは $[l^m]:\widehat{C}\longrightarrow\mathcal{H}$ という形式 Lie 群の間の射が存在することを示している. ゆえに, $\widehat{\mathcal{A}}^s$ の閉部分形式 Lie 群として $\mathcal{H}=\widehat{C}$ である.

さて, f_i の構成から

$$(f_1,\ldots,f_r)=(b_1,\ldots,b_s)P$$

という $P\in M_{s,r}(\mathcal{O})$ が構成できる. 単因子論から或る, $a_1,\ldots,a_r\in\mathcal{O}$, 及び $Q_1\in\mathrm{GL}_s(\mathcal{O}),Q_2\in\mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$ が取れて, 次のような等式が成り立つ.

$$Q_1PQ_2=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in M_{s\times r}(\mathcal{O})$$

そこで $Q_1^{-1}:\widehat{\mathcal{A}}^s\longrightarrow\widehat{\mathcal{A}}^s$ という R 上定義された射と, $\mathrm{pr}_{r+1}:\widehat{\mathcal{A}}^s\longrightarrow\widehat{\mathcal{A}}$ という第 $r+1$ 成分への射影を合成した $\Phi:\widehat{\mathcal{A}}^s\longrightarrow\widehat{\mathcal{A}}$ を考える. すると, $\Phi(\mathcal{H})=\Phi(\widehat{C})=0$ となるので, Φ が R 上定義されることを踏まえて補題の主張が従う. □

次に $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ の対数を定義する.

2.4. **対数.** (1) のようにして定義される平行移動不変な微分形式 $\{\Omega_i\}$, $(i=1,\dots,g)$ をとる. $\{\widehat{\Omega_i}\}$, $(i=1,\dots,g)$ を, この微分形式より誘導される $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ 上の微分形式とする. 本節以降, 特に記述がない場合 $\widehat{\mathcal{A}}$ を R 上の形式リー群 $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ のこととする. この形式リー群 $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ を M に基底変換したとき, 次のような M 上の形式的対数 $\log_{\mathcal{A}}$ が存在する. ([BK07, p.27, Section 2.3, p.28, Proposition 2.14] の証明を参照されたい).

補題 2.13. $\widehat{\mathcal{A}}$ を M に基底変換したとき, M 上の形式 *Lie* 群の同型

$$\log_{\mathcal{A}} = (\log_1,\dots,\log_g) : \widehat{\mathcal{A}}_{/M} \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}}_{a/M}^{g}$$

がとれ, $\mathcal{A}_{/R}$ の $0_{\mathcal{A}}$ 周りにおける適切な局所パラメータ $t := (t_1,\dots,t_g)$ に対して, 任意の $i=1,\dots,g$ で次のような性質を満たす.

$$d\log_i(t) = \widehat{\Omega_i},\ \log_i(t) \equiv t_i \mod (t_1,\dots,t_g)^2.$$

注意 2.14. このような形式対数は, R 上は定義できない. 次の 2.3 節 *2.18* の $g=1$ の場合の例を参照されたい. ここでは, 完備アーベルスキームについて形式対数を定義したが, 同様にして $\mathbb{Z}_p$ 上平坦なアディック環[5]R 上の形式リー群に対して $R[1/p]$ 上対数が定義できる.([Ds22, p.320] を参照のこと.)

証明. まず, $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ の零元周りでの任意の局所パラメータ t を固定する. 各 $i=1,\dots,g$ に対して, 或る M 係数形式べき級数 $\log_i \in M[[t]]$ が存在して $d\log_i = \widehat{\Omega_i}$ が成立することを示す. $\widehat{\mathcal{A}}$ の形式群から $\widehat{\mathbb{G}}_a^g$ への M 上の同型 F が存在することが知られている ([Ha10] 参照). この逆を G と定義する.

$\widehat{\Omega_i}$ は, 定義から平行移動不変な微分形式である. ゆえに, $G^*\widehat{\Omega_i}$ は $\widehat{\mathbb{G}}_{a/M}^{g}$ 上の平行移動不変な微分形式である. 特に, $d(G^*\widehat{\Omega_i}) = 0$ を満たすことがわかる. したがって, 或る M 係数形式べき級数 $H(T)$ が存在して $dH(T) = G^*\widehat{\Omega_i}$ が成立する. 以上のことから, $\widehat{\Omega_i} = F^*G^*\widehat{\Omega_i} = d(H(F(t)))$ が性質するので, M 係数の t による形式べき級数 $\log_i$ が取れて $d\log_i = \widehat{\Omega_i}$ となる. この際, $\log_{\mathcal{A}}$ という M 係数形式べき級数に定数項が存在しないようにとれることに注意する. 単位切断 $e : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathcal{A}$ により, Ω_i, $(i=1,\dots,g)$ を引き戻すと, Ω_i, $i=1,\dots,g$ の定義より

$$\langle dt_1,\dots,dt_g\rangle_R = \langle e^*\Omega_1,\dots,e^*\Omega_g\rangle_R$$

が成立している. したがって, t_i, $(i=1,\dots,g)$ を取り換えることで $e^*\widehat{\Omega_i} = dt_i$, $i=1,\dots,g$ が成立するとしてよい. 以上のことから, 各 i に対して $d\log_i = \widehat{\Omega_i}$ と合わせて次を得る.

$$\log_i(t) \equiv t_i \mod (t_1,\dots,t_g)^2.$$

最後に, この $\log_{\mathcal{A}} = (\log_{\mathcal{A}},\dots,\log_{\mathcal{A}})$ が形式群の準同型を与えていることを示す. $\mathcal{A}_{/R}$ の積から定まる余積

$$m^* : R[[t]] \longrightarrow R[[t]] \otimes_R R[[t']] \simeq R[[t,t']]$$

が定まり, $F_{\widehat{\mathcal{A}}} := (F_{\widehat{\mathcal{A}},1},\dots,F_{\widehat{\mathcal{A}},g})$, $F_{\widehat{\mathcal{A}},i} := m^*(t_i) \in R[[t,t']]$ とする.
この時, 各 $i=1,\dots,g$ に対して

$$\log_i(F_{\widehat{\mathcal{A}},1}(t,t'),\dots,F_{\mathcal{A},g}(t,t')) = \log_i(t) + \log_i(t')$$

が成立することを示せばよい. このことは, 外微分 d を作用させることと, $d\log_{\widehat{\mathcal{A}}} = (\widehat{\Omega_1},\dots,\widehat{\Omega_g})$ より, 次と同値である.

$$\widehat{\Omega_i}(t_1,\dots,t_g)|_{t_1=F_{\widehat{\mathcal{A}},1}(t,t'),\dots,t_g=F_{\widehat{\mathcal{A}},g}(t,t')} = \widehat{\Omega_i}(t) + \widehat{\Omega_i}(t').$$

他方, この等式は, Ω_i が平行移動不変な微分形式であることから従う. $\log_{\widehat{\mathcal{A}},i}$, $(i=1\dots,g)$ というべき級数はいずれも M 係数形式べき級数環において可逆であり, $\log_{\widehat{\mathcal{A}}}$ が M 上の形式リー群の間の同型を与えている. □

この補題 2.13 で与えた, 局所パラメータ $t=(t_1,\dots,t_g)$ を用いて記述される R 上の形式群 $F_{\widehat{\mathcal{A}}} := (F_{\widehat{\mathcal{A}},1},\dots,F_{\widehat{\mathcal{A}},g})$ を固定する.

---

[5]ある p を含むイデアルのべき乗を零元の開近傍系に持ち, 完備かつ分離的な位相環

2.5. **微分作用素.** M 上の形式リー群の同型 $\log_{\mathcal{A}} : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}_a^g}$, およびその逆 $\log_{\mathcal{A}}^{-1}$ により, 平行移動不変な微分作用素

$$D_{t_i} := D_i := (\log_{\mathcal{A}})^* \circ \partial_i \circ (\log_{\mathcal{A}}^{-1})^*,$$

$i = 1, \ldots, g$ が定まる. ここで, ∂_i は t_i に関する偏微分作用素. 先天的には, この微分作用素は M 上の形式べき級数環に作用するが, 実は R 上の形式べき級数環にも作用する.

補題 2.15. D_i, $i = 1, \ldots, g$ は $R[[t]]$ を $R[[t]]$ に移す微分作用素.

証明. $(F_{\widehat{\mathcal{A}},i}(t, t^{'}))_{i=1,\ldots,g} \in R[[t, t^{'}]]^{\oplus g}$ を $\widehat{\mathcal{A}}$ の乗法により与えられる形式群則としたとき,

$$\log_i(F_{\widehat{\mathcal{A}},1}(t, t^{'}), \ldots, F_{\widehat{\mathcal{A}},g}(t, t^{'})) = \log_i(t) + \log_i(t^{'})$$

が各 $i = 1, \ldots, g$ に対して成立する. そこで片々に, $D_{t_i^{'}}$ という $R[[t^{'}]]$ における微分作用素を $D_{t_i^{'}}(t_j) = 0$, $j = 1, \ldots, g$ で $R[[t, t^{'}]]$ に延長したものとして作用させ, $t^{'} = (0, \ldots, 0)$ を代入したものを比較する.

- 左辺に $D_{t_i^{'}}$ を作用させ, $t^{'} = 0$ を代入した式 :

$$\frac{\partial \log_i}{\partial T_1}|_{T=t} \cdot \frac{\partial F_{\widehat{\mathcal{A}},1}}{\partial T_i^{'}}|_{T^{'}=0} + \cdots + \frac{\partial \log_i}{\partial T_g}|_{T=t} \cdot \frac{\partial F_{\widehat{\mathcal{A}},g}}{\partial T_i^{'}}|_{T^{'}=0}$$

- 右辺に $D_{t_i^{'}}$ を作用させ, $t^{'} = 0$ を代入した式 :

$$(\log_{\widehat{\mathcal{A}}})^* \circ \partial_{t_i^{'}} \circ (\log_{\widehat{\mathcal{A}}}^{-1})^*(\log_i(t) + \log_i(t^{'})) = 1$$

同様の計算によって, 次の $g \times g$ 行列の等式を得る.

$$(\frac{\partial \log_i}{\partial t_j}(t))_{i,j} \times (\frac{\partial F_{\widehat{\mathcal{A}},i}}{\partial t_j^{'}}(t, 0))_{i,j} = \mathrm{I}_g$$

ここで, I_g が $g \times g$ の単位行列である.

この行列等式と, $(\frac{\partial F_{\widehat{\mathcal{A}},i}}{\partial t_j^{'}}(t, 0))_{i,j}$ が R 係数 $g \times g$ 行列であることにより, 次の性質を得る.

$$((\tfrac{\partial \log_i}{\partial t_j}(t))_{i,j})^{-1} \in M_{g \times g}(R) \tag{5}$$

この性質を用いて補題を証明する. $D_i(t_j) \in R[[t]]$ であることを 各 i, j に対して示せば十分.

$$D_i(t_j) = (\log_{\widehat{\mathcal{A}}})^* \circ \partial_i \circ (\log_{\widehat{\mathcal{A}}}^{-1})^*(t_j) = \frac{\partial \log_j^{-1}}{\partial t_i}(T)|_{T=\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)}$$

であることに注意する.

$$\log_i^{-1}(\log_1(t), \ldots, \log_g(t)) = t_i$$

が, $i = 1, \ldots, g$ に対して成立するので, 片々t_j で偏微分することにより, 各 i, j について次の等式を得る.

$$\frac{\partial \log_i^{-1}}{\partial T_1}|_{T=\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)} \cdot \frac{\partial \log_1}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial \log_i^{-1}}{\partial T_g}|_{T=\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)} \cdot \frac{\partial \log_g}{\partial t_j}(t) = \delta_{ij},$$

ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタである. 従って, 次の $g \times g$ も行列式を得る.

$$(\frac{\partial \log_i^{-1}}{\partial T_j}|_{T=\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)})_{i,j} \times (\frac{\partial \log_i}{\partial t_j})_{i,j} = \mathrm{I}_g$$

この等式に, 等式 (5) を用いることで, 任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して

$$D_i(t_j) = \frac{\partial \log_j^{-1}}{\partial t_i}(T)|_{T=\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t)} \in R[[t]]$$

を得る. □

以上のことから, 次のようにして平行移動不変な微分作用素を定義する.

定義 2.16. 多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_g) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^g$ として, 微分作用素 $\widehat{\partial}_A^{[\alpha]}$ を次のように定義する.

$$\widehat{\partial}_A^{[\alpha]} := D_1^{\alpha_1} \cdots D_g^{\alpha_g}.$$

注意 2.17. この作用素は任意の $f \in R[[t]]$ に対し次を満たすことに注意する.

$$\widehat{\partial}_A^{[\alpha]}(f(F_{\widehat{\mathcal{A}}}(t,t^{'}))) = (\widehat{\partial}_A^{[\alpha]}(f))(F_{\widehat{\mathcal{A}}}(t,t^{'})).$$

例 2.18. $g=1$ の場合には, 形式対数 $\log_{\mathcal{A}}(t)$ として $D_1 = 1/\log_{\mathcal{A}}^{'}(t) \times d/dt$ で与えられる. さらに, p が奇素数で $\mathcal{A}_{/R}$ が *Weierstrass* モデル $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ で与えられるとき, $\omega = -2dx/y, t = -2x/y$ に対する形式対数函数 $\log_{\mathcal{A}}$ は

$$(\log_{\mathcal{A}}(t))^{'} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(2m+3n)!}{(m+2n)!m!n!}(\frac{-g_2}{4})^m(\frac{-g_3}{4})^n t^{4m+6n}$$

と記述される ([Y13, Corollary 3] を参照).

3. 高次の Eisenstein 数

この節では, [KS24] で構成された l 進テータ函数を基にして, Eisenstein 数と深い関係のある $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ 上の形式函数を構成する. この結果は, [BKF15] における古典的な Eisenstein 数と関係深い形式函数の構成の拡張にあたる.

以下では, K を $\mathbb{Q}$ 上の次数 $2g$ の CM 体とし, p, l を相異なる素数とする. K^+ を K の最大総実部分体とする. また, 第 2 節と同様にして, 次のように記号を定義する.

(1) 体の埋め込み $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}, \iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}_p, \iota_l : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}_l$ とする.
(2) K 上の有限次代数拡大体 M とする.
(3) CM 型単純アーベル多様体 $A_{/M}$ のうち, $\iota : \mathcal{O}_K \simeq \mathrm{End}_M(A)$ を満たすものを固定する.
(4) そして l 上の素点 v_l で $\mathcal{O}_M$ を局所化した局所環 R とし, R 上の $A_{/M}$ の Neron モデル $\mathcal{A}_{/R}$ をとる.
(5) $\mathcal{A}_{/R}$ の双対アーベルスキームを $\mathcal{A}^{'}_{/R}$ とする. また, 自由 R 加群 $\Gamma(\mathcal{A}, \Omega^1_{\mathcal{A}/R})$ の R 加群としての基底 $\omega(A) = (\Omega_1, \ldots, \Omega_g)$ を, 第 2 節 (1) を満たすように定める. $\Gamma(\mathcal{A}^{'}, \Omega^1_{\mathcal{A}^{'}/R})$ の R 加群としての基底 $\omega(\mathcal{A}^{'})$ も $\omega(\mathcal{A})$ と同様にして定義する.
(6) Ω_i により (1) のように定まる K の CM 型 Σ_K とする.
(7) 各 $\sigma \in \Sigma_K$ に対し, $\lambda_\sigma := (\iota_l \circ \sigma)^{-1}(m_{\mathbb{C}_l}) \cap \mathcal{O}_K$ により K における素イデアルを定め, $\mathfrak{L} := \prod_{\sigma \in \Sigma_K} \lambda_\sigma$ とする.

必要であれば, ι を $\bar{\iota}$ に取り換えることで $\mathcal{A}[\mathfrak{L}]_{/R}$ が連結な有限群スキームであるようにする (本稿の補題 2.6 を参照されたい).

本節では, 特に K, M, および l について, 次の条件が満たされることを仮定する.

- l 上の K^+ における任意の素イデアルは K/K^+ で完全分解し, $M/\mathbb{Q}$ で p, l 上の任意の素点は, それぞれ p, l 上不分岐.

本節では新たに, 補助イデアルとして pl と互いに素であるような K の整イデアルを $\mathfrak{f}, \mathfrak{c}$ を固定する. 必要であれば, M に $A[\mathfrak{f}](\overline{\mathbb{Q}})$ の座標を添加することで, $\mathcal{A}[\mathfrak{f}](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) = \mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)$ が成立するとしてよい.

定義 3.1. $\Gamma_{\mathfrak{f}} := \{e \in \mathcal{O}_K^\times \mid e \equiv 1 \mod \mathfrak{f}\}$ という群とする. また,

$$\mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}}) := \{(\beta_{\overline{\sigma}}, \alpha_\sigma) \in \mathbb{N}^{\Sigma_K} \times \mathbb{N}^{\Sigma_K} | \prod_{\sigma \in \Sigma_K} \sigma(x)^{-\alpha_\sigma} \overline{\sigma}(x)^{\beta_{\overline{\sigma}}} = 1, x \in \Gamma_{\mathfrak{f}} \text{ は任意}, \beta \geq 0, \alpha \geq 1\}$$

と定める.

$A_{/\mathbb{C}}$ を $\mathcal{A}_{/R}$ の基底変換とし, $\pi : A \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ を構造射とする. $\omega_{A/\mathbb{C}} := \pi_*\Omega^1_{A/\mathbb{C}}$ と定義したとき, A の自己同型環 $\mathcal{O}_K$ が引き戻しにより作用し, $\omega_{A/\mathbb{C}}$ は $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群となる. $\mathrm{Lie}(A/\mathbb{C}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\omega_{A/\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ を, その双対として定義される $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群とする.

一般に, $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群 B に対し, $\overline{B}$ を次のように定義する. $\overline{B} \simeq B$ がアーベル群として成立し, $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群としての積を, $c_1 \otimes c_2 \cdot b := (\overline{c_1} \otimes c_2)b$, $(c_1 \in \mathcal{O}_K,\ c_2 \in \mathbb{C},\ b \in B)$ によって定義する.

補題 3.2. $\overline{\omega_{A/\mathbb{C}}} := \overline{\pi_*\Omega^1_{A/\mathbb{C}}}$ とする. この時, $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群の自然な同型 $\overline{\omega_{A/\mathbb{C}}} \simeq \mathrm{Lie}(A^{'}/\mathbb{C})$ が存在する.

証明. Hodge 短完全列

$$0 \longrightarrow \omega_{A/\mathbb{C}} \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(A/\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Lie}(A^{'}/\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

が $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群として分裂し, また $\omega_{A/\mathbb{C}}$, $\mathrm{Lie}(A^{'}/\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(\omega_{A^{'}/\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ の $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群としての作用が, それぞれ $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}(\Sigma_K)$, $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}(\overline{\Sigma}_K)$ を経由する. ここで, $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群 B に対して $B(\Sigma_K)$, $B(\overline{\Sigma}_K)$ の定義は, 本稿の記法の節を参照.

このことから, 次の同型が得られる.

$$H^1_{\mathrm{dR}}(A/\mathbb{C})(\Sigma_K) \simeq \omega_{A/\mathbb{C}}, H^1_{\mathrm{dR}}(A/\mathbb{C})(\overline{\Sigma}_K) \simeq \mathrm{Lie}(A^{'}/\mathbb{C}).$$

更に, 定義より $\overline{H^1_{\mathrm{dR}}(A/\mathbb{C})(\Sigma_K)} = H^1(A/\mathbb{C})(\overline{\Sigma}_K)$ である. したがって, $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群の同型 $\overline{\omega_{A/\mathbb{C}}} \simeq \mathrm{Lie}(A^{'}/\mathbb{C})$ が得られる. □

$H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ には標準的な $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群の構造[6]が入っている. このことにより, 次の $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群のペアリングが定義できる.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C}), \mathbb{C}) \times H_1(A, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}; (f, l) \mapsto (x \mapsto f(xl)),$$

但し $x \in \mathcal{O}_K$ とした. ここで, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ に注意する. したがって, 周期ペアリング $H^1_{dR}(A/\mathbb{C}) \times H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ により与えられる $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H_1(A, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq H^1_{dR}(A/\mathbb{C})$ を用いることで

$$H^1_{dR}(A/\mathbb{C}) \times H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$$

というペアリングが定まる. 以下, このペアリングから, 次のようなペアリングを構成する.

$$\langle , \rangle : \overline{\omega_{A/\mathbb{C}}} \times \omega_{A^{'}/\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}(\overline{\Sigma}_K)$$

ここで $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}(\overline{\Sigma}_K)$ の定義については, 本稿冒頭の記法の節を参照されたい.

まず, Hodge 短完全列

$$0 \longrightarrow \omega_{A/\mathbb{C}} \longrightarrow H^1_{dR}(A/\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Lie}(A^{'}/\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

から, 補題 3.2 により同型 $\overline{\omega_{A/\mathbb{C}}} \simeq H^1_{dR}(A/\mathbb{C})(\overline{\Sigma}_K)$ が取れる. 同様に,

$$H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1_{dR}(A/\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq H^1_{dR}(A^{'}/\mathbb{C})$$

を踏まえて, Hodge 短完全列から $\omega_{A^{'}/\mathbb{C}} \simeq H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C})(\overline{\Sigma}_K)$ という同型がとれる. したがって, 定義した $H^1_{dR}(A/\mathbb{C}) \times H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ を制限した $H^1_{dR}(A/\mathbb{C})(\overline{\Sigma}_K) \times H_1(A, \mathbb{C})(\overline{\Sigma}_K) \longrightarrow \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ により $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群のペアリング

$$\langle , \rangle : \overline{\omega_{A/\mathbb{C}}} \times \omega_{A^{'}/\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}(\overline{\Sigma}_K) \tag{6}$$

が定義される. このペアリングと, 先に固定した $\omega_{\mathcal{A}/R}$ の自由 R 加群としての基底 $\omega(\mathcal{A})$ と, 同様に定義した $\omega_{\mathcal{A}^{'}/R}$ の自由 R 加群としての基底 $\omega(\mathcal{A}^{'})$ を用いて次のように $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}(\overline{\Sigma}_K)$ の元 $\langle \overline{\omega(\mathcal{A})}, \omega(\mathcal{A}^{'}) \rangle$ を定義する. ここで定義から $\omega(\mathcal{A})$ (resp, $\omega(\mathcal{A}^{'})$) は $\omega_{\mathcal{A}/R}$ (resp. $\omega_{\mathcal{A}^{'}/R}$) の階数 1 自由 $R \otimes \mathcal{O}_K$ 加群としての生成元を与えていたことに注意する.

定義 3.3. $\omega(\mathcal{A}), \omega(\mathcal{A}^{'})$ は, $R \subset \mathbb{C}$ による基底変換により誘導される射 $\omega_{\mathcal{A}/R} \longrightarrow \omega_{A/\mathbb{C}}$, $\omega_{\mathcal{A}^{'}/R} \longrightarrow \omega_{A^{'}/\mathbb{C}}$ によって, それぞれ $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群としての $\omega_{A/\mathbb{C}}$, $\omega_{A^{'}/\mathbb{C}}$ の生成元を与えている. この生成元もそれぞれ $\omega(\mathcal{A}), \omega(\mathcal{A}^{'})$ と書くことにする. $\omega(\mathcal{A})$ により, $\overline{\omega_{A/\mathbb{C}}}$ の $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}$ 加群としての生成元が定まるが, この生成元を $\overline{\omega(\mathcal{A})}$ とする.

そこで, それぞれの生成元のペアに関する $\langle , \rangle$ による像として $\langle \overline{\omega(\mathcal{A})}, \omega(\mathcal{A}^{'}) \rangle \in \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}(\overline{\Sigma}_K) = \mathbb{C}^{\overline{\Sigma}_K}$ を定義する.

[6] $\mathcal{O}_K \simeq \mathrm{End}_M(A)$ により, $\gamma \in H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ への $g \in \mathcal{O}_K$, つまり $g : A(\mathbb{C}) \longrightarrow A(\mathbb{C})$ による作用として $\gamma : [0, 1] \longrightarrow A(\mathbb{C})$ との合成 $g \cdot \gamma := g \circ \gamma$ で定義する.

定義 3.4. 高次の *Eisenstein* 数とは, $\Gamma_{\mathfrak{f}} \subset \mathcal{O}_K^\times$: mod $\mathfrak{f}$ で 1 と合同な数よりなる部分群, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^g \times \mathbb{N}^g$ が $(\beta, \alpha+1) \in \mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$ を満たすとき, $x \in \mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ に対して

$$EK_\Gamma^{\beta,\alpha}(f_{[c]}, x) := \frac{(-1)^{g(g-1)/2}}{\langle \overline{\omega(\mathcal{A})}, \omega(\mathcal{A}')\rangle^\beta} \cdot \alpha! \sum_{t \in \Gamma \backslash c^{-1}\Lambda_A/\Lambda_A} f_{[c]}(-t) E^{\beta,\alpha+1}(t+x, 0; \Lambda, \Gamma_{\mathfrak{f}}) \tag{7}$$

により定義される数である.[7] ここで, 指数有限な部分群 $\Gamma \subset \mathcal{O}_K^\times$ に対して次のように $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > \frac{|\beta|-|\alpha|}{2} + g$ で絶対収束する次のような s に関する正則函数を定義する.

$$E^{\beta,\alpha}(t, s; \Lambda_A, \Gamma) := \sum_{\mathfrak{l} \in \Gamma \cdot t + \Lambda_A/\Gamma} \frac{\bar{\mathfrak{l}}^\beta}{\mathfrak{l}^\alpha N(\mathfrak{l})^{2s}}.$$

この函数は s に関して負の実軸での整数点上を除いた全複素平面に解析接続される ([KS24, Lemma 3.26] を参照). 以下では, $E^{\beta,\alpha}(t; \Lambda_A, \Gamma) := E^{\beta,\alpha}(t, 0; \Lambda_A, \Gamma)$ とも記述する.

この (7) における $f_{[c]}$ は, 有限群スキーム $\mathcal{A}[c]_{/R}$ の単位元 $e = e_{\mathcal{A}[c]}$ として

$$f_{[c]} := (Nc)1_e - 1_{\mathcal{A}[c]} \tag{8}$$

で定義される $\mathcal{A}[c]_{/R}$ の函数体の元である. $\mathcal{A}[c]$ は R 上エタールなので, この元 $f_{[c]}$ は $\mathcal{A}[c]_{/R}$ 上の大域切断を定めることに注意する. ここで必要であれば, M を拡大体に取り換えることで, $\mathcal{A}[c](M) = \mathcal{A}[c](\overline{\mathbb{Q}})$ であるとしてよい.

このような Eisenstein 数は, 同変コホモロジー類として記述される. このコホモロジー類としての記述を基にして, 高次の Eisenstein 数は, ある形式函数の値として記述できるようになる.

3.1. **コホモロジー類として.** ここでは, Eisenstein-Kronecker 類を構成し, その類と Eisenstein 数の関係を記述する. $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ を指数有限部分群とする. 前節で定義した, $\mathcal{A}_{/R}$ というアーベルスキームに対して, $\mathcal{A}[c] := D \subset \mathcal{A}$ は $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ の作用で安定な閉部分スキームであるとする. ここで, c は, l と互いに素なので $D_{/R}$ はエタール. 以下,

$$R[D]^{0,\Gamma} := \ker(\Gamma(D, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\mathrm{tr}} R)^\Gamma$$

と定める. この tr とは有限平坦 R 代数のトレース写像のことである. この時, $j : U := \mathcal{A} - D \hookrightarrow A$, $i : D \hookrightarrow \mathcal{A}$ が取れて,

$$0 \longrightarrow j_!\mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \longrightarrow i_*i^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \longrightarrow 0$$

という $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ 加群短完全列が取れる. これに対して, $\mathcal{F}$ を, $\mathcal{A}$ 上の $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-$\Gamma$ 加群[8] として, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}(*, \mathcal{F})^\Gamma$ という関手の導来を取ることにより, 次の長完全系列が生じる.

$$\cdots \longrightarrow H^i_D(\mathcal{A}, \Gamma; \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(\mathcal{A}, \Gamma; \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(U, \Gamma; \mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}_D(\mathcal{A}, \Gamma; \mathcal{F}) \longrightarrow \tag{9}$$

この系列をもとにして,

$$f_{[c]} \in R[D]^{0,\Gamma}$$

に付随するコホモロジー類を構成する. $\mathcal{A} \times_R \mathcal{A}'$ 上の Poincare 層 P とする. P は可逆な $\mathcal{O}_{\mathcal{A} \times_R \mathcal{A}'}$ 加群である. この時,

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{\mathrm{id} \times \pi'} \mathcal{A}$$

[7] [KS24] ではより一般に " 高次の Eisenstein 数 " を研究しているが, ここではこの定義で十分である.

[8] ここでは, [Gro57] の意味で $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-$\Gamma$ 加群を定義している. 抽象群 G とし, 各 $g \in G$ が局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ について局所環付き空間の射 $g : X \longrightarrow X$ を与えるとする. $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_X$-G 加群であるとは, $\mathcal{F}$ のエタール空間に G が作用し, これが X への G の作用と可換であり, さらに

$$\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

という X 上の加群の層の標準的な射について G の作用と可換であることを意味する. $\mathcal{O}_X$-G 加群の層のなす加法圏は充分単射的対象を持つようなアーベル圏である.

の単位切断に沿った P の完備化を $\widehat{P}$ とする. $\mathcal{G} \in \{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}, \widehat{P}, \Omega^g_{\mathcal{A}/R}\}$ という加群の層には, Γ 作用が次のように定まる.

$$\gamma_\sharp^{-1} : \mathcal{G}_\tau \longrightarrow \mathcal{G}_{\gamma\cdot\tau}$$

, ここで $\mathcal{G}_\tau$ は $\tau \in \mathcal{A}$ における $\mathcal{G}$ の茎であり, $\gamma \in \Gamma$ とした.

例えば $\widehat{P}$ に対しては P の普遍性より

$$\gamma_\sharp^{-1} : \gamma^*\widehat{P} \simeq \widehat{P}$$

が定まり, Γ 作用を与えるような茎の間の同型が誘導される. ([KS24, Corollary 2.9] を参照).

これにより, $\widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-$\Gamma$ 加群となる.

この $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-$\Gamma$ 加群の同変コホモロジーは次のように計算される ([KS24, section 2.6] を参照).

補題 3.5. *$H^i(\mathcal{A}, \Gamma : \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$ は $i < g$ であれば 0 であり, $i = g$ の場合は R と同型. さらに,*

$$\Gamma(D, \mathcal{O}_D)^\Gamma \subset H^g_D(\mathcal{A}, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

という標準的単射が存在する.

ここで, (9) の式に $\mathcal{F} = \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}$ を用いれば

$$0 \longrightarrow H^{g-1}(U, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}) \longrightarrow H^g_D(\mathcal{A}, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}) \longrightarrow R$$

を得る. 補題の標準単射と合成した

$$\Gamma(D, \mathcal{O}_D)^\Gamma \hookrightarrow H^g_D(D, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R}) \longrightarrow R$$

は有限平坦 R 代数のトレースとなることが知られる. これにより,

$$EK_\Gamma : R[D]^{0,\Gamma} \hookrightarrow H^{g-1}(U, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

という射が取れる. この像が Einsenstein-Kronecker 類というものである. ここで特に重要なのは $f_{[c]} \in R[D]^{0,\Gamma_{\mathfrak{f}}}$ の像である次の類である.

$$EK_\Gamma(f_{[c]}) \in H^{g-1}(U, \Gamma; \widehat{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

このコホモロジー類と高次 Eisenstein 数との関係を記述するには, Mazur-Messing による普遍ベクトル拡張 (Universal Vectorial Extension) の理論とモーメント写像を概説する必要がある.

3.2. **普遍ベクトル拡張.** ここでは, Laumon[Lau96] による解説を基にして, 普遍ベクトル拡張の理論を概説する. $\mathcal{A}_{/R}$ 上の可逆層 $\mathcal{L}$ で可積分な接続 $\nabla : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \Omega^1_{\mathcal{A}/R}$ を備えたもの $(\mathcal{L}, \nabla)$ のうち, Rigidified かつ定理 of Square を満たすという 2 つの性質に関する普遍性を満たすものが $\mathcal{A}_{/R}$ の普遍ベクトル拡張である.

以下, $(\mathcal{L}, \nabla)$ に関するこれら 2 つの性質を説明する.

定義 3.6. *$\mathcal{A}_{/R}$ 上の可逆層 $\mathcal{L}$ が rigidified であるとは, 次の性質を満たすこととする. $e^*\mathcal{L} \simeq \mathrm{Spec}(R)$ を e: 単位切断に対して満たすこととする.*

定義 3.7. *$\mathcal{A}_{/R}$ 上の可逆層 $\mathcal{L}$ が Theorem of Square を満たすとは, $m : \mathcal{A} \times_R \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$: 乗法, $i = 1, 2$ に対して, $p_i : \mathcal{A} \times_R \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$: 第 i 射影とする. $D_2(\mathcal{L}) := m^*\mathcal{L} \otimes (p_1^*\mathcal{L})^{-1} \otimes (p_2^*\mathcal{L})^{-1} \otimes (\pi \times \pi)^* e^*\mathcal{L}$ は $\mathcal{A} \times_R \mathcal{A}$ 上の可逆層で*

$$e(R) \times \mathcal{A} \cup \mathcal{A} \times e(R)$$

上で自明な可逆層になるが, この自明化が

$$D_2(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A} \times_R \mathcal{A}}$$

に延長されること.

この $\mathcal{A}_{/R}$ 上の可逆層 $\mathcal{L}$ が Theorem of Square を満たす時, 必然的に次の性質が満たされる ([Lau96] 参照).

補題 3.8. *$D_2(\mathcal{L})$ 上に誘導される接続は, $d : \mathcal{O}_{\mathcal{A} \times_R \mathcal{A}} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{A} \times_R \mathcal{A}/R}$ という外微分と一致する.*

同様のことは, 局所 Noether 的スキーム S 上のアーベルスキームでも定義できる. そこで, 次の R 上の局所 Noether 的スキームの圏から, アーベル群の圏への関手 $Pic^{\natural}(\mathcal{A}/R)$ を定義する.

$S \mapsto \{(\mathcal{L}, \nabla) \mid \mathcal{A}/S$ 上の可逆層とその可積分な接続のペアで, Rigidified かつ Theorem of Square を満たす$\}/\simeq$

この関手は, R 上の相対次元 $2g$ の局所 Noether 的スキーム $\mathcal{A}^{\natural}_{/R}$ で表現可能である. すると, 米田の補題から, $\mathcal{A} \times_R \mathcal{A}^{\natural}_{/R}$ 上には普遍的な直線束と可積分な接続のペア, $(P^{\natural}, \nabla^{\natural})$ が存在する. このスキーム $\mathcal{A}^{\natural}_{/R}$ は $\mathcal{A}$ の普遍ベクトル拡張と呼ばれ, 次の普遍的な拡張が存在する.

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{A}, \Omega^1_{\mathcal{A}/R}) \longrightarrow \mathrm{Pic}^{\natural}(\mathcal{A}/R) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(\mathcal{A}.R) \longrightarrow 0$$

これは, アーベル群の完全列である. 最初の準同型は, $\omega \mapsto (\mathcal{O}_{\mathcal{A}}.d + \omega)$ であり, 次の準同型は $(\mathcal{L}, \nabla) \mapsto \mathcal{L}$ で与えられる. Mazur-Messing により, これは次のような R 上の $fppf$ サイトにおけるアーベル層の完全列に拡張できることが知られている.

$$0 \longrightarrow V(e^*T_{\mathcal{A}/R}) \longrightarrow \mathcal{A}^{\natural} \xrightarrow{p} \mathcal{A}' \longrightarrow 0.$$

ここで, $V(e^*T_{\mathcal{A}/R})$ は, 局所自由 R 加群 $e^*T_{\mathcal{A}/R}$ に関するベクトル束. この完全列に対して, $\mathrm{Lie}(*/R) := \mathrm{Hom}(\pi_*\Omega_{*/R}, R)$ をとることで, Hodge-de-Rham の短完全系列と可換になる.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{\mathcal{A}/R} := \pi_*\Omega^1_{\mathcal{A}/R} & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(\mathcal{A}^{\natural}/R) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(\mathcal{A}'/R) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \simeq\downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \omega_{\mathcal{A}/R} & \longrightarrow & H^1_{dR}(\mathcal{A}/R) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(\mathcal{A}'/R) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

普遍直線束 $P^{\natural}$ について, P と同様に, 構造射 $\pi^{\natural} : \mathcal{A}^{\natural} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ で

$$\mathcal{A} \times_R \mathcal{A}^{\natural} \xrightarrow{id \times \pi^{\natural}} \mathcal{A}$$

の単位切断に沿った完備化 $\widehat{P^{\natural}}$ が取れる. このような $\widehat{P^{\natural}}$ を $x \in \mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)$ で引き戻した $x^*\widehat{P^{\natural}}$ にはモーメント写像 mom_x が伴う. このモーメント写像について [KS24] を基に概説する.

3.3. **モーメント写像.** $\mathcal{A}^{\natural}_{/R}$ の単位切断

$$e : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathcal{A}^{\natural}$$

は, 正則閉埋め込みであり, 対応するイデアル層 $\mathcal{I}$ とする. この時, $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural}}$ の $\mathcal{I}$ による完備化 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}^{\natural}}}$ として, 次が成立.

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq \omega_{\mathcal{A}^{\natural}/R} \simeq \mathrm{Hom}(H^1_{dR}(\mathcal{A}/R), R) =: \mathcal{H}.$$

したがって, $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}^{\natural}}} = \varprojlim_n \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural}}/\mathcal{I}^{n+1} =: \varprojlim_n \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(n)}}$ となるように $\mathcal{O}^{\natural,(n)}_{\mathcal{A}} := \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural}}/\mathcal{I}^{n+1}$ と定めれば,

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(n)}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(n-1)}} \longrightarrow 0$$

という短完全列が取れ, $n = 1$ の場合に次を得る.

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(1)}} \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

この $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(1)}}$ は R 加群であり, 上記の短完全列は分裂短完全列, すなわち $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(1)}} \simeq \mathcal{H} \oplus R$ を得る. 乗法 $m^{\natural} : \mathcal{A}^{\natural} \times_R \mathcal{A}^{\natural} \longrightarrow \mathcal{A}^{\natural}$ が誘導する

$$(m^{\natural})^* : \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural(n+m)}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural(n)}} \otimes_R \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural(m)}}$$

を繰り返し用いる. すると $m^{\natural}$ の可換性から次が得られる.

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(n)}} \longrightarrow \mathrm{TSym}^n_R(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(1)}}),$$

ここで TSym^*_R は R 上の加群の対称テンソルがなす R 代数[9]である. $\mathcal{O}^{\natural,(1)}_{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{H} \oplus R$ という分裂により,

$$\mathrm{TSym}^n_R(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(1)}}) \simeq \bigoplus_{a=0}^{n} \mathrm{TSym}^a_R(\mathcal{H})$$

[9]対称テンソル代数 Sym_R とは異なることに注意する. Appendix A を参照

が与えられる (本稿の Appendix A を参照). したがって, これら 2 つの R 加群の準同型を合成することで次の R 加群の準同型を得る.

$$\mathrm{mom}^{(n)} : \mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\natural,(n)}} \longrightarrow \bigoplus_{a=0}^{n} \mathrm{TSym}_R^a(\mathcal{H}).$$

この右辺は, オーギュメンテーションイデアルによる極大イデアルを持つ環構造が入る. そこで, 片々完備化することで

$$\mathrm{mom} : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}^\natural}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{TSym}_R^*}(\mathcal{H})$$

が定義される. このような射はより一般的に R 上滑らかな可換群スキームに対して定義できることに注意する.
1 つ, 重要な補題を用意する.

補題 3.9 ([KS24, Corollary 2.9]). $x \in \mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)$ による $\widehat{P^\natural}$ の引き戻し $x^*\widehat{P^\natural}$ は

$$\rho_x : x^*\widehat{P^\natural} \simeq \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}^\natural}}$$

という同型を持つ. ここで, $\mathfrak{f}$ は pl と互いに素な $\mathcal{O}_K$ の整イデアルであったことに注意する.

この同型と, mom を合成することで, 次のようにモーメント写像を定義する.

定義 3.10.

$$\mathrm{mom} \circ \rho_x =: \mathrm{mom}_x : x^*\widehat{P^\natural} \longrightarrow \widehat{\mathrm{TSym}_R^*}(\mathcal{H}).$$

として, mom_x という射を定義する.

モーメント写像,

$$\mathrm{mom} : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}^\natural}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{TSym}_R^*}(\mathcal{H})$$

の構成と同様にして, R 上滑らかな分離的可換群スキーム $G_{/R}$ に対して, その単位切断に沿った完備化 $\widehat{G}_{/R}$ として

$$\mathrm{mom} : \mathcal{O}_{\widehat{G}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{TSym}_R^*}(\omega_{\widehat{G}/R})$$

が定まる. ここで $\omega_{\widehat{G}/R} := \pi_*\Omega^1_{\widehat{G}/R}$ とし, $\pi : G \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ を構造射とした.

3.4. $\widehat{\mathbb{G}_a}^g$ **の場合.** 具体的に, $\widehat{\mathbb{G}}_{a/R}^g$ という形式的群スキームのモーメント写像を計算する.

補題 3.11. $\widehat{\mathbb{G}}_{a/R}^g$ のモーメント写像は次のように記述される.

$$\mathrm{mom} : R[[x_1, \ldots, x_g]] \longrightarrow \prod_{k=0}^{\infty} \mathrm{TSym}_R^k(Rdx_1 + \ldots + Rdx_g) \subset \prod_{\substack{0 \le a_1, \ldots, a_g \\ \{i_1, \ldots, i_g\} = \{1, \ldots, g\}}} Rdx_{i_1}^{[a_1]} \ldots dx_{i_g}^{[a_g]}$$

$$F \mapsto ((\frac{\partial}{\partial x_{i_1}})^{a_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_{i_g}})^{a_g} F|_{(x_1,\ldots,x_g)=(0,\ldots,0)} dx_{i_1}^{[a_1]} \ldots dx_{i_g}^{[a_g]})$$

ここで, 一般に R 加群 M に対して $m \in M$ で $m^{[n]} := m \otimes \cdots \otimes m \in M^{\otimes n}$ と定義していた.

証明. 一般の場合も同様であるので $g = 1$ の場合について補題を示す.

$\widehat{\mathbb{G}_a}$ に対して, 単位元周りの局所パラメータ t としたときに $\widehat{\mathbb{G}_a}$ の余積は

$$R[[t]] \longrightarrow R[[t]] \otimes_R R[[t]]; t \mapsto t \otimes 1 + 1 \otimes t$$

である. 従って, 余積の合成から誘導される

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{G}_a}^{(n)}} \longrightarrow \mathrm{TSym}_R^n(\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{G}_a}^{(1)}})$$

は, 次の R 代数の準同型によって与えられる.

$$R[[t]]/(t^{n+1}) \longrightarrow R[[t]]/(t^2) \otimes_R \ldots \otimes_R R[[t]]/(t^2); t^m \mapsto (t_1 + \cdots + t_n)^m,$$

ここで $t_i := 1 \otimes \cdots \otimes t \otimes \cdots \otimes 1$ を i 番目の成分のみ t で, それ以外 1 となる元.

モーメント写像は, この R 代数の準同型に次の R 加群の同型を合成することで得られる. すなわち R 加群の同型 $R[[t]]/(t^2) \simeq R \oplus Rdt$ から得られる R 加群の準同型

$$\mathrm{TSym}^n_R(R[[t]]/(t^2)) \simeq \bigoplus_{a=0}^{n} \mathrm{TSym}^a_R(Rdt) = \bigoplus_{a=0}^{n} Rdt^{[a]}$$

を合成する. この右側の同型はシャッフル積により与えられていたことを思い出す (本稿の Appendix A を参照). 従って, モーメント写像は R 加群の準同型

$$R[[t]]/(t^{n+1}) \longrightarrow \mathrm{TSym}^n_R(R[[t]]/(t^2)) \simeq \bigoplus_{a=0}^{n} Rdt^{[n]}$$

で与えられ, この準同型は, 各 $0 \le m \le n$ について

$$t^m \mapsto (t_1 + \ldots + t_n)^m = \sum_{\substack{1 \le i_1, \ldots, i_m \le n \\ a \neq b \text{ に対し } i_a \neq i_b}} t_{i_1} \cdots t_{i_m} \mapsto m! dt^{[m]}$$

で定義される. ここで, $m!dt^{[m]} \in \mathrm{TSym}^m_R(Rdt) \subset \bigoplus_{a=0}^n \mathrm{TSym}^a(Rdt)$ のシャッフル積による $\mathrm{TSym}^n_R(R[[t]]/(t^2)) \simeq \mathrm{TSym}^n_R(R \oplus Rdt)$ への像が

$$m! \cdot \sum_{\sigma \in S_{m,n-m}} \sigma \cdot t^{\otimes m} = \sum_{\substack{1 \le i_1, \ldots, i_m \le m \\ a \neq b \text{ に対し } i_a \neq i_b}} t_{i_1} \cdots t_{i_m}$$

であることを用いた. ただし, $S_{m,n-m} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) < \ldots < \sigma(m), \sigma(m+1) < \ldots < \sigma(n)\}$. □

また, 次の補題が成立する.

補題 3.12. $G_{/R}$ を R 上の相対次元 d の滑らかな可換群スキームとして, $\widehat{G}$ を単位切断に沿った形式化とする. M 上の形式対数による形式群の同型

$$\log_G : \widehat{G} \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}^d_a}$$

が与えられるとき, 次の図式が可換である.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\widehat{G}/R} \arrow[r, "\mathrm{mom}_{\widehat{G}/R}"] \arrow[d, "(\log_G^{-1})^*"'] & \widehat{\mathrm{TSym}}^*_R(\omega_{\widehat{G}/M}) \\
\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{G}^d_a}/M} \arrow[r, "\mathrm{mom}_{\mathbb{G}^d_a/M}"] & \widehat{\mathrm{TSym}}^*_{\mathrm{R}}(\omega_{\widehat{\mathbb{G}^d_a}/M}) \arrow[u, "(\log_G)^*"']
\end{tikzcd}$$

証明. 図式の一番左上部分を $\mathcal{O}_{\widehat{G}/M}$ として示せば十分である. 第一に, $\mathcal{A}^{\natural,(n)}$ と同様にして $G^{(n)}$, $(\mathbb{G}^d_a)^{(n)}$ を定義する. すると, それぞれの余積と形式対数の可換性により次の図式が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{G^{(n)}} \arrow[r, "m_G"] \arrow[d, "(\log_G^{-1})^*"'] & \mathcal{O}_{G^{(n-1)}} \otimes_M \mathcal{O}_{G^{(1)}} \\
\mathcal{O}_{(\mathbb{G}^d_a)^n} \arrow[r, "m_{\mathbb{G}^d_a}"] & \mathcal{O}_{(\mathbb{G}^d_a)^{(n-1)}} \otimes_M \mathcal{O}_{(\mathbb{G}^d_a)^{(1)}} \arrow[u, "(\log_G)^*"']
\end{tikzcd}$$

従って, 次の図式が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\widehat{G}} \arrow[r] \arrow[d, "(\log_G^{-1})^*"'] & \widehat{\mathrm{TSym}}^*_R(\mathcal{O}_{G^{(1)}}) \\
\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{G}^d_a}} \arrow[r] & \widehat{\mathrm{TSym}}^*_R(\mathcal{O}_{(\mathbb{G}^d_a)^{(1)}}) \arrow[u, "(\log_G)^*"']
\end{tikzcd}$$

さて, $\log_G$ は単位切断と可換であるので, 次の図式も可換となり, モーメント写像の定義から補題を得る.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \omega_{G/M} \arrow[r] & \mathcal{O}_{G^{(1)}} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega_{\mathbb{G}^d_a/M} \arrow[r] \arrow[u, "(\log_G)^*"] & \mathcal{O}_{(\mathbb{G}^d_a)^{(1)}} \arrow[r] \arrow[u, "(\log_G)^*"] & M \arrow[r] \arrow[u, "id"] & 0
\end{tikzcd}$$

□

3.5. 高次の Eisenstein 数と Eisenstein-Kronecker 類の関係. この節では, [KS24] によって示された, Eisenstein-Kronecker 類と高次の Eisenstein 数の関係を記述する.

Kronecker-Eisenstein 類 $EK_\Gamma(f_{[c]}) \in H^{g-1}(U, \Gamma; \widehat{P} \otimes_R \Omega^g_{\mathcal{A}/R})$ を $\mathrm{id} \times p : \mathcal{A} \times_R \mathcal{A}^\natural \longrightarrow \mathcal{A} \times_R \mathcal{A}'$ で引き戻すと, 次のような同変コホモロジー類が与えられる.

$$EK^\natural_\Gamma(f_{[c]}) := p^*(EK_\Gamma(f_{[c]})) \in H^{g-1}(U, \Gamma; \widehat{P^\natural} \otimes_R \Omega^g_{\mathcal{A}/R}),$$

ここで Poincare 層の普遍性により $P^\natural \simeq p^*P$ が成立していることに注意する. さらに 3.2 節で与えた $P^\natural$ の普遍的な可積分接続 $\nabla^\natural : P^\natural \longrightarrow P^\natural \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}^\natural}} \Omega^1_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}^\natural/\mathcal{A}^\natural}$ により, $\widehat{P^\natural}$ には可積分な接続

$$\widehat{P^\natural} \longrightarrow \widehat{P^\natural} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \Omega^1_{\mathcal{A}/R}$$

が誘導される. 簡単のため, この可積分な接続を $\nabla^\natural$ と再定義する.

$\nabla^\natural$ を繰り返し用いることで

$$(\nabla^\natural)^a EK^\natural_\Gamma(f_{[c]}) \in H^{g-1}(U, \Gamma; \widehat{P^\natural} \otimes_R \mathrm{TSym}^a_R(\Omega^1_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \Omega^g_{\mathcal{A}/R}) \tag{10}$$

が構成できる.

以下, この節では $\mathfrak{f}$ を pl と互いに素な $\mathcal{O}_K$ の整イデアルとし, $0 \neq x \in \mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)$ を固定する. 更に Γ として $\Gamma_\mathfrak{f} = \{x \in \mathcal{O}_K^\times \mid x \equiv 1 \mod \mathfrak{f}\}$ をとり議論する. $\mathcal{O}_K \simeq \mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ を用いて, $\Gamma_\mathfrak{f} \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{A}/R)$ である.

特に, $x \in \mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)$ には $\Gamma_\mathfrak{f}$ が自明に作用する. $\Gamma_\mathfrak{f}$ 同変コホモロジー類 (10) を $x : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow U = \mathcal{A} - D$ で引き戻すことで次を定義する.

$$x^*(\nabla^\natural)^a EK^\natural_{\Gamma_\mathfrak{f}}(f_{[c]}) \in H^{g-1}(\Gamma_\mathfrak{f}; x^*\widehat{P^\natural} \otimes_R \mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}).$$

このコホモロジー類は R 係数の $\Gamma_\mathfrak{f}$ 加群に関する群コホモロジー類である. 最後に, モーメント写像 $\mathrm{mom}_x : x^*\widehat{P^\natural} \longrightarrow \widehat{\mathrm{TSym}^*_R}(\mathcal{H})$ と射影 $\pi_b : \mathrm{TSym}^*_R(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{TSym}^b_R(\mathcal{H})$ を合成した

$$\pi_b \circ \mathrm{mom}_x : x^*\widehat{P^\natural} \longrightarrow \mathrm{TSym}^b_R(\mathcal{H})$$

による押し出しにより, 次のコホモロジー類が得られる.

$$EK^{b,a}_{\Gamma_\mathfrak{f}}(f_{[c]}, x) := (\pi_b \circ \mathrm{mom}_x)_*(x^*(\nabla^\natural)^a EK^\natural_{\Gamma_\mathfrak{f}}(f_{[c]})) \in H^{g-1}(\Gamma_\mathfrak{f}; \mathrm{TSym}^b_R(\mathcal{H}) \otimes_R \mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}).$$

Hodge 短完全列での R 加群としての全射

$$p : H^1_{dR}(\mathcal{A}/R) \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathcal{A}'/R)$$

は分裂するので, 分裂射 $\mathrm{Lie}(\mathcal{A}'/R) \longrightarrow H^1_{dR}(\mathcal{A}/R)$ に $\mathrm{Hom}_R(*, R)$ を作用させることで

$$\mathcal{H} = \mathrm{Hom}_R(H^1_{dR}(\mathcal{A}/R), R) \to \omega_{\mathcal{A}'/R}$$

が定まる. そこで, この射がコホモロジーに引き起こす写像による $EK^{b,a}_{\Gamma_\mathfrak{f}}(f_{[c]}, x) \in H^{g-1}(\Gamma_\mathfrak{f}, \mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\mathcal{H}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R})$ の像を再度

$$EK^{b,a}_{\Gamma_\mathfrak{f}}(f_{[c]}, x) \in H^{g-1}(\Gamma_\mathfrak{f}, \mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

と定義する. さらに, 次の補題が成立する.

補題 3.13 ([KS24] Corollary 1.14)**.** R 加群 $\mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}$ の $\Gamma_\mathfrak{f}$ 不変な部分 R 加群は次のように記述される.

$$(\mathrm{TSym}^a_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^b_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R})^{\Gamma_\mathfrak{f}} \simeq \bigoplus_{\substack{(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma_\mathfrak{f}),\\ |\alpha|=\sum_\sigma \alpha_\sigma = a, |\beta| = \sum_\sigma \beta_{\overline{\sigma}} = b}} \mathrm{TSym}^\alpha_R(\omega_{\mathcal{A}/R}) \otimes_R \mathrm{TSym}^\beta_R(\omega_{\mathcal{A}'/R}) \otimes_R \omega^g_{\mathcal{A}/R}$$

この各 $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ 不変な直和成分に関する $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ の群コホモロジーに関して, R 加群 $\mathrm{TSym}^{\alpha+1}(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{\beta}(\omega_{\mathcal{A}'/R})$ への次のような準同型を定義する.

$$\begin{aligned}
&H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathrm{TSym}^{\alpha}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{\beta}(\omega_{\mathcal{A}'/R})\otimes_R\omega^g_{\mathcal{A}/R})\\
&\simeq(H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathbb{Z})\otimes_R\omega^g_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{\alpha}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{\beta}_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})\\
&\longrightarrow\mathrm{TSym}^{\alpha+1}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{\beta}_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})
\end{aligned}\tag{11}$$

ここで, 最後の準同型は $\Gamma'_{\mathfrak{f}}\subset\Gamma_{\mathfrak{f}}$ という指数有限自由部分群を 1 つ固定し, 制限写像 $H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathbb{Z})\longrightarrow H^{g-1}(\Gamma'_{\mathfrak{f}},\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$ によって定義した.

さて,

$$EK^{b,a}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)\in H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathrm{TSym}^{a}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{b}_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})\otimes\omega^g_{\mathcal{A}/R})$$

について, $\mathrm{TSym}^{a}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{b}_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})\otimes_R\omega^g_{\mathcal{A}/R}$ は局所自由 R 加群で射影的なので, その $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ 不変部分 R 加群への射影をとることができる. 補題 3.13 により, 特に $(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$ に対して次の準同型が定義できる.

$$H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathrm{TSym}^{a}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{b}_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})\otimes\omega^g_{\mathcal{A}/R})\longrightarrow H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathrm{TSym}^{\alpha}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{\beta}_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})\otimes\omega^g_{\mathcal{A}/R}).$$

さらに, $\Gamma'_{\mathfrak{f}}\subset\Gamma_{\mathfrak{f}}$ を固定することで与えた準同型 (11), すなわち

$$H^{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathrm{TSym}^{\alpha}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{\beta}_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})\otimes\omega^g_{\mathcal{A}/R})\longrightarrow\mathrm{TSym}^{\alpha+1}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{\beta}_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})$$

を合成することで, $EK^{b,a}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)$ の $\mathrm{TSym}^{\alpha+1}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{\beta}_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})\simeq R$ を定義できる. この写像による R における像を $EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)$ と記述することにする.
この最後の同型 $\mathrm{TSym}^{\alpha+1}_R(\omega_{\mathcal{A}/R})\otimes_R\mathrm{TSym}^{\beta}_R(\omega_{\mathcal{A}'/R})\simeq R$ は $\omega(\mathcal{A})=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_g)$ という $\omega_{\mathcal{A}/R}$ 上の大域的な微分形式の基底と, $\omega_{\mathcal{A}'/R}$ の微分形式の基底 $\omega(\mathcal{A}')$[10]で定まる同型とした.

$EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma}(f_{[c]},x)$ は $\Gamma'_{\mathfrak{f}}$ の取り方に依存しない元であることが示される ([KS24]p.23 を参照).

このようにしてコホモロジー類より定義された $EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)\in R$ について次が成立する.

定理 3.14 ([KS24, Corollary 3.28]). *$EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)$ は, 解析的に定義した高次の Eisenstein 数 (7) と一致する.*

このように高次の Eisenstein 数をコホモロジー類から構成する手法により, 高次 Eisenstein 数を特殊値に持つような形式函数をコホモロジー類から構成することができる.

3.6. 高次の Eisenstein 数の形式化.

この節では高次の Eisenstein 数を特殊値に持つ l 進形式函数を構成する.

c を pl と互いに素な $\mathcal{O}_K$ の整イデアルとし, $\mathcal{O}_K^{\times}$ の指数有限部分群 $\Gamma\subset\mathcal{O}_K^{\times}$ とする. $D:=\mathcal{A}[c]$ は Γ の作用で安定である. この時 $U=\mathcal{A}-D$ として Eisenstein-Kronecker 類 $EK_{\Gamma}(f_{[c]})\in H^{g-1}(U,\Gamma;\widehat{P}\otimes\Omega^g_{\mathcal{A}/R})$ をとる. この節では, $0\neq x\in\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ を次を満たすような元とする.

- **x の条件**

あるアーベルスキーム $\mathcal{B}_{/R}$ と R 上の同種写像 $\phi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ で, その双対 ϕ' が R 上エタールなものが存在し, $x\in\mathrm{Ker}(\phi)$.

$\widehat{\mathcal{A}_{x/R}}$ で $\mathcal{A}_{/R}$ の $x:\mathrm{Spec}(R)\longrightarrow\mathcal{A}$ に沿った完備化とする. これは, アファイン形式的スキームである. すると, $EK_{\Gamma}(f_{[c]})$ の $\widehat{\mathcal{A}_x}$ への制限は次のようになる.

$$EK_{\Gamma}(f_{[c]})|_{\widehat{\mathcal{A}_x}}\in H^{g-1}(\widehat{\mathcal{A}_x},\Gamma:\widehat{P}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}_x}})\simeq H^{g-1}(\Gamma,H^0(\widehat{\mathcal{A}_x},\widehat{P}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}_x}}))$$

この 2 番目の同型は, E_2 スペクトル系列

$$H^p(\Gamma,H^q(\widehat{\mathcal{A}_x},\widehat{P}\otimes\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}_x}}))\Rightarrow H^{p+q}(\widehat{\mathcal{A}_x},\Gamma;\widehat{P}\otimes\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}_x}})$$

[10][KS24]Definition 1.15 にあるように, これらは偏極構造と compatible である必要はない

の存在と $\widehat{\mathcal{A}_x}$ がアファインであるということから $H^q(\widehat{\mathcal{A}_x},\widehat{P}\otimes\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}_x}})=0,\ q\geq 1$ が成立することにより従う. この群コホモロジー類を, x による平行移動 $T_x:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ で引き戻すことで,

$$T_x^*(EK_\Gamma(f_{[c]})|_{\widehat{\mathcal{A}_x}})\in H^{g-1}(\Gamma,H^0(\widehat{\mathcal{A}},T_x^*\widehat{P}\otimes\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}}}))$$

が取れる. $R\hookrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ で $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ に基底変換する. この時, 次の分裂補題と呼ばれる重要な補題が成立する.

補題 3.15 ([KS24, Lemma 5.12, Proposition 5.9])**.** $0\neq x\in\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ を先に定めたような等分点とする. この時

$$\widehat{\rho_x}:T_x^*\widehat{P}|_{\widehat{\mathcal{A}}}\simeq\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\mathcal{A}'}}$$

という $\widehat{\mathcal{A}}$ 上の加群の層の同型が存在する.

この補題から,

$$\widehat{\rho_x}(T_x^*(EK_\Gamma(f_{[c]})|_{\widehat{\mathcal{A}_x}}))\in H^{g-1}(\Gamma,H^0(\widehat{\mathcal{A}},\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'}}\otimes_R\Omega^g_{\mathcal{A}/R}|_{\widehat{\mathcal{A}}}))$$

が構成される.

ここで, $\Gamma'\subset\Gamma$ という指数有限自由部分群を固定し, $\xi\in H_{g-1}(\Gamma,\mathbb{Z})$ を, 制限写像 $H_{g-1}(\Gamma,\mathbb{Z})\longrightarrow H_{g-1}(\Gamma',\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$ による ξ の $\mathbb{Z}$ への像が $\mathbb{Z}$ の生成元になるようにとる. この時, 群コホモロジーのカップ積 $\xi\cap$ をとれば,

$$\theta_\Gamma(f_{[c]},x):=\xi\cap\widehat{\rho_x}(T_x^*(EK_\Gamma(f_{[c]})|_{\widehat{\mathcal{A}_x}}))\in H^0(\widehat{\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\mathcal{A}'},\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\mathcal{A}'}}\otimes\omega^g_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}|_{\widehat{\mathcal{A}}})^\Gamma\subset H^0(\widehat{\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\mathcal{A}'},\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\mathcal{A}'}})$$

が定義される. 最後の包含は, $\omega(\mathcal{A})$ が定める $\omega^g_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ を用いた[11]. この $\widehat{\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\mathcal{A}'}$ 上の形式函数 $\theta_\Gamma(f_{[c]},x)$ を l 進テータ函数とよぶ. l 進テータ函数は, Γ' や ξ の取り方によらない ([KS24]Lemma 5.15 を参照). さらに,

$$\begin{aligned}\theta_\Gamma(f_{[c]},x)\in H^0(\widehat{\mathcal{A}}\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\widehat{\mathcal{A}'},\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}}\times_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\widehat{\mathcal{A}'}}\otimes\omega^g_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}})^\Gamma&\hookrightarrow(\mathrm{TSym}^*(\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}})\otimes\mathrm{TSym}^*(\omega_{\mathcal{A}'/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}})\otimes\mathrm{TSym}^1(\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}))^\Gamma\\&\simeq\bigoplus_{(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma)}\mathrm{TSym}^{\alpha+1}(\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}\mathrm{TSym}^\beta(\omega_{\mathcal{A}'/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}})\end{aligned}\tag{12}$$

という自然な包含関係が成立する. ここで、1 つ目の包含射はモーメント写像による包含である. また 2 つ目の同型は補題 3.13 による.

以降では, $t=(t_1,\dots,t_g),t'=(t'_1,\dots,t'_g)$ として, (t,t') が $\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'$ の単位切断周りにおける次のような局所パラメータ系をなすものとする.

定義 3.16. 補題 *2.13* で $\omega_{\mathcal{A}},\omega_{\mathcal{A}'}$ に対して与えられる局所パラメータ系をそれぞれ, t,t' とする. 単位切断の基底変換 $\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'\longrightarrow\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'$ で, t,t' から定まる $\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'$ における単位切断周りの局所パラメータ系を改めて (t,t') として定義する.

さて, l 進テータ函数に関して, 次のような重要な関係式が成立する.

命題 3.17. $0\neq x\in\mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)$ とする. また, Γ として $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ をとる. $(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$ であるとき, 次が成立する.

$$\widehat{\partial}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}}\widehat{\partial}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'}\theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)(t,t')|_{t=0,t'=0}=EK^{\beta;\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x).$$

証明. 平行移動不変な微分作用素 $\widehat{\partial}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}}\widehat{\partial}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'}$ に関して, モーメント写像との次のような関係が成立する.

補題 3.18. $\mathrm{mom}:\Gamma(\widehat{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'},\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'}})\longrightarrow\mathrm{TSym}^*_R(\omega_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'/R})$ は, 次で記述される.

$$f\mapsto(\widehat{\partial}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}}\widehat{\partial}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'}f(t,t')|_{t=0,t'=0}\cdot\widehat{\omega}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}}\widehat{\omega}^{[\beta]}_{\mathcal{A}'})_{\alpha,\beta},$$

ここで $\widehat{\omega}^{[\alpha]}_{\mathcal{A}}:=\widehat{\omega_1}^{\alpha_1}\cdots\widehat{\omega_g}^{\alpha_g}$ ($\widehat{\omega}_{\mathcal{A}'}$ も同様) として定めた.

---

[11] この最後の包含の部分は [KS24] の構成とは少し異なるようにしてある. このようにするのは, 本稿では, p 進 L 函数の構成を目標としておらず, 高次の Eisenstein 数を補完する形式函数構成の上では, この定義の方が都合がいいからである.

補題の証明. $\mathrm{mom}_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'}$, $\mathrm{mom}_{\mathbb{G}_a^{2g}}$ をそれぞれ, $\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'$, $\mathbb{G}_a^{2g}$ に対して定めたモーメント写像とする. この時, M 上の $\omega(\mathcal{A}),\omega(\mathcal{A}')$ により定まる形式対数を以下のように定める.

$$\log := \log_{\widehat{\mathcal{A}}\times_M\widehat{\mathcal{A}'}} : \widehat{\mathcal{A}\times_M\mathcal{A}'} \simeq \widehat{\mathbb{G}_a^{2g}}.$$

この時, モーメント写像の補題 3.12 から次の可換図式が成立する.

$$\begin{array}{ccc} R[[t,t']] & \xrightarrow{\mathrm{mom}_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'}} & \widehat{\mathrm{TSym}}^*_R(\omega_{\mathcal{A}\times_M\mathcal{A}'}/R) \\ {\scriptstyle (\log^{-1})^*}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle (\log)^*} \\ M[[t,t']] & \xrightarrow{\mathrm{mom}_{\mathbb{G}_a^{2g}/M}} & \widehat{\mathrm{TSym}}^*_R(\omega_{\mathbb{G}_a^{2g}/M}) \end{array}$$

$\mathrm{mom}_{\mathbb{G}_a^{2g}/M}$ の, 平行移動不変な微分形式 $dt_1,\dots,dt_g,dt_1',\dots,dt_g'$ に対する記述として, 平行移動不変な微分作用素を用いて与えられることは補題 3.11 で示した.

したがって, 上記の可換図式から同様のことが $\mathrm{mom}_{\mathcal{A}\times_R\mathcal{A}'}$ に対して成立するのは確かに良い. □

この, mom と α,β 成分への射影の合成を $\mathrm{mom}^{\alpha,\beta}$ と記述する. 以下, $(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$, $0\neq x\in\mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)$ の時に

$$\mathrm{mom}^{\alpha,\beta}(\theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)) = EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)\widehat{\omega_{\mathcal{A}}}^{[\alpha+1]}\widehat{\omega_{\mathcal{A}'}}^{[\beta]}$$

を示す. $\xi\in H_{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathbb{Z})$ を, 指数有限自由部分群 $\Gamma'\subset\Gamma_{\mathfrak{f}}$ のホモロジーへの制限写像 $H_{g-1}(\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathbb{Z})\longrightarrow H_{g-1}(\Gamma',\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$ による ξ の像が $\mathbb{Z}$ の生成元であるようなものとする.

$$\begin{aligned}\mathrm{mom}^{\alpha,\beta}(\theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)) &= \mathrm{mom}^{0,\beta}(\widehat{\partial}^{[\alpha]}(\xi\cap\widehat{\rho_x}(T_x^*(EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]})|_{\widehat{\mathcal{A}_x}}))\widehat{\omega}_A^{[\alpha+1]}) && (13)\\ &= \xi\cap(\mathrm{mom}^\beta\circ\rho_x)_*x^*(\nabla^\natural)^{[\alpha]}EK^\natural_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]})) && (14)\\ &= EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x)\widehat{\omega}_{\mathcal{A}}^{[\alpha+1]}\widehat{\omega}_{\mathcal{A}'}^{[\beta]} && (15)\end{aligned}$$

ここで, mom^β は, モーメント写像と $R\omega_{\mathcal{A}'}^{[\beta]}$ 成分への射影の合成によって得られる射である. また, この 2 行目の等式 (14) では, ∇ と $\widehat{\partial}$ の compatibility である, [KS24] の補題 5.14 が用いられている. □

この命題の系として, 自然な包含 (12) により次が成立する.

系 3.19. $\mathcal{O}_K^\times$ の指数有限部分群 Γ と, 本節冒頭の条件を満たす $0\neq x\in\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ を考える. $(\beta,\alpha)\in\mathbb{Z}_{\geq0}^{\Sigma_K}\times\mathbb{Z}_{\geq0}^{\Sigma_K}$ が $(\beta,\alpha+1)\notin\mathrm{Crit}(\Gamma)$ であれば, 次の等式が成立する.

$$\widehat{\partial}_{\mathcal{A}}^{[\alpha]}\widehat{\partial}_{\mathcal{A}'}^{[\beta]}\theta_\Gamma(f_{[c]},x)(t,t')|_{t=0,t'=0} = 0.$$

そこで, $\mathcal{O}_K^\times$ の指数有限部分群 Γ と本節冒頭の仮定を満たす $x\in\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$, 及び $\beta\in\mathbb{Z}_{\geq0}^{\Sigma_K}$ に対して $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ 係数形式べき級数

$$F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma) := \widehat{\partial}_{\mathcal{A}'}^{[\beta]}\theta_\Gamma(f_{[c]},x)(t,t')|_{t'=0}$$

を定義する. この形式函数より, 高次 Eisenstein 数を特殊値に持つ形式函数を構成する. 各 $\sigma\in\Sigma_K$ に対し, $\lambda_\sigma := (\iota_l\circ\sigma)^{-1}(m_{\mathbb{C}_l})\cap\mathcal{O}_K$ により K における素イデアルを定め, $\mathfrak{L} := \prod_{\sigma\in\Sigma_K}\lambda_\sigma$ としていたことを思い出す. これは $\mathcal{A}[l^n]_{/R}$ の連結成分 $\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]_{/R}$ を与えていた. 以下では, $\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]_{/R}$ を単に $\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]$ を記述する.

命題 3.20. $\mathfrak{f}$ を $\mathcal{O}_K$ のイデアルで pl と互いに素であるものとする. $(\beta,\alpha+1)\in\mathrm{Crit}(\Gamma_{\mathfrak{f}})$ とする. また, $0\neq x\in\mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)$ を固定する. 任意の $t_n\in\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$, $n\geq1$ に対して,

$$\widehat{\partial_A}^{[\alpha]}F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}})|_{t=t_n} = EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]},x+t_n)$$

が成立する. ただし, 右辺の高次の *Eisenstein* 数は解析的に定義されるものを用いている.

証明. 重要なのは, 次の補題である.

補題 3.21 ([KS24, Lemma 5.14(3), Theorem 5.23])**.** $\mathcal{O}_K^\times$ の指数有限部分群 Γ と本節冒頭の仮定を満たす $0 \neq x \in \mathcal{A}_{\mathrm{tors}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ を固定する. $t_n \in A[\mathfrak{L}^n](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$T_{t_n}^* \theta_\Gamma(f_{[c]}, x)(t, t') = \theta_\Gamma(f_{[c]}, x + t_n)(t, t').$$

$\Gamma_\mathfrak{f}$ の部分群 $\Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n} \subset \Gamma_\mathfrak{f}$ をとる. この時, $\Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}$ は $x + t_n$ を固定する. すると, 次の等式が成立する.

$$T_{t_n}^* \widehat{\partial_\mathcal{A}}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t : \Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n})|_{t=0} = \widehat{\partial_\mathcal{A}}^{[\alpha]} \widehat{\partial_{\mathcal{A}'}}^{[\beta]} \theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}}(x + t_n, f_{[c]})|_{t=0} = EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}}(f_{[c]}, x + t_n)$$

初めの等式は, 補題 3.21 と, $\widehat{\partial_A}, \widehat{\partial_{A'}}$ の平行移動不変性から従う. 2 つ目の等式では, 補題 3.17 を用いた.

そこで, 命題を証明するには, $\Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}$ を $\Gamma_\mathfrak{f}$ と取り換えても, 上記の等式が成立することを示せばよい. そこで次が成立することを用いる.

補題 3.22 ([KS24, Corollary 2.29, Lemma 5.17])**.** $(\beta, \alpha + 1) \in \mathrm{Crit}(\Gamma_\mathfrak{f})$ とする. 上記のような $\Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n} \subset \Gamma_\mathfrak{f}$ に対して, $0 \neq x \in \mathcal{A}[\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ とすると次の等式が成立する.

$$\theta_{\Gamma_\mathfrak{f}}(f_{[c]}, x) = [\Gamma_\mathfrak{f} : \Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}]^{-1} \theta_{\Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}}(f_{[c]}, x), \ EK_{\Gamma_\mathfrak{f}}^{\beta,\alpha}(f_{[c]}, x) = [\Gamma_\mathfrak{f} : \Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}]^{-1} EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}}^{\beta,\alpha}(f_{[c]}, x)$$

証明. $EK_{\Gamma_\mathfrak{f}}^{\beta,\alpha}$ に対しては, 解析的表示から直ちに従う. l 進テータに関しては, [KS24] の補題 5.17 を参照. □

すでに得た等式, $T_{t_n}^* \widehat{\partial_\mathcal{A}}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t : \Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n})|_{t=0} = EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}}(f_{[c]}, x + t_n)$ と, 補題 3.22 により,

$$T_{t_n}^* \widehat{\partial_\mathcal{A}}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t : \Gamma_\mathfrak{f})|_{t=0} = EK_{\Gamma_\mathfrak{f}}(f_{[c]}, x + t_n)$$

が成立することは確かに良い. □

$0 \neq x \in \mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)$ として構成された形式函数 $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t : \Gamma_\mathfrak{f})$ はア・プリオリには $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}[[t]]$ に含まれるが, 係数は実は M に含まれていることを示す.

命題 3.23. $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t : \Gamma_\mathfrak{f}) \in M[[t]]$ が成立する.

証明. まず, 定義から $EK_{\Gamma_\mathfrak{f}}^{\beta,\alpha}(f_{[c]}, x) \in R \subset M$ が成立する. したがって, 任意の $\alpha' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\Sigma$ に対して, 次の性質が従う.

$$\widehat{\partial_A}^{[\alpha']} (\widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t : \Gamma_\mathfrak{f}))|_{t=0} \in M.$$

実際, $(\beta, \alpha + \alpha' + 1) \in \mathrm{Crit}(\Gamma_\mathfrak{f})$ の時は補題 3.17 により, 左辺は Eisenstein 数で M の元となる. そうでなければ, Corollary3.19 により, この数は 0. したがって, 上記の性質は確かに成立する.

この性質と次の補題を用いればよい.

補題 3.24. $f \in \mathbb{C}_l[[t]]$ を任意とし, $M \subset S \subset \mathbb{C}_l$ を代数体とする. この時

$$\widehat{\partial}_A^{[\alpha]} f(t)|_{t=0} \in S$$

が任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\Sigma_K}$ で成立すれば, $f \in S[[t]]$.

補題の証明. M 上の形式リー群の同型 $\log_{\widehat{\mathcal{A}}} : \widehat{\mathcal{A}} \simeq \widehat{\mathbb{G}_a^g}$ をとる. $F(t) := f(\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t))$ をとれば, $D^{[\alpha]}$ の定義より, $F(t) \in S[[t]]$ となる. したがって, $\log_{\widehat{\mathcal{A}}}(t) \in M[[t]] \subset S[[t]]$ であることを踏まえて, $f(t) \in S[[t]]$ を得る. □

この補題を, $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t : \Gamma_\mathfrak{f})$ に用いれば命題を得る. □

この形式函数 $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t : \Gamma_\mathfrak{f})$ は, 命題 3.20 と Eisenstein 数の定義により, 次を満たす.

$$\widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t : \Gamma_\mathfrak{f})|_{t=0} = EK_{\Gamma_\mathfrak{f}}^{\beta,\alpha}(f_{[c]}, x) \in R.$$

ここで, 固定した埋め込み $\iota_l : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_l$ によって与えられる M における l 上の素点 v_l とし, $R = \mathcal{O}_{M,(v_l)}$ としていた.

Eisenstein 数のコホモロジー類としての構成や, 解析的な表示は R を $\mathcal{O}_{M,(v_p)}$ に置き換えても同様になされる. ここで v_p は ι_p が定める M での素点. したがって, Eisenstein 数は $\mathcal{O}_{M,(v_p)}$ の元である.

$v_p^{(n)}$ を ι_p が定める $M(A[\mathfrak{L}^n])$ 上の素点とする. x を $x+t_n \in A[\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ に取り換え, $\mathcal{O}_{M,(v_p)}$ を $\mathcal{O}_{M(A[\mathfrak{L}^n]),(v_p^{(n)})}$ に取り換えて同じ議論をすることで,

$$[\Gamma_{\mathfrak{f}} : \Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}] EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]}, x+t_n) \in \mathcal{O}_{M(A[\mathfrak{L}^n]),(v_p^{(n)})}$$

が成立する. ここで, 簡単な計算から

$$[\Gamma_{\mathfrak{f}} : \Gamma_{\mathfrak{f}\mathfrak{L}^n}] = |(\mathcal{O}_K/\mathfrak{L}^n)^{\times}|$$

である. 従って, 命題 3.20 により各多重指数 α に対する $\widehat{\mathcal{A}}_{/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}}$ 上の l 進形式函数 $\widehat{\partial_{\mathcal{A}}}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}})$ が与える,

$$\widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}} : \mathcal{A}[\mathfrak{L}^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) \longrightarrow \mathbb{C}_l; t_n \mapsto \widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t_n:\Gamma_{\mathfrak{f}})$$

は $\iota_l(M(A[\mathfrak{L}^\infty]))$ に像を持ち, さらに $M(A[\mathfrak{L}^\infty])$ において, この像全体は p 進的に有界であることがわかる. 以上のことは次に要約される.

命題 3.25. $0 \neq x \in \mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)$ とする. この時, 次の 2 つのことが成り立つ.

1. $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t:\Gamma_{\mathfrak{f}}) \in \mathbb{C}_l[[t]]$ は, $R = \mathcal{O}_{M,(v_l)}$ 係数形式べき級数である.
2. $\widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}} : \mathcal{A}[\mathfrak{L}^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) \longrightarrow \mathbb{C}_l; t_n \mapsto \widehat{\partial_A}^{[\alpha]} F_{x,\beta,f_{[c]}}(t_n:\Gamma_{\mathfrak{f}})$ の像は, $\iota_l(\iota_p^{-1}J)$ に含まれ, さらに J において p 進的に有界である. ここで, $J = M_{v_p}(A[l^\infty])$ は第 1 節で定義した体である.

注意 3.26. $\widehat{R}$ を局所環 R の完備化とする. この $f \in R[[t]] \subset \widehat{R}[[t]]$ が定める

$$f : \mathcal{A}[\mathfrak{L}^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) \longrightarrow \mathbb{C}_l$$

の意味をより正確に述べる. *Tate*[Tate67] の意味での連結な l 可除群 $\{\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]_{/\widehat{R}}\}_n$ に付随する形式群と, $\widehat{\mathcal{A}}_{/\widehat{R}}$ は一致する. $\widehat{R}$ は完備 *Noether* 局所環であることに注意する. この時, *Tate*[Tate67] は次のことを示した.

$$\varprojlim_n \Gamma(\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n], \mathcal{O}_{\mathcal{A}[\mathfrak{L}^n]/\widehat{R}}) \simeq \Gamma(\widehat{\mathcal{A}}_{\widehat{R}}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}}}).$$

この右辺は $\widehat{R}[[t]]$ と同型であり, これから, $f \in \widehat{R}[[t]]$ は, 任意の $n \geq 1$ に対して

$$f : \mathcal{A}[\mathfrak{L}^n](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) \longrightarrow \mathbb{C}_l$$

を定める. したがって, これらは $f : \mathcal{A}[\mathfrak{L}^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}) \longrightarrow \mathbb{C}_l$ を定める.

4. 楕円曲線の場合

これまで考察してきたアーベル多様体 $A_{/M}$ の次元が 1 である場合, すなわち楕円曲線 $E_{/M}$ に対して考察する. この場合, Bannai-Furusho-Kobayashi[BKF15] によって得られた結果から, 命題 3.25 の形式函数が比較的明示的に記述することができることを示す.

4.1. **Eisenstein 数の明示公式.** 以下では, K を類数 1 の虚二次体とし, $\mathfrak{f}$ を pl と互いに素な $\mathcal{O}_K$ のイデアルで $w_{\mathfrak{f}} = |\{e \in \mathcal{O}_K^{\times} \mid e \equiv 1 \mod \mathfrak{f}\}| = 1$ を満たすとする, また, 素数 $p \neq l$ について $p \geq 5$. $l \geq 7$ を仮定して議論する.

また, λ を ι_l により定まる $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ での素イデアル $\lambda := \mathcal{O}_K \cap \iota_l^{-1}(m_{\mathbb{C}_l})$ とする. ここで, $m_{\mathbb{C}_l}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ の極大イデアルとした.

初めに, 以下では $E_{/M}$ を K の整数環に CM を持つ楕円曲線とする. E の Weierstrass 座標表示に関して, K の類数が 1 であることと $l \geq 7$ であることにより, 次を仮定することができる.

補題 4.1. E は K を定義体に持つ楕円曲線. また, $\mathcal{O}_{K,(\lambda)}$ 上の *Weierstrass* 極小モデルがとれ,

$$y^2 = 4x^3 - ax - b,$$

$a, b \in \mathcal{O}_{K,(\lambda)}$ という *Weierstrass* 方程式で記述される.

E の微分形式 $\omega(E)$ としては, この表示の Neron 微分形式 $\omega_E = -2dx/y$ をとる. また, この複素周期を Ω_∞ とする. さらに, E の双対は E と同型であり, $\omega(E')$ としても ω_E をとる. ω_E と $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ が与える $E_{/K}$ の周期格子を Λ とする. $\Gamma_{\mathfrak{f}} = 1$ に注意すると, $EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]}, x)$ は次のように書き下せる.

補題 4.2. 次が成立する.

$$EK^{\beta,\alpha}_{\Gamma_{\mathfrak{f}}}(f_{[c]}, x) = \alpha! \cdot \frac{(2\pi i)^\beta}{(\Omega_\infty \overline{\Omega_\infty})^\beta}(N(c)E_{\beta,\alpha+1}(x;\Lambda) - E_{\beta,\alpha+1}(x;c^{-1}\Lambda))$$

この, $E_{a,b}(z;\Lambda)$, $a \geq 0, b \geq 1$ は古典的な Eisenstein 数

$$E_{a,b}(z;\Lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{(\overline{z}+\overline{\lambda})^{a+b}}{|z+\lambda|^{2s}}|_{s=b}.$$

証明. 非自明な部分は, Hodge 短完全列から定まる

$$\langle , \rangle : \overline{\omega_{E/\mathbb{C}}} \times \omega_{E/\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

の計算であるが, この計算は [KS24] の命題 4.6 でなされている. □

この計算から分かるように, 虚二次体の場合は古典的な Eisenstein 数が, 本質的に [KS24] の Eisenstein 数である.

Bannai-Furusho-Kobayashi[BKF15] は, 古典的な Eisenstein 数を形式化し, その形式函数を研究した. その形式函数と, 構成した形式函数の関係性を記述する.

4.2. **Bannai-Furusho-Kobayashi の形式べき級数との比較.** Bannai-Furusho-Kobayashi の形式函数を基にして, K が虚二次体の場合での $F_{x,\beta,f_{[c]}}$ の正体を明らかにする.

[BKF15] では, Eisenstein 数の形式化をコホモロジー側からではなく, より解析的立場から与えた. $\theta(z)$ を Robert のテータ函数, すなわち $[0_E]$ という因子に対応する直線束 $L([0])$ の正規化された次のテータ函数とする.

$$\theta(z) := z\exp(-\frac{e_2^* z^2}{2}) \prod_{\gamma\in\Lambda-\{0\}} (1-\frac{z}{\gamma})\exp(\frac{z}{\gamma}+\frac{z^2}{2\gamma^2}).$$

ここで $e_2^* = \sum_{\gamma\in\Lambda-\{0\}} \overline{\gamma}^2/|\gamma|^{2s}|_{s=2}$.

このテータ函数に対して, Kronecker テータ函数を

$$\Theta(z,w) := \frac{\theta(z)\theta(w)}{\theta(z+w)}$$

とする. この $\Theta(z,w)$ は, $E \times E$ 上の Poincare 直線束に付随する正規化されたテータ函数となる. 特に, あるコサイクル条件を満たすような $e_{z_0}(z,w)$ が取れて,

$$\Theta(z+z_0,w) = e_{z_0}(z,w)\Theta(z,w),$$

$z_0 \in \Lambda$ となる. ここで,

$$\Theta_{z_0}(z,w) := e_{z_0}(z,w)^{-1}\Theta(z+z_0,w),$$

$z_0 \in \mathbb{C}$ と定める. さらに, $z_0 \notin \Lambda$,

$$\Theta_{z_0}(z,w) = \sum_{b\geq 0} F_{z_0,b}(z)w^{b-1}$$

として $F_{z_0,b}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ を定義する. 実は, $z_0 \in E_{\mathrm{tors}}(\overline{\mathbb{Q}})$ に対しては, $F_{z_0,b}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ であることが [BK07] で示されている.

次に, $\mathcal{E}_{/\mathcal{O}_{K,(\lambda)}}$ を補題 4.1 で定まる E の $\mathcal{O}_{K,(\lambda)}$ 上の Neron モデルとして, $t = -2x/y$ を局所パラメータとする. $\widehat{\mathcal{E}}_{/\mathcal{O}_{K,(\lambda)}}$ を単位切断に沿った $\mathcal{E}_{/\mathcal{O}_{K,(\lambda)}}$ の形式化とする.

$$\log_{\widehat{\mathcal{E}}} : \widehat{\mathcal{E}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}_a}$$

を K 上の形式対数であるとする. すなわち, $\log_{\widehat{\mathcal{E}}}(t) \in K[[t]]$ で,

$$d\log_{\widehat{\mathcal{E}}}(t) = \widehat{\omega_E}, \quad \log_{\widehat{\mathcal{E}}}(t) = t + \text{higher terms}$$

となるものとする.

$$\widehat{F_{z_0,b}}(t;\Lambda) := F_{z_0,b}(\log_{\widehat{\mathcal{E}}}(t)) \in \mathbb{C}_l[[t]]$$

と定める. この形式べき級数に関して, 次の補完公式が成立する.[12]

命題 4.3 ([BKF15, Corollary 3.13], [BKT07, Proposition 4.7, Remark 4.8])**.** $0 \neq z_0 \in E[n]$ かつ n は λ と互いに素とする. $a \geq 0, b > 0$ で

$$b!(\sqrt{d_K})^b(-1)^{a+b}D^a\widehat{F}_{z_0,b}(t;\Lambda)|_{t=t_n} = a! \times \frac{(2\pi i)^b}{(\Omega_\infty\overline{\Omega_\infty})^b}E_{b,a+1}(z_0+z_n;\Lambda).$$

ここで, $\lambda = (\lambda)$ として

$$\iota : \widehat{\mathcal{E}}[\lambda^n](\overline{\mathbb{Q}_l}) \simeq E[\lambda^n](\mathbb{C}) \simeq (\frac{1}{\lambda^n}\Lambda)/\Lambda$$

を固定し, $t_n \mapsto \iota(t_n) =: z_n$ とした. 更に, この左辺は $K(E[2n])[[t]]$ に含まれており, λ 進有界な係数を持つ.

この命題 4.3 と, 命題 3.20, 補題 4.2 を合わせて次の補題を得る.

補題 4.4. 次の等式が成立する.

$$F_{x,b,f_{[c]}}(t;\Gamma_{\mathfrak{f}}) = b!(\sqrt{d_K})^b(-1)^{a+b}(N(c)\widehat{F}_{x,b}(t;\Lambda) - \widehat{F}_{x,b}(t;c^{-1}\Lambda)).$$

このように, 構成された $F_{x,b,f_{[c]}}(t;\Gamma_{\mathfrak{f}})$ は, 楕円曲線においては [BKF15] で深く研究されてきた $\widehat{F}_{x,b}$ と結びつく.

$F_{x,b,f_{[c]}}$ が持つような, 適切な性質を満たす形式函数に付随した p 進測度を調べることで, L 値の非消滅性を証明することができる. 次節では, そのような p 進測度を調べる.

5. 形式函数に付随する測度

本節では, 素数 l, 及び K が次の条件を満たしているとする.

- l 上の K の最大総実部分体 K^+ における素イデアル $\mathfrak{l}$ が 1 つしかなく K/K^+ で $\mathfrak{l} = (\lambda)(\overline{\lambda})$ と単項な素イデアル $(\lambda) \subset \mathcal{O}_K$ を用いて完全分解する.

この節でも第 1 節と同様にして, 次のように記号を定める.

(1) $\mathbb{Q}$ 上 Galois で CM 体 K を含む代数体 M に定義体を持つ単純アーベル多様体 $A_{/M}$ で $\mathrm{End}(A) \simeq \mathcal{O}_K$ という同型をもたすものをとる.
(2) M における l 上の素点 v_l で $\mathcal{O}_M$ を局所化した R 上の $A_{/M}$ に関する Neron モデル $\mathcal{A}_{/R}$ と定めることにする.
(3) $\mathcal{A}_{/R}$ の微分形式に関する大域切断の R 上の基底 $\Omega_1, \ldots, \Omega_g$ および, K の CM 型 Σ_K を (1) をみたすように定める.

必要ならば λ を取り換えることで, ある $\sigma \in \Sigma_K$ に対し, $(\lambda) = (\iota_l \circ \sigma)^{-1}(m_{\mathbb{C}_l})$ を満たしているとする.

以下では $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 加群としての同型 $\delta : K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda} \simeq \mathcal{A}[\lambda^\infty](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ を固定する. この右辺を単に $\mathcal{A}[\lambda^\infty]$ と書くことにする.

初めに, 適切な函数空間 $\mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ を次のように定義する.

定義 5.1. K_0 を p 上の素点全てで不分岐な K 上の有限次アーベル拡大体とする.

$$\mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}} := \{f \in K_0[[t_1,\ldots,t_g]] \mid f \text{ は条件 (1), (2) を満たす.}\}$$

(1) f は l 進有界な係数を持つ. つまり或る十分大きな N が存在し, ι_l を介して $l^N f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}[[t_1,\ldots,t_g]]$ が成立する.

[12] [BKF15] では, 補完公式を Kronecker-Eisenstein 数というものを用いて記述されているが, Kronecker-Eisenstein 数と Eisenstein 数を結びつける函数等式を使うと, この命題のような補完公式を得る.

(2) λ_0 を ι_l により定まる K_0 の素点とする．この時，*Remark3.26* と同様に $f \in \mathcal{O}_{K_0,\lambda_0}[[t_1,\dots,t_g]]$ から $f : \mathcal{A}[\lambda^\infty] \longrightarrow \mathbb{C}_l$ が定まる．この集合論的な射について，ある p 進体 k の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大体 J_f が取れて $f : \mathcal{A}[\lambda^\infty] \longrightarrow \iota_l \circ \iota_p^{-1}(\mathcal{O}_{J_f})$ が成立する．

例 5.2. $f \in K_0(A)$，すなわち函数体の元で，さらに $A(m_{\mathbb{C}_l})$ に極を持たないとする．ここで $m_{\mathbb{C}_l}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$ の極大イデアル．A の原点における局所パラメータ t とし，函数体の元の t による展開に関する l 進整性から，([BKT07, Lemma 4.6] を参照) 十分大きな m に関して次が成り立つ．

$$l^m f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}[[t_1,\dots,t_g]].$$

実は，f の像に関する p 進有界性も証明でき，(これは *Appendix B* を参照) 十分大きな $n \in \mathbb{Z}$ を用いて $p^n f \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ である．

この例から，$\mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ は有理函数の世界より少し広い世界を考えていることがわかる．以降で用いる加法的指標を次のように定義する．

定義 5.3. 上記のような K における l 上の素イデアルを λ とする．$K/\mathbb{Q}$ の共役差積 $\mathfrak{D}$ とし，$\mathfrak{D}^{-1}$ の λ べき部分 d^{-1} として固定する．この時，$\mathrm{tr} : K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda} \mapsto \mathbb{Q}_l; x \mapsto \mathrm{tr}_{K_\lambda/\mathbb{Q}_l}(xd^{-1})$ として tr を定義する．

Sinnot[Sin87] の有理函数に付随する測度に倣って，形式函数に付随する測度を次のようにして定義する．

定義 5.4. $f \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ という形式函数に付随する測度 $\alpha = \alpha_f$ とは，$\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 上の $\mathcal{O}_{J_f}$ 値測度であり，次の等式を満たすものである．

$$\widehat{\alpha} : K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda} \longrightarrow J; a/\lambda^n \mapsto \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} \exp(2\pi i \mathrm{tr}(\frac{ax}{\lambda^n}))d\alpha(x)$$

に対して，$f \circ \delta = \widehat{\alpha}$.

逆に，$f \in \mathcal{F}_{K_0,A}$ が与えられたとき，f に付随する測度 α_f を構成することができる．

補題 5.5. $f \in \mathcal{F}_{K_0,A}$ に対して f に付随する測度 α_f が構成でき，f と形式函数に付随する測度 α_f は 1 対 1 に対応する．

証明．$a + \lambda^n \mathcal{O}_{K,\lambda} \subset \mathcal{O}_{K,\lambda}$, $a \in \mathcal{O}_{K,\lambda}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ における特性函数は次のように書ける．

$$1_{a+\lambda^n\mathcal{O}_{K,\lambda}} = \frac{1}{N(\lambda)^n} \sum_{b \in (1/\lambda^n)\mathcal{O}_{K,\lambda}/\mathcal{O}_{K,\lambda}} \exp(2\pi i \mathrm{tr}(-ab))\chi_b, \tag{16}$$

但し，$\chi_b(y) := \exp(2\pi i \mathrm{tr}(by))$, $y \in \mathcal{O}_{K,\lambda}$ とした．この等式 (16) を基にして，

$$\alpha_f(a + \lambda^n \mathcal{O}_{K,\lambda}) := \frac{1}{N(\lambda)^n} \sum_{b \in \mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n\mathcal{O}_{K,\lambda}} \exp(2\pi i \mathrm{tr}(-a\frac{b}{\lambda^n}))f \circ \delta(b/\lambda^n)$$

として α_f を定義すれば，distribution 関係式を満たすことが次のようにして示される．$a+\lambda^n\mathcal{O}_{K,\lambda} = \bigsqcup_{b\in\mathcal{O}_K/\lambda}(a+\lambda^n b + \lambda^{n+1}\mathcal{O}_{K,\lambda})$ という非交和を考える．この時，

$$\alpha_f(a + \lambda^n \mathcal{O}_{K,\lambda}) = \sum_{b \in \mathcal{O}_K/\lambda} \alpha_f(a + \lambda^n b + \lambda^{n+1}\mathcal{O}_{K,\lambda})$$

が成立することを示せばよい．左辺は，

$$\frac{1}{N(\lambda^n)} \sum_{b \in \mathcal{O}_K/\lambda^n} \exp(2\pi i \mathrm{tr}(\frac{-ab}{\lambda^n}))f(\delta(\frac{b}{\lambda^n})) \tag{17}$$

であり，右辺は，

$$\frac{1}{N(\lambda)^{n+1}} \sum_{b \in \mathcal{O}_K/\lambda} (\sum_{c \in \mathcal{O}_K/\lambda^{n+1}} \exp(2\pi i \mathrm{tr}(\frac{-(a+\lambda^n b)c}{\lambda^{n+1}}))f(\delta(\frac{c}{\lambda^{n+1}}))) \tag{18}$$

である．今，c が (λ) に含まれていなければ，上式の b に関する和は次のように計算される．

$$\sum_{b \in \mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda} \exp(2\pi i \mathrm{tr}(-\frac{ac}{\lambda^{n+1}} - \frac{bc}{\lambda})) = 0$$

従って, (17)=(18) が従う. 以上により, α_f は確かに distribution 関係式を満たしており, $\mathcal{O}_{J_f}$ に値を持つ分布となることが示された. □

このように定義された形式函数 f に付随する測度 α_f の Mellin 変換

$$M_{\alpha_f}(\psi) := \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} \psi(a) d\alpha_f(a)$$

($\psi : \mathcal{O}_{K,\lambda}^{\times} \longrightarrow \mathcal{O}_{J_f}^{\times}$ は位数有限指標), がそこまで豊富な ψ では消えないことを示すことが, この節の目標である.

議論の方針を述べる. この Mellin 変換が無数の相異なる ψ で消えてしまえば, そこから線形関係式が生じる (5.2 節で論じる). そして, これは次の節で示す線形独立性に矛盾してしてしまうのである.

5.1. **線形独立性.** この節では, ある線形独立性について議論する. 以降では, $\widehat{\mathcal{A}}_{/R}$ の自己準同型 $\mathrm{End}_R(\widehat{\mathcal{A}}) =: \mathcal{O}$ とする. この環は補題 2.7 により単項イデアル整域である. 初めに, 最も基本的な線形独立性を示す.

命題 5.6. $f_i \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$, $i = 1, \ldots, m$ と定め, 各 i に対して

$$\Phi_i : \mathcal{A}^n[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}; (P_j)_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} P_j$$

という射を定義する. ここで, $\alpha_{ji} \in \mathcal{O}$ とした. 次を仮定する.

- $\alpha \cdot \Phi_i = \beta \cdot \Phi_j \Rightarrow \alpha = \beta = 0$, が任意の $i \neq j$, $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ に対して成立する.

この時, $F := \sum_{i=1}^{m} f_i \circ \Phi_i : \mathcal{A}^n[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ が $F = 0$ であれば $f_i \in K_0$ が成立する.

注意 5.7. この命題は, 係数 K_0 を $\overline{\mathbb{Q}}$ 係数に置き換えても正しい. そこで, 係数に関する技術的な議論を避けたければ, 本命題の証明は全て $K_0 = \overline{\mathbb{Q}}$ として考えてよい.

証明. まず, 上記の仮定を満たすような $f_i \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ で, f_i が定数でないようなものが取れたとする. この時, 反例となるような $f_i \in \bigcup_{K_0} \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}, i = 1, \ldots . m$ のうち, m が最小であるようなものを, 改めて f_i, $i = 1, \ldots, m$ とする. ここで, K_0 は K 上の p において不分岐な有限次アーベル拡大全体を走るとする. 一般性を失わずに f_2 は定数でないとしてよい. 今, 仮定により,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \end{pmatrix} \in M_{n\times 2}(M)$$

は, 階数 2 である. したがって, ある $\beta := (\beta_i)_{i=1,\ldots,n}, \beta_i \in \mathcal{O}$ が取れて,

$$\Phi_1 \circ \beta = 0, \Phi_2 \circ \beta \neq 0$$

とできる. ここで, $\beta : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}^n; x \mapsto (\beta_i x)$ と考える.

すると, 任意の $\tau \in \mathcal{A}[\lambda^\infty]$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{m} f_i \circ \Phi_i(x \widehat{\oplus} \tau) = f_i \circ \Phi_1(x) + f_2(\Phi_2(x) \widehat{\oplus} \Phi_2(\beta(\tau))) + \ldots + f_m(\Phi_m(x) \widehat{\oplus} \Phi_m(\beta(\tau))) = 0.$$

したがって, $f_i^* \in \mathcal{F}_{K_0(A[\lambda^\rho]),\mathcal{A}}$ ($\rho \in \mathbb{Z}$ は適切な整数) を $f_i^*(t) := f_i(t) - f_i(t \widehat{\oplus} \Phi_i(\beta(\tau)))$ として定義すれば,

$$f_2^* \circ \Phi_2 + \ldots + f_m^* \circ \Phi_m = 0 : \mathcal{A}^n[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

が成立する. 今 m の最小性により, $f_i^* \in K_0(A[\lambda^\rho])$, $i = 2, \ldots, m$ が成立する. 特に, 定数 $c \in K_0(A[\lambda^\rho])$ を用いることで, 次の等式を得る.

$$f_2^*(t) = f_2(t) - f_2(t \widehat{\oplus} \Phi_2(\beta(\tau))) = c.$$

t を $t \widehat{\oplus} \Phi_2(\beta(\tau))$ に取り換えても上式は成立し, 以下この取り換えを繰り返して足し上げることで,

$$f_2(t) - f_2(t \widehat{\oplus} \beta(M\tau)) = Mc$$

が任意の $M>0$ に対して成立する．特に，$\tau \in \mathcal{A}^n[\lambda^\infty]$ であったので，十分大きな N に対して $l^N\tau = 0$ が成立する．したがって，$l^N c = 0$ であり $c = 0$ が成立する．

今，仮定より $\Phi_2 \circ \beta \neq 0$ であり，$\Phi_2 \circ \beta : \mathcal{A}[\lambda^\infty] \longrightarrow \mathcal{A}[\lambda^\infty]$ が全射であることより，$\tau \in \mathcal{A}[\lambda^\infty]$ が任意であったことを踏まえて f_2 が定数となり，f_2 を定数でないとしていたことに反する． □

この基本的な線形独立性を基にして，次の線形独立性を証明する．

命題 5.8. $f_i \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$, $c_i \in \mathcal{O}_{K,\lambda}$ $(i = 1,\ldots,m)$ として，c_i が次を満たすとする．

- $\alpha,\beta \in \mathcal{O}$ を任意にとる．$\alpha c_i = \beta c_j,\ i \neq j$ が成立すれば $\alpha = \beta = 0$ が必ず成立する

この時，$F := \sum_{i=1}^m f_i \circ c_i : \mathcal{A}[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ が $F = 0$ であれば，$f_i \in K_0$．

命題の証明 *5.8.* 初めに，$M \subset \mathcal{O}_{K,\lambda}$ を $c_1,\ldots,c_n$ を含むような有限生成自由 $\mathcal{O}$ 加群であるとする． このようなものは，$\mathcal{O}$ が PID であることから構成できる． M の $\mathcal{O}$ 加群としての基底を $e_1,\ldots,e_s$ とする． また，$e : \mathcal{A}[\lambda^\infty] \longrightarrow \mathcal{A}^s[\lambda^\infty]; x \mapsto (e_i x)_{i=1}^s$ とする．また，

$$c_i = \sum_{j=1}^s e_j \alpha_{ji}$$

として，$\alpha_{ji} \in \mathcal{O}$ を定める．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}[\lambda^\infty] \arrow[r, "e"] \arrow[dr, bend right, "c_i"'] & \mathcal{A}^s[\lambda^\infty] \arrow[d, "\Phi_i"] \\ & \mathcal{A}[\lambda^\infty] \end{tikzcd}$$

という可換図式が成立するように，

$$\Phi_i((P_j)_j) := \sum_{j=1}^s \alpha_{ji} P_j$$

と定義する．まず，e の構成法から，

$$e : \mathcal{A}[\lambda^\infty] \longrightarrow \mathcal{A}^s[\lambda^\infty] \subset \widehat{\mathcal{A}}^s(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$$

の像が形式 Lie 群において Zariski 稠密であることを示す．もし e の像が Zariski 稠密でなければ，補題 2.11 により

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_s e_s = 0$$

が $\alpha_i \in \mathcal{O}$ に対して成立する．これは，e_i が自由 $\mathcal{O}$ 加群の基底であったことに反する．

このことより，e の像が Zariski 稠密であることが従う．c_i に関する仮定から，$i \neq j$ に対して次が成立している．

$$\alpha \circ \Phi_i = \beta \circ \Phi_j \Rightarrow \alpha\Phi_i \circ e = \beta\Phi_j \circ e \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

$\alpha,\beta \in \mathcal{O}$. 先の補題 2.10, 命題 5.6 と組み合わせて，f_i が定数，すなわち $f_i \in K_0$ を得る． □

最後に，Raynaud[Ray83], MacQuillan[Mc95], Hrushovsky[Hru01] により証明された予想である Manin-Mumford 予想の Serban[Ser20] により示された形式群類似を元手にある種の剛性を記述する．R を標数 0 かつ剰余標数 l である完備ネータ局所環とする．R 上の l 可徐形式 Lie 群 $\mathcal{F}_{/R}$ に関して次の結果が知られている．

定理 5.9 (Serban[Ser20])**.** $\mathcal{F}_{/R}$ を標数 0 で剰余標数 l の完備ネータ局所環上の l 可徐形式リー群 $\mathcal{F}_{/R}$ とする．$\mathcal{F}$ の閉部分集合 $X_{/R}$ が，$\mathcal{F}[l^\infty]$ と無限に交叉すれば，或る次元が 1 以上の閉部分形式群スキーム $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, および $a \in \mathcal{F}[l^\infty]$ が存在して，$a + \mathcal{G} \subset X$ が成立する．

この定理より，次の命題が従う．

命題 5.10. 任意の $c_i \in \mathcal{O}_{K,\lambda}$, $f_i \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ $(i = 1, \dots, m)$ に対して

$$F := \sum_{i=1}^{m} f_i \circ c_i : \mathcal{A}[\lambda^\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

が, 無限の相異なる $\mathcal{A}[\lambda^\infty]$ の点で 0 となるとき $F = 0$ が成立する.

証明. F のゼロ集合 Z について, 定理 5.9 を $\mathcal{F} = \widehat{\mathcal{A}}_{/\widehat{R}}$ に対して適用することで, 或る 1 次元以上の閉形式部分群スキーム $\mathcal{G} \subset \widehat{\mathcal{A}}$, $a \in \mathcal{A}[\lambda^\infty]$ が存在して次の包含が成立する.

$$Z \supset \mathcal{G} + a.$$

しかしながら, このような $\mathcal{G}$ は補題 2.10 の反例を与えている. ゆえに $\mathcal{G} = \widehat{\mathcal{A}}$ であり, $Z = \widehat{\mathcal{A}}$ を得る. Z は F のゼロ集合であったから, F は $\mathcal{A}[\lambda^\infty]$ 上恒等的に 0 である. □

さて, これらの線形独立性に関する結果を基にして, 形式函数に付随する測度の Mellin 変換に関する, ある性質を証明する.

5.2. **Mellin 変換に関する性質.** この節では, 線形独立性の結果を基にして Mellin 変換に関する性質を証明する. 以降, μ を, $\mathcal{O} = \mathrm{End}(\widehat{\mathcal{A}}_{/R})$ に含まれる 1 のべき乗根全体のなすアーベル群とする. また, $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ に含まれる 1 のべき乗根 μ_λ とする. すなわち, N を $1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda}$ が $\mathcal{O}_{K/\lambda}$ と位相群として同型になるような最小の N としたとき, $\mathcal{O}_{K/\lambda}$ の剰余位数 $q = l^f$ として $\mu_{q-1} \times \mu_{l^{(N-1)f}} \subset \mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ である.. まず, 本節の主定理 (命題 5.14) の証明に入る前に準備を行う. α が, 形式函数に付随する p 進測度で, 任意の $c \in \mu$ に対して $\alpha \circ c = \alpha$ を満たしているとする. β を次のような測度とする.

$$\beta = \sum_{c \in \mu_\lambda/\mu} \alpha \circ c|_{1+\lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda}}.$$

β の Mellin 変換は次のように計算される.

$$\begin{aligned} M_\beta(\rho) &= \sum_{c \in \mu_\lambda/\mu} \int_{(1+\lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda})} \rho(\sigma) d\alpha \circ c(\sigma) \\ &= \frac{1}{w} \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} \rho(a) d\alpha(a) \\ &= \frac{1}{w} M_\alpha(\rho) \end{aligned} \tag{19}$$

但し, w は μ の位数とし, $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{conti.}}(\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times, \overline{\mathbb{Q}})$ を非自明な位数有限指標とした. したがって $M_\beta(\rho) \neq 0$ は $M_\alpha(\rho) \neq 0$ と同値である.

また, 一般的な加法的指標について次が成立する.

補題 5.11. $\mathbb{Q}_l$ 上の有限次拡大体 V の整数環 $\mathcal{V}$ とする. $\mathcal{V}$ の $\mathbb{Z}_l$ 上の基底 $\omega_1, \dots, \omega_n$ を 1 つ固定する. $e : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Q}_l$ を任意の $\mathbb{Z}_l$ 線形な加法的指標とすれば, 或る $x \in V$ が存在して, 次の等式が任意の $a = a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n \in \mathcal{V}$ に対して成立する.

$$e(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}_{V/\mathbb{Q}_l}(x a_i \omega_i).$$

証明. 加法的指標 e は $e(\omega_1), \dots, e(\omega_n) \in \mathbb{Q}_l$ のみによって決まり, 逆に任意の n 個の $\mathbb{Q}_l$ の元 $(v_1, \dots, v_n)$ をとれば, $e(\omega_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$ が成り立つような加法的指標が取れる. したがって, 補題の主張を示すには, 次の $\mathbb{Q}_l$ 線形写像が $\mathbb{Q}_l$ ベクトル空間の同型を与えていることを示せば十分である.

$$V \longrightarrow \mathbb{Q}_l^{\oplus n}; x \mapsto (\mathrm{tr}_{V/\mathbb{Q}_l}(\omega_1 \cdot x), \dots, \mathrm{tr}_{V/\mathbb{Q}_l}(\omega_n \cdot x)).$$

しかし, この線形変換の表現行列の行列式は $\det(\mathrm{tr}_{V/\mathbb{Q}_l}(\omega_i \omega_j)) \neq 0$ であるので上記の線形変換は同型である. □

この補題を基に, 乗法的指標 ρ に対し, $x_\rho \in K_\lambda$ を次のように定義する.

定義 5.12. 自然数 N を乗法群 $1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}$ が加法群 $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ と同型になるように十分大きくとる. 任意の有限指標 $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{conti.}}((1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}),\overline{\mathbb{Q}}^\times)$ を固定する. 補題 *5.11* により, 任意の $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ の $\mathbb{Z}_l$ 上の基底 $\omega_1,\dots,\omega_f$ に対して次の等式が全ての $i=1,\dots,f$ について成立するような 或る $x_\rho \in K_\lambda$ が存在する.

$$\rho(1+\lambda^N\omega_i)=\exp(2\pi i\mathrm{tr}(\lambda^N\omega_i x_\rho)).$$

そこで, 以降ではこのような x_ρ を各 ρ に対して 1 つ固定することにする.

次の補題を準備する.

補題 5.13. 形式函数 f に付随する測度 α が, 任意の $c\in\mu$ に対して $\alpha\circ c=\alpha$ を満たしているとする. $J_f=k_f(\mu_{l^\infty})$, k_f は p 進体であったが, 必要に応じて k_f を拡大することで, 次の仮定が満たされるようにする. 但し, k_f に含まれる 1 の l べき乗根が μ_{l^M} であるとした.

1. $k_f(\mu_l, A[l])=k_f$,
2. $f\in K_0[[t]]$ は ι_p により $f\in k_f[[t]]$ を定める.
3. $1+\lambda^M\mathcal{O}_{K,\lambda}\simeq\mathcal{O}_{K,\lambda}$ という乗法群と加法群の間の位相群としての同型が存在する.

また, $y\in 1+\lambda^N\mathcal{O}_{K_\lambda}$ に対して $\beta_y:=\beta|_{y(1+\lambda^{Mf}\mathcal{O}_{K,\lambda})}$ とする. $\rho\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{conti.}}((1+\lambda\mathcal{O}_{K_\lambda}),\mathcal{O}_{J_f}^\times)$ が K_λ の剰余位数 l^f として $\ker(\rho)=1+\lambda^{m+Mf}\mathcal{O}_{K,\lambda}$, $m\geq Mf$ を満たすときに, 次のような同値関係が成立する.

$$M_\alpha(\rho)=0\Leftrightarrow\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}}\exp(2\pi i\mathrm{tr}(x_\rho(x/y)))d\beta_y(x)=0$$

ここで, $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ の $\mathbb{Z}_l$ 自由加群としての基底 $\omega_1,\dots,\omega_f$ を 1 つ固定し, $x_\rho\in K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda}$ は, *Definition 5.12* において $N=m$ として定義する. また, $y\in 1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}$ は任意の元とした.

補題の証明 *5.13.* まず, k_f の取り方から $\mu_l, A[l]$ は k_f 上有理的, すなわち $\sigma\in\mathrm{Gal}(J_f/k_f)$ が自明に作用していた. 以降では, $\mathrm{Gal}(J_f/k_f)$ の $A[\lambda^\infty]$(これは, δ を介して $K_\lambda/\mathcal{O}_{K_\lambda}$ とアーベル群として同型である) への作用, および μ_{l^∞} への作用が与える準同型をそれぞれ $\chi_A:\mathrm{Gal}(J_f/k_f)\longrightarrow\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$, $\chi_\mu:\mathrm{Gal}(J_f/k_f)\longrightarrow\mathbb{Z}_l^\times\subset\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ として定義する.

特性函数に関する等式 (16) を用いることで $a\in K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda}$, $\sigma\in\mathrm{Gal}(J_f/k_f)$ に対して次を得る.

$$\begin{aligned}(\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}}\exp(2\pi i(\mathrm{tr}(ax)))d\beta(x))^\sigma &=\sum_{c\in\mu_\lambda/\mu}(\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}}(\sum_{x\in\frac{1}{\lambda^N}\mathcal{O}_{K,\lambda}/\mathcal{O}_{K,\lambda}}\exp(2\pi i(\mathrm{tr}(x+a(x/c)))d\alpha(x)))^\sigma\\ &=\sum_{c\in\mu_\lambda/\mu}(\sum_x\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}}(\exp(2\pi i(\mathrm{tr}(x(1+a/c)))))d\alpha)^\sigma\\ &=\sum_{c\in\mu_\lambda/\mu}(\sum_x f(\delta(x(1+a/c))))^\sigma\\ &=\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}}\exp(2\pi i(\mathrm{tr}(\chi_A(\sigma)ax)))d\beta(x).\end{aligned}$$

ここで, 最後の等号では, f が k_f に埋め込みを持つ有限次代数体における整数環の局所化上で定義されることから, $f(\delta(x(1+a/c)))^\sigma=f(\delta(\chi_A(\sigma)x(1+a/c)))$ という等式が成立することを用いた. この等式の左辺で $\sigma=\mathrm{id}$ とした式を $F(a):=\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}}\exp(2\pi i(\mathrm{tr}(ax)))d\beta(x)$ として定義する.

特性函数を用いた Mellin 変換に関する等式 (18) を用いて $M_\beta(\rho)$ を計算することで次の等式を得る.

$$\begin{aligned}M_\beta(\rho)^\sigma &=\frac{1}{N(\lambda)^{N_\rho}}\sum_{a\in\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^{N_\rho}}\rho^\sigma(a)(\sum_x F(\chi_A(\sigma)x)\exp(2\pi i\mathrm{tr}(ax)\chi_\mu(\sigma)))\\ &=\frac{1}{N(\lambda)^{N_\rho}}\sum_{a\in\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^{N_\rho}}(\sum_x F(x)\exp(2\pi i\mathrm{tr}(\frac{\chi_\mu(\sigma)}{\chi_A(\sigma)}ax))\\ &=\frac{\rho^\sigma(\chi_A(\sigma))}{\rho^\sigma(\chi_\mu(\sigma))}M_\beta(\rho^\sigma)\end{aligned}$$

ここで λ^{N_ρ} を, $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ の位数有限指標 ρ の導手とした. 従って, 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(J_f/k_f)$ に対して $M_\beta(\rho)^\sigma = 0 \Leftrightarrow M_\beta(\rho^\sigma) = 0$ が成立する. 今, $J_f = k_f(\mu_{l^\infty})$ であり, $\mu_l \subset k_f$ であるので J_f/k_f は $\mathbb{Z}_l$ 拡大である. J_f/k_f の m-th layer k_m とする.

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(k_m/k_f)} \rho^\sigma(y)^{-1}M_\beta(\rho^\sigma) &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(k_m/k_f)} \rho^\sigma(y)^{-1}\int_{1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}} \rho^\sigma(x)d\beta(x)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(k_m/k_f)} \int_{1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}} \rho^\sigma(\frac{x}{y})d\beta(x)\\ &= \int_{1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}} \mathrm{tr}_{k_m/k_f}(\rho(\frac{x}{y}))d\beta(x) \qquad (20)\end{aligned}$$

ここで, ρ の像が 1 の l べき乗根であることから, 次が成立する.

$$\mathrm{tr}_{k_m/k_f}(\rho(x/y)) = \begin{cases} l^m\rho(x/y) & (\rho(x/y)\in k_f)\\ 0 & (\rho(x/y)\notin k_f)\end{cases} \qquad (21)$$

従って, $\mathrm{tr}_{k_m/k_f}(\kappa(x/y)) \neq 0$ であることと, $\rho(x/y) \in k_f$ は同値である. このことは, $\rho(x/y)^{l^M} = 1$, すなわち $(x/y)^{l^M} \in \mathrm{Ker}(\rho) = 1 + \lambda^{m+Mf}\mathcal{O}_{K,\lambda}$ と同値である. 以上のことから, 次の同値関係を得る.

$$\mathrm{tr}_{k_N/k_f}(\kappa(x/y)) \neq 0 \Leftrightarrow x \in y(1+\lambda^m\mathcal{O}_{K,\lambda}).$$

実際, $x/y = 1+\lambda^a u$, $u \in \mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ とすれば, $(x/y)^{l^M} = (1+\lambda^a u)^{l^M} = 1 + \lambda^{a+fM}u + \ldots$ であり, $(x/y)^{l^M} \in 1+\lambda^{m+Mf}\mathcal{O}_{K,\lambda}$ であることと $a \geq m$ が同値となる.

　等式 (19) より $M_\alpha(\rho) = 0$ の時, $M_\beta(\rho) = 0$ であった. 従って, 等式 ((20)) から次の同値関係を得る.

$$M_\alpha(\rho) = 0 \Leftrightarrow l^m \int_{y(1+\lambda^m\mathcal{O}_{K,\lambda})} \rho(x/y)d\beta(x) = 0.$$

さて, $x = y(1+\lambda^m z)$, $z \in \mathcal{O}_{K,\lambda}$ とする. この時, 固定していた $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ の $\mathbb{Z}_l$ 上の基底 $\omega_1,\ldots,\omega_f$ を用いて $z = z_1\omega_1+\ldots+z_f\omega_f$, $z_1,\ldots,z_f \in \mathbb{Z}_l$ とすれば次のような等式を得る.

$$\begin{aligned}\rho(x/y) &= \rho(1+\lambda^m(z_1\omega_1+\ldots+z_f\omega_f))\ (m\geq Mf)\\ &= \rho(1+\lambda^m\omega_1)^{z_1}\cdots\rho(1+\lambda^m\omega_f)^{z_f}\\ &= \exp(2\pi i\mathrm{tr}(\lambda^m x_\rho(\omega_1 z_1+\ldots+\omega_f z_f))\\ &= \exp(-2\pi i\mathrm{tr}(x_\rho))\cdot\exp(2\pi i\mathrm{tr}(x_\rho(x/y))).\end{aligned}$$

従って, 任意の $y \in 1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}$ に対して次の同値関係を得る.

$$M_\alpha(\rho) = 0 \Leftrightarrow \int_{y(1+\lambda^m\mathcal{O}_{K,\lambda})} \rho(x/y)d\beta(x) = 0 \Leftrightarrow \int_{y(1+\lambda^m\mathcal{O}_{K,\lambda})} \exp(2\pi i\mathrm{tr}(x_\rho(x/y)))d\beta(x) = 0.$$

$t \in (1+\lambda^{Mf}\mathcal{O}_{K,\lambda})/((1+\lambda^m\mathcal{O}_{K,\lambda}))$ を任意にとる. $y \in 1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}$ を $yt \in 1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}$ と取り換え, $x_\rho \in K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda}$ を $tx_\rho \in K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda}$ に取り換えても同様の主張が成立することに注意する. 従って, このように $t \in (1+\lambda^{Mf}\mathcal{O}_{K,\lambda})/(1+\lambda^m\mathcal{O}_{K,\lambda})$ で取り換えて, 次の同値関係を得る.

$$M_\alpha(\rho) = 0 \Leftrightarrow \int_{ty(1+\lambda^m\mathcal{O}_{K,\lambda})} \exp(2\pi i\mathrm{tr}(x_\rho(x/y)))d\beta(x) = 0.$$

今, $M_\alpha(\rho) = 0$ の時, 上式の右辺を全ての $t \in (1+\lambda^{Mf}\mathcal{O}_{K,\lambda})/(1+\lambda^m\mathcal{O}_{K,\lambda})$ に対して足し上げることで, 求める等式であった, 次の等式が得られる.

$$\int_{y(1+\lambda^{Mf}\mathcal{O}_{K,\lambda})} \exp(2\pi i\mathrm{tr}(x_\rho(x/y)))d\beta(x) = 0.$$

　逆に, 上記の等式を ρ が満たすならば $M_\alpha(\rho) = 0$ となることについては, [LK23, Lemma 5.3, Lemma 3.2] を参照されたい. □

　以上の準備のもと, 次の主張を証明する.

命題 5.14. $\alpha = \alpha_f$ を $f \notin \overline{\mathbb{Q}}$, $f \in \mathcal{F}_{K_0,\mathcal{A}}$ に付随する $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 上の測度であるとする．また, $\mathcal{O}_{K,\lambda}^{\times} \simeq \mu_\lambda \times (1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda})$ となるように 1 のべき乗根のなすアーベル群 μ_λ と, 位相群として $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ と同型な $1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda}$ を定義する．α, および μ という $\mathcal{O} = K_0 \cap \mathcal{O}_{K,\lambda}$ に含まれる 1 のべき乗根のなすアーベル群が次の仮定を満たすとする．

- $\alpha \circ c = \alpha$ が任意の $c \in \mu$ で成立する．
- $\mu \neq \mu_\lambda$ である．

この時, 高々有限個を除く任意の有限指標 $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{conti.}}(1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda}, \mathcal{O}_{J_f}^{\times})$ に対して, $M_\alpha(\rho) \neq 0$ が成立する．

注意 5.15. 本稿では, 特に命題 *3.25* のような形式函数に対し, この命題を適応する．このような形式函数は l 上の K における任意の素点が $K/\mathbb{Q}$ で不分岐であるという条件で構成されていた．ゆえに, 特に興味があるのは, 本命題で $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ が或る有限体の *Witt* 環で $N = 1$ となる場合である．

命題の証明 *5.14*. 初めに, 次の等式が成立するような $x' \in K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 全体を $C \subset K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda}$ と定義する．

$$\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} \exp(2\pi i \mathrm{tr}(x' x/y)) d\beta_y(x) = 0.$$

ここで β_y、$y \in 1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda}$ の定義から, 任意の $x' \in C$ に対して次の等式が成立する．

$$\sum_{c \in \mu_\lambda/\mu} \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} \exp(2\pi i \mathrm{tr}(c^{-1} x' x/y)) d\alpha|_{cy(1+\lambda^N \mathcal{O}_{K_\lambda})}(x) = 0. \tag{22}$$

ここで, 特性函数に関する等式 (16) を用いることで, $\alpha_{cy} := \alpha|_{cy(1+\lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda})}$ も形式函数に付随する測度であることがわかる．そこで α_{cy}, $c \in \mu$, $y \in 1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda}$ に付随する形式函数 f_{cy} と記述する．この時, 任意の $y \in 1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda}$ と, $x'' \in Cyx^{-1} \subset K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda}$ に対して (22) を用いることで次の等式が従う．

$$\sum_{c \in \mu_\lambda/\mu} f_{cy}(\delta(c^{-1}x'')) = \sum_{c \in \mu_\lambda/\mu} f_{cy}([c^{-1}](\delta(x''))) = 0.$$

今, C が無限集合であるとする．すると, $\mu_\lambda \neq \mu$ という仮定を踏まえて, 先の剛性に関する命題 5.10, および命題 5.8 を用いれば, $f_{cy} \in \overline{\mathbb{Q}}$ が任意の $c \in \mu_\lambda/\mu$, $y \in (1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda})$ に対して成立する．したがって, $\alpha = \sum_{c,y} \alpha_{cy}$ という有限和で記述できることから, $\alpha_f = \alpha$ で定まる形式函数 f に対して $f \in \overline{\mathbb{Q}}$ が成立すること示された．他方, これは $f \notin \mathbb{Q}$ としていたことに矛盾する．従って, C は高々有限集合であることが従う．

補題 5.13 により C は次のような集合であることがわかる．

$$C = \{x \in K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda} \mid x = x_\rho \text{となる } \rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{conti.}}(1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda}, \mathcal{O}_{J_f}^{\times}) \text{ が存在して } M_\alpha(\rho) = 0\}.$$

他方, $V := \{\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{conti.}}(1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda}, \mathcal{O}_{J_f}^{\times}) \mid \ M_\alpha(\rho) = 0\}$ を考える．この時, V が無限集合であれば C も無限集合であることを確認する．一般の場合も同様なので $\mathcal{O}_{K,\lambda} = \mathbb{Z}_l$ として議論する．初めに $m \geq 2$ で, $d_m \in 1 + l\mathbb{Z}_l$ という l と互いに素な元を, 次のように定義する．

$$d_m = \frac{\log_l(1 + l^m)}{l^{m-1} \log_l(1 + l)} = (1 + \frac{l^m}{2} + \cdots)^{-1}.$$

この時, $(1 + l)^{d_m l^{m-1}} = (1 + l^m)$ となる．したがって, 各 $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{conti.}}(1 + l\mathbb{Z}_l, \mathcal{O}_{J_f}^{\times})$, $\mathrm{Ker}(\rho) = 1 + l^{m+M}\mathbb{Z}_l$ に対して

$$\rho(1 + l^m) = \zeta_\rho^{l^m} = \rho(1 + l)^{l^{m-1} d_m},$$

つまり $\zeta_\rho^l = \rho(1 + l)^{d_m}$ が成立しているように $\zeta_\rho := \exp(2\pi i x_\rho)$, $x_\rho \in C$ が選べる．従って, もし $\rho \in V$ が無限集合であれば, ζ_ρ, $x_\rho \in C$ も無限集合であることが示された．ここで C は有限集合であるから, V もまた有限集合でなければならない．$V = \{\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{conti.}}(1 + \lambda^N \mathcal{O}_{K,\lambda}, \mathcal{O}_{J_f}^{\times}) \mid \ M_\alpha(\rho) = 0\}$ で, これが有限集合であることが示されたので, 命題の主張を得る． □

この命題の仮定を満たすような形式函数に付随する測度は, 一般には豊富に存在する．

補題 5.16. α を形式函数に付随する $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 上の測度とする．μ_λ を $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ に含まれる 1 のべき乗根よりなる有限部分群とする．$\omega \in \mathrm{Hom}(\mu_\lambda, \mathcal{O}_{J_f}^\times)$ をとる．$\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 上の p 進測度 $\alpha_{\mathrm{inv},\omega}$ を次のように定義する．

$$\alpha_{\mathrm{inv},\omega} := \sum_{c\in\mu} \omega(c)\alpha|_{\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times} \circ c$$

$\pi : \mathcal{O}_{K,\lambda}^\times \simeq \mu_\lambda \times (1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}) \longrightarrow \mu_\lambda$ を自然な射影とする．この時, 任意の $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 上の局所定数函数 f に対して, $\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} f(a)d\alpha|_\omega := \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} f(a)\omega(\pi(a))d\alpha_{\mathrm{inv},\omega}(a)$ とすることで定義される p 進測度 $\alpha|_\omega$ は, 次の 3 つの性質を満たしている．

(1) $\alpha|_\omega$ は形式函数に付随する測度であり,
(2) 任意の $c \in \mu$ に対して, $\alpha|_\omega \circ c = \alpha|_\omega$ を満たす．
(3) さらに, 任意の $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{conti.}}(1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}, \mathcal{O}_{J_f}^\times)$ に対して $wM_\alpha(\omega\rho) = M_{\alpha|_\omega}(\rho)$ を満たす．ただし w は μ の位数とした．

証明. 1 つ目の主張は, 特性函数に関する公式 (16) を用いて, $\alpha|_\omega$ が次のように記述されることから従う．

$$\alpha|_\omega = \sum_{\zeta\in\mu_\lambda} \omega(\zeta)\alpha_{\mathrm{inv},\omega}|_{\zeta(1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda})}.$$

次に, 2 番目の主張を示す．初めに, 任意の $c \in \mu$ に対して, $\alpha_{\mathrm{inv},\omega} \circ c = \omega(c)^{-1}\alpha_{\mathrm{inv},\omega}$ が成立することが $\alpha_{\mathrm{inv},\omega}$ の定義 $\alpha_{\mathrm{inv},\omega} = \sum_{c\in\mu} \omega(c)\alpha|_{\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times} \circ c$ から確認できる．

$\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 上の任意の局所定数函数 f をとる．この時, 任意の $d \in \mu$ に対し, 次の等式を得る．

$$\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} f(x)d\alpha|_\omega(xd) = \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} f(x)\omega(xd)\omega^{-1}(d)d\alpha_{\mathrm{inv},\omega}(x) = \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}} f(x)d\alpha|_\omega(x).$$

従って, $\alpha|_\omega$ は任意の $d \in \mu$ に対して $\alpha|_\omega \circ d = \alpha|_\omega$ をみたす．最後に 3 番目の主張を示す．任意の有限指標 $\rho \in \mathrm{Hom}(1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times)$ に対し, 次の等式を得る．

$$M_{\alpha_{\mathrm{inv},\omega}}(\omega\rho) = \sum_{c\in\mu} \omega(c) \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times} \omega\rho(x)d\alpha(xc) = \sum_{d\in\mu} \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times} \omega\rho(x)d\alpha(x) = wM_\alpha(\omega\rho).$$

が各 $\rho \in \mathrm{Hom}((1+\lambda^N\mathcal{O}_{K,\lambda}), \mathcal{O}_{J_f}^\times)$ に対して成立することがわかる． $\alpha|_\omega$ の定義を踏まえて, $M_{\alpha|_\omega}(\rho) = M_{\alpha_{\mathrm{inv},\omega}}(\rho\omega) = wM_\alpha(\rho\omega)$ という等式を得る． □

6. L 値への応用

CM 体の Hecke L 値に関する基本事項を確認する． この節では第 1 節と同様, $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ を CM 型 Σ_K の CM 体とする．また K^+ を K の最大総実部分代数体とする．$\mathfrak{g}$ を K における整イデアルとして $K(\mathfrak{g})$ を K のモジュラス $\mathfrak{g}$ である射類体とする．すなわち $I(\mathfrak{g})$ を K のイデアルで $\mathfrak{g}$ と互いに素なるものからなる群とし, $P(\mathfrak{g}) := \{a \in K^\times | \ a \equiv 1 \mod {}^\times\mathfrak{g}\}$, と定義したときに, $H(\mathfrak{g}) := I(\mathfrak{g})/P(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{g})/K)$ である．

Hecke$(\mathfrak{g})$ で, 導手が $\mathfrak{g}$ を割り切る全ての代数的 Hecke 指標全体とする．この時, 標準的な完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H(\mathfrak{g}), \overline{\mathbb{Q}}^\times) \longrightarrow \mathrm{Hecke}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathrm{Emb}(K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}})]$$

が取れるので, Hecke$(\mathfrak{g})$ の元と $\mathrm{Hom}(H(\mathfrak{g}), \overline{\mathbb{Q}}^\times)$ の積が定まる． ここで, 上記の短完全列の最後の射による, $\chi \in \mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})$ の像は無限型と呼ばれ, 次のようにして定める．

定義 6.1. $\chi \in \mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})$ に対して

$$\chi(a) = \prod_{\sigma\in\Sigma_K} \sigma(a)^{-\alpha_\sigma}\overline{\sigma}(a)^{\beta_\sigma}$$

が任意の $a \in K$, $a \equiv 1 \mod {}^\times\mathfrak{g}$ に対して成り立つような $\alpha := \sum_\sigma \alpha_\sigma\sigma \in \mathbb{Z}[\Sigma_K]$, $\beta := \sum_\sigma \beta_\sigma\overline{\sigma} \in \mathbb{Z}[\overline{\Sigma}_K]$ が存在する．そこで, χ が定める無限型を $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}[\mathrm{Emb}(K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}]$ で定める．

ここでも, 2 つの埋め込みを固定する.

$$\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}, \iota_l : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_l.$$

これらの埋め込みと, Σ_K は第 2.2 節で定めた仮定を満たすとする. 各 $\chi \in \mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})$ に対し, $\chi_\infty := \iota_\infty \circ \chi$ により定まる Hecke L 函数 $L(\chi, s)$ は, $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ として次のように定義される.

$$L(\chi, s) := \sum_{\substack{a \in I(\mathfrak{g}) \\ a \text{ は } K \text{ の整イデアル}}} \frac{\chi_\infty(a)}{N(a)^s},$$

ここで $\mathfrak{g}$ は χ の導手となる K の整イデアル. χ がノルム指標のべきでなければ, この複素函数 $L(\chi, s)$ は全複素平面に解析接続されることが知られる. 特に次のような $L(\chi)$ が well-defined に定義される.

定義 6.2. $\chi \in \mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})$ がノルム指標のべきでないときに, 以下のようにして複素数 $L(\chi)$ を定義する.

$$L(\chi) := L(\chi_\infty, s)|_{s=0}.$$

$\mathfrak{f}$ を K の pl と互いに素な整イデアルとしたとき, $L_\mathfrak{f}(\chi, s)$, $L_\mathfrak{f}(\chi)$ は, それぞれ $L(\chi, s), L(\chi)$ の定義における, 和を走るイデアル $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{f}$ と互いに素なものを走るものとして, 定義した複素函数とする.

CM 体 K の代数的 Hecke 指標 χ の無限型について Dirichlet の単数定理から次が従う.

命題 6.3. (Weil) $\chi \in \mathrm{Hecke}(\mathfrak{g})$ の無限型は, 或る $k, d(\sigma) \in \mathbb{Z}$ を用いて次のようにして与えられる.

$$-k\Sigma_K - \sum_{\sigma \in \Sigma_K} d(\sigma)(\sigma - \overline{\sigma}).$$

CM 体 K の代数的 Hecke 指標 χ が Deligne[De79] の意味で critical とは,

$$\{(-k - d(\sigma), d(\sigma))\}_{\sigma \in \Sigma_K}$$

が Figure 1 の領域に属することである. ここで, 対角成分では偶指標か奇指標であるかで $+, -$ を用いている.

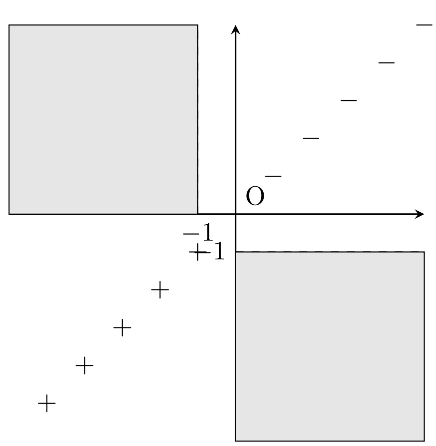

FIGURE 1. critical domain

K の整イデアル $\mathfrak{f}$ とする. $\mathrm{Crit}(\Gamma_\mathfrak{f})$ を, 定義 3.1 で与えられた $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\sigma_K} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\Sigma_K}$ の部分集合とする. 代数的 Hecke 指標 χ の無限型を $\beta - \alpha$, $(\beta \in \mathbb{Z}[\overline{\Sigma}_K], \alpha \in \mathbb{Z}[\Sigma_K])$ としたとき $(\beta, \alpha) \in \mathrm{Crit}(\Gamma_\mathfrak{f})$ であれば, χ は Critical な代数的 Hecke 指標である. 以降の節では, このような Critical である代数的 Hecke 指標を考察する.

6.1. **CM 周期.** この節では, 本稿の設定に適合する形で CM 体の CM 周期 $\{\Omega_{CM,\infty}(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_K}\in(\mathbb{C}^\times)^{\Sigma_K}$ を定義する (一般的な設定における定義については, [Katz78], [OH15] を参照されたい). CM 体 (K,Σ_K) をとる. また, 相異なる素数 p,l に対しては, 第 2 節 2.2 で設けた仮定 p-ord, l-ord を本節以降でも仮定し, p についてはさらに次の主張を満たしているとする.

- p 上の K^{ref} における素点全てが $\mathbb{Q}$ 上不分岐な素点である. ただし, K^{ref} は (K,Σ_K), $K\subset\overline{\mathbb{Q}}$ の reflex 体とした.

Chebotarev 密度定理によって, このような p は必ず存在することに注意する. また, この仮定は高次の Eisenstein 数の p 進整性のために必要となる仮定である. Σ_K により与えられる次のような同型を固定する.

$$\iota_{\Sigma_K}:K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\simeq\mathbb{C}^{\Sigma_K};a\otimes r\mapsto(\sigma(a)r)_{\sigma\in\Sigma}.$$

これを用いて K の整数環に CM を持つようなアーベル多様体の族を構成する.

全ての成分が純虚かつ, 虚数部分が正である元 $\delta\in K\otimes\mathbb{R}$ に対して Riemann 形式

$$\langle,\rangle_\delta:\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{R}\times\mathcal{O}_K\otimes\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};(z,w)\mapsto\frac{w\overline{z}-z\overline{w}}{2\delta}$$

が定義できる. これにより, 偏極構造 λ_δ が $A(\mathcal{O}_K)^{\mathrm{an}}:=\mathbb{C}^{\Sigma_K}/\iota_{\Sigma_K}(\mathcal{O}_K)$ 上に定まり, 代数体上定義されたアーベル多様体 $A(\mathcal{O}_K)$ が構成される. 以下では ι_{Σ_K} を省略する.

$A(\mathcal{O}_K)$ の偏極イデアルは δ に依存し, δ をうまくとることで偏極イデアル d は pl と互いに素であるとしてよい. 同様にして, K の pl と互いに素な整イデアル $\mathfrak{A}$ に対し, $\langle,\rangle_\delta$ は次を誘導する.

$$\mathfrak{A}\wedge_{\mathcal{O}_K^+}\mathfrak{A}\simeq N_{K/K^+}(\mathfrak{A})d^*=(N_{K/K^+}(\mathfrak{A})^{-1}d)^*.$$

したがって, 代数体上定義されたアーベル多様体 $A(\mathfrak{A})$ が取れ, $\langle,\rangle_\delta$ により偏極イデアル $d\cdot N_{K/F}(\mathfrak{A})^{-1}$ の偏極構造が $A(\mathfrak{A})^{\mathrm{an}}_{/\mathbb{C}}\simeq\mathbb{C}^{\Sigma_K}/\mathfrak{A}$ 上に定まる.

このような, K の整数環に CM を持つようなアーベル多様体 $A(\mathfrak{A})$, ($\mathfrak{A}:pl$ と互いに素) は, 次を満たす.

補題 6.4. *$A(\mathfrak{A})$ の $\mathbb{Q}$ 上ガロアな定義体 $M\subset\overline{\mathbb{Q}}$ で, K^{ref} 上有限次アーベル拡大, かつ p 上全ての M における素点が $\mathbb{Q}$ 上不分岐であるようなものが存在する.*

証明. p は仮定により $K^{\mathrm{ref}}/\mathbb{Q}$ で不分岐である. 志村-谷山 [ST61] の CM 付きアーベル多様体の主定理から, $A(\mathfrak{A})$ の Field of moduli M は p 上全ての K^{ref} における素点を p 上不分岐な素点に持つ. さらに, M は K^{ref} 上有限次アーベル拡大体である. ゆえに, M の p 上全ての素点は, p 上不分岐であり, M/K^{ref} は有限次アーベル拡大である. 他方, Milne[Mil72] により, CM 型単純アーベル多様体は, その定義体を Field of moduli に取れることが知られるので, 補題の主張を得る. □

pl と互いに素な K の整イデアル $\mathfrak{f}$ を以降の節では常に固定する. また, $\iota_l^{-1}(m_{\mathbb{C}_l})\cap\mathcal{O}_M=v_l$ と定める. ここで $M\subset\overline{\mathbb{Q}}$ を固定していたことに注意する.

$A(\mathfrak{f})$ の $R=\mathcal{O}_{M,(v_l)}$ 上定義される Neron モデルを $\mathcal{A}(\mathfrak{f})_{/R}$ とかくことにする. 必要であれば M を取り換えることで, $\mathcal{A}[\mathfrak{f}](R)=\mathcal{A}[\mathfrak{f}](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ を満たすとしてよい.

ここで, pl と互いに素な $\mathfrak{A}$ に対して,

$$S\mapsto\mathfrak{A}\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{A}(\mathfrak{f})(S)$$

という R 代数から集合への関手が定まる. ここで, テンソルは $\mathcal{O}_K$ 加群としてのテンソルをとる. これは R 上のアーベルスキームで表現可能であることが知られる ([KS24, Section 4] を参照).

そこで, このアーベルスキーム $\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})$ とする. この R 上定義されたアーベルスキームの族 $\{\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})_{/R}\mid\mathfrak{A}:$ pl と互いに素 $\}$ に対して, R 加群 $\omega_{\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R}=\pi_*\Omega^1_{\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R}$ に関する R 加群の基底を定義する. ここで, π は構造射であるとした.

初めに $\mathcal{A}(\mathfrak{f})$ に関して, R 加群 $\omega_{\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R}$ の基底 ω を第 2 節の (1) と同様にして定義する. ここで, 標準的な R 加群のペアリング $\mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R)\times\omega_{\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R}\longrightarrow R$ に対して, (6) と同様にして次のペアリングを定義する.

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R)\times\omega_{\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R}\longrightarrow\mathcal{O}_K\otimes R(\Sigma_K).$$

ここで, $\mathcal{O}_K \otimes R(\Sigma_K)$ は $\mathcal{O}_K$ の作用が Σ_K を経由するような $\mathcal{O}_K \otimes R$ の部分 R 加群とした (本稿の記法の節を参照されたい).

これにより, ω という $\omega_{\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R}$ の $\mathcal{O}_K \otimes R(\Sigma_K)$ 加群としての生成元により, 同型

$$F_\omega : \mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \simeq \mathcal{O}_K \otimes R(\Sigma_K)$$

が定まり, 逆にこのような同型から第 2 節 (1) を満たす ω が定まるので, 両者を同一視する.

pl と互いに素な K での任意のイデアル $\mathfrak{A}$ に対して, F_ω により次の同型が誘導される.

$$\mathrm{Lie}(\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \simeq \mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \otimes_R \mathfrak{A} \simeq \mathcal{O}_K \otimes R(\Sigma_K).$$

ここで, $\mathfrak{A}$ が pl と互いに素なことを踏まえて, 2 番目の同型は F_ω によって weii-defined に定まる次のような射を用いた.

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{A} \simeq \mathrm{Lie}(\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R) \simeq \mathcal{O}_K \otimes R(\Sigma_K).$$

この同型により定まる $\omega_{\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f})/R}$ の R 加群としての基底を $\omega(\mathfrak{A})$ と定める.

$\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ によって基底変換することで $\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})_{/M}$ は $\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})_{/\mathbb{C}}$ に係数拡大され, 複素 Lie 群 $(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f}))^{\mathrm{an}}$ が定まる. この複素 Lie 群の, 次のような標準的な短完全列を考える.

$$0 \longrightarrow \pi(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})) \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})) \longrightarrow (\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f}))^{\mathrm{an}} \longrightarrow 0.$$

すると, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\omega_{\mathfrak{A}\otimes A(\mathfrak{f}))/\mathbb{C}}$ の基底 $\omega_{\mathrm{trans}}(\mathfrak{A})$ で,

$$F_{\omega_{\mathrm{trans}}(\mathfrak{A})} : \mathrm{Lie}(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})/\mathbb{C}) \simeq \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}(\Sigma_K),$$

$\omega_{\mathrm{trans}}(\pi(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f}))) = \mathfrak{A}\mathfrak{f}$ という標準的同型[13]を与えるものが一意的に存在する.

定義 6.5. $\mathfrak{A}$ を pl と互いに素な K の整イデアルとする. *CM* 周期 $\{\Omega_{CM,\infty}(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma_K} = \Omega_{CM,\infty} \in (\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{C}(\Sigma_K))^\times$ を次を満たすように定義する.

$$\omega(\mathfrak{A}) = \Omega_{CM,\infty} \cdot \omega_{\mathrm{trans}}(\mathfrak{A}).$$

注意 6.6. $\Omega_{CM} := \Omega_{CM,\infty}$ は $\mathfrak{A}$ の取り方には依らず ω と ι_∞ のみに依存する ([Katz78], [OH15] を参照されたい).

6.2. **部分 Fourier 変換 · 局所因子.** この節では, 代数的 Hecke 指標の部分 Fourier 変換と l 上の局所因子を, 本稿の設定にあった特別な場合に対して定義する. (一般的な状況での両者の定義については [Katz78] や [KS24] を参照されたい).

χ を Critical な代数的 Hecke 指標であるとし, 前節のように無限型を $\beta - \alpha$, $(\beta \in \mathbb{Z}[\overline{\Sigma}_K], \alpha \in \mathbb{Z}[\Sigma_K])$ と記述する. また, 前節と同様 $\beta_{\overline{\sigma}} \geq 0, \alpha_\sigma \geq 1$ が全ての $\sigma \in \Sigma_K$ に対して成立するとする.

以降の節では χ の導手は $\mathfrak{f}\mathfrak{L}^\infty$ を割り切るものとする. ここで $\mathfrak{f}$ は pl と互いに素な K の整イデアルで, $\mathfrak{L}$ の定義は, 各 $\sigma \in \Sigma_K$ に対し, $\lambda_\sigma := (\iota_l \circ \sigma)^{-1}(m_{\mathbb{C}_l}) \cap \mathcal{O}_K$ により K における素イデアルを定め, $\mathfrak{L} = \prod_{\sigma\in\Sigma_K} \lambda_\sigma$ としていたことを思い出す.

χ の導手における l と互いに素でない部分を $\prod_{v|\mathfrak{L}} v^{a_v}$, $a_v \geq 0$ とする.

この時, χ は次の準同型を定める.

$$\chi : I_K^{(\mathfrak{f}l)} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times,$$

$I_K^{(\mathfrak{f}l)}$ は K の分数イデアルで $\mathfrak{f}l$ と互いに素なもののなす群. この像は l 進整, すなわち

$$\chi : I_K^{(\mathfrak{f}l)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}^\times$$

を与える. $P_K^{(\mathfrak{f}l^n)}$ を $K^\times$ の元で $\mod {}^\times \mathfrak{f}l^n$ で 1 と合同なもののなす群とする. すると

$$\chi(P_K^{(\mathfrak{f}l^n)}) \subset 1 + l^n \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}$$

[13] $\pi(\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})) = H_1((\mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f}))(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}_K} H_1(A(\mathfrak{f})(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{A}\mathfrak{f}$ という同型のことである.

が十分大きな n に対して成立する．したがって, 連続表現

$$\chi : \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f}l^{\infty})) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}^{\times}$$

が定まる．この表現は, Artin 写像が与える全射

$$\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f}l^{\infty}))$$

と合成することで, $\chi : \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_l}^{\times}$ を定める．ここで,

$$\chi_f : (\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l)^{\times} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \subset \mathbb{C}_l^{\times}$$

を χ の有限部分が定める局所定数函数とする．すなわち,

$$\chi_f(a) = \frac{\chi((a))a^{\alpha}}{\overline{a}^{\beta}},$$

$a \in \mathcal{O}_K$: $l\mathfrak{f}$ と互いに素 として定まる χ_f を $(\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l)^{\times}$ に拡張したもの．

以下で考察するのは特に, 次の条件を満たすものである．

• χ の条件

χ の有限部分が

$$\chi_f : (\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma_K))^{\times} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$$

を経由する．

ここで, $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma_K)$ は CM 型 Σ_K と ι_l より定まる素点集合 Σ_l の元で $\mathcal{O}_K$ を完備化したものの直和[14]．この χ_f より次の 2 つの局所定数函数を定義する．

$$F_{\chi}, \widetilde{F_{\chi}} : \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}.$$

これらの写像は, χ_f^{-1} の拡張で与える．

まず, $\widetilde{F_{\chi}}$ については, 零写像で拡張することで定義する．F_{χ} への拡張に関しては局所的な議論を要する．次の分解を考える

$$(\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma_K))^{\times} \simeq \prod_{v|\mathfrak{L}} \mathcal{O}_{K,v}^{\times}.$$

これより χ_f^{-1} から $\mathcal{O}_{K,v}^{\times}$ 上の指標が誘導されるが, 以下ではこれを $\chi_{f,v}^{-1}$ と呼ぶ．

$\chi_{f,v}^{-1}$ の $\mathcal{O}_{K,v}$, $v \in \Sigma_l$ への拡張を

$$\begin{cases} \text{零拡張} & (\chi_{f,v}^{-1} \text{ が非自明}) \\ \text{恒等的に } 1 \text{ に移す写像} & (\chi_{f,v}^{-1} = 1) \end{cases}. \tag{23}$$

により定める．この拡張によって $F_{\chi} : \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma_K) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ を定義する．

このような, 局所定数函数

$$\phi : \mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_l(\Sigma_K) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

の部分 Fourier 変換を, 次のように定義する．

$$P\phi : \mathfrak{L}^{-n}/\mathcal{O}_K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}; a \mapsto \int_{\mathcal{O}_{K,\mathfrak{L}}} \exp(-2\pi i \mathrm{tr}(xa))\phi(x) d\mu_{Haar}(x)$$

で定義する．ここで, n は ϕ が mod $\mathfrak{L}^n$ によらないように十分大きくとり, μ_{Haar} は $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{L}}$ 上の正規化された Haar 測度とした．

この $P\phi$ は,

$$\mathfrak{L}^{-n} \otimes \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathfrak{L}^{-n}/\mathcal{O}_{K,\mathfrak{L}} \simeq \mathfrak{L}^{-n}/\mathcal{O}_K$$

という自然な射影で引き戻して $\mathfrak{L}^{-n} \otimes \mathbb{Z}_l$ 上の函数と見なす．

すると, $\mathfrak{A}$ が K の整イデアルで l と互いに素なものとすれば,

$$\mathfrak{L}^{-n}\mathfrak{A}\mathfrak{f} \otimes \mathbb{Z}_l = \mathfrak{L}^{-n} \otimes \mathbb{Z}_l$$

---

[14] [Katz78] の定義を参照されたい

であるので, 次が定まる.

$$P^{\mathfrak{A}}\phi : \mathfrak{L}^{-n}\mathfrak{A}\mathfrak{f}/\mathfrak{A}\mathfrak{f} \simeq \mathfrak{L}^{-n}/\mathcal{O}_K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}},$$

ただし $\mathfrak{A}$: $\mathcal{O}_K$ の整イデアルで pl と互いに素とした.

定義 6.7. $\mathfrak{L}^{-n}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\Omega_{CM,\infty}/\mathfrak{A}\mathfrak{f}\Omega_{CM,\infty} \simeq \mathfrak{L}^{-n}\mathfrak{A}\mathfrak{f}/\mathfrak{A}\mathfrak{f}$ と, $\omega(\mathfrak{A})$ による一意化

$$\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{f})(\mathbb{C})^{\mathrm{an}} \simeq \mathfrak{A} \otimes A(\mathfrak{f})(\mathbb{C})^{\mathrm{an}} \simeq \mathbb{C}^{\Sigma}/\mathfrak{A}\mathfrak{f}\Omega_{CM,\infty}$$

を踏まえて, 部分 *Fourier* 変換 $P\phi$ は $(\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f}))[\mathfrak{L}^n]$ 上定義される. このようにして $P^{\mathfrak{A}}\phi : (\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}(\mathfrak{f}))[\mathfrak{L}^n] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ を改めて定義しなおす.

さて, l 上の局所因子 (Local Factor) を定義する.

定義 6.8. 上述のような K の代数的 *Hecke* 指標 χ に対して, 導手 $\mathrm{cond}(\chi)$ を次のように分解する.

$$\mathrm{cond}(\chi) = (a)\mathfrak{A},$$

ここで $a \in K$, $\mathfrak{A}$ を l と互いに素な K のイデアルとした. この時, χ の l 上における局所因子を次のようにして定義する.

$$\mathrm{Local}_l(\chi;\Sigma) := \frac{PF_\chi(a^{-1})a^{\alpha}}{\chi(\mathfrak{A})a^{\beta}}$$

局所因子の基本的な性質として, 次が成立する.

補題 6.9. 局所因子は, 導手の分解によらず定義され, 常に 0 にはならない.

証明. まず, 局所因子について次のように分解される.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Local}_l(\chi;\Sigma_K) &= \frac{a^{\alpha}}{\chi(\mathfrak{A})a^{\beta}} \int_{(\mathcal{O}_{K^+}\otimes\mathbb{Z}_l)^2} F_\chi(x)\exp(-2\pi i \mathrm{tr}(a^{-1}x))d\mu_{Haar}(x) \\
&= \frac{a^{\alpha}}{\chi(\mathfrak{A})a^{\beta}} \prod_{v|\mathfrak{L}} \int_{\mathcal{O}_{K^+,v}} \chi_{f,v}^{-1}(x) \times \exp(-2\pi i \mathrm{tr}(-a^{-1}x))d\mu_{Haar,v}(x) \\
&= \frac{a^{\alpha}}{\chi(\mathfrak{A})a^{\beta}} \prod_{v\in\Sigma_l^{\mathrm{ram}}} \int_{\mathcal{O}_{K^+,v}^{\times}} \chi_{f,v}^{-1}(x)\exp(-2\pi i \mathrm{tr}(a^{-1}x))d\mu_{Haar,v}(x)
\end{aligned}$$

ここで, Σ_l^{ram} は χ が分岐する $\mathfrak{L}$ を割り切る素点, すなわち $a_v \geq 1$ となる $v|\mathfrak{L}$ 全体の集合.

上記の計算から, $(\mathfrak{A}, a)$ を $(t\mathfrak{A}, t^{-1}a)$, $t \in K$ は l と互いに素となるように取り換えてた場合も, 局所因子は不変であることがわかる. したがって, $(\mathfrak{A}, a)$ の取り方に $\mathrm{Local}(\chi;\Sigma_K)$ が依らないのは確かに良い.

局所因子の非消滅性は, 各 $v \in \Sigma_l^{\mathrm{ram}}$ について,

$$\int_{\mathcal{O}_{K^+,v}^{\times}} \chi_{f,v}^{-1}(x)\exp(-2\pi i \mathrm{tr}(a^{-1}x))d\mu_{Haar,v}(x)$$

が Gauss 和であることから従う. □

さて, CM 体の Hecke L 値と高次の Eisenstein 数の関係式を導出することで, 本稿の主結果である Hecke L 値の非消滅性を証明する.

6.3. **Hecke L 値の非消滅性.** 前節と同じように CM 体 K の critical な Hecke 指標 χ を定める. ただし, この節では χ の導手は 1 とし, $\mathfrak{f}$ は pl と互いに素である非自明な K の整イデアルとする. また, $\Gamma_{\mathfrak{f}} = \{x \in \mathcal{O}_K^{\times} \mid x \equiv 1 \mod \mathfrak{f}\}$ であるとした. ここで, この節では次の 3 つの仮定 $(*)$ を設ける.

- K の類数が 1 である.
- $K^+/\mathbb{Q}$ で l は惰性し, K/K^+ で l 上の素点が $(l) = (\lambda)(\overline{\lambda})$ と完全分解する. 特に, $(\lambda) = \mathfrak{L}$ は素イデアルである.
- $\mathcal{O}_K/\lambda$ の位数 q とし, K は 1 の $q-1$ 乗根を含まない.

この仮定のもと, 分岐素点を見ることで次の分解が生じる.

$$\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f}\lambda^\infty)/K) \simeq \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K) \times \mathrm{Gal}(K(\lambda^\infty)/K) \simeq \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K) \times \mathcal{O}_{K,\lambda}^\times/\overline{\mathcal{O}_K^\times}.$$

この $\overline{\mathcal{O}_K^\times}$ は $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ における $\mathcal{O}_K^\times$ の位相的閉包である. 最初の同型は, K の類数 1 なので $K(\mathfrak{f}) \cap K(\lambda^\infty) = K$ であることによる.

定義 6.10. $\{\mathfrak{A} \mid K$ の整イデアルで $\mathfrak{f}pl$ と互いに素 $\}$ の部分集合 $\{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,\dots,h_\mathfrak{f}}$ を *Artin* 写像の像 $\{\sigma_{\mathfrak{A}_i}\}_{i=1,\dots,h_\mathfrak{f}}$ が $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K)$ を代表するように定める. このようにして定めた $\{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,\dots,h_\mathfrak{f}}$ により

$$\mathcal{A}_i := \mathfrak{A}_i^{-1} \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{f})$$

とする. この右辺は前節で定義した R 上のアーベルスキームとした.

定義 6.11. $\mathrm{Gal}(K(\lambda^\infty)/K) \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda}^\times/\overline{\mathcal{O}_K^\times}$ の位数有限指標のなす群 $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K(\lambda^\infty)/K), \overline{\mathbb{Q}}^\times)$ とする. このような指標群は, 標準的な全射 $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times \longrightarrow \mathcal{O}_{K,\lambda}/\overline{\mathcal{O}_K^\times}$ での引き戻しにより

$$\mathcal{X}_\lambda := \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K(\lambda^\infty)/K), \overline{\mathbb{Q}}^\times) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times, \overline{\mathbb{Q}}^\times)$$

という埋め込みを持つ.

以下, R 上のアーベルスキーム $\mathcal{A}_i$, K の整イデアル $\mathfrak{g}$ に対し, $\mathcal{A}_i[\mathfrak{g}](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_l})$ を単に $\mathcal{A}_i[\mathfrak{g}]$ と記述する. 以上の設定で, 本稿の主結果を証明する.

定理 6.12. *$K/\mathbb{Q}$ を CM 体. また l を, $K/\mathbb{Q}$ で不分岐な素数. K の critical な Hecke 指標 χ は, 導手が 1 とする. さらに, これらの $(K/\mathbb{Q}, l)$ は先に定めた仮定 $(*)$ を満たしているとする. この時, 高々有限個の指標を除く任意の $\rho \in \mathcal{X}_\lambda$ に対して, $L(\chi\rho^{-1}) \neq 0$ が成立する.*

証明. 素数 $p \neq l$ を, $K/\mathbb{Q}$ で p 上の素点が全て完全分解するとするものとする. このような素数は Chebotarev 密度定理から必ず存在する. pl と互いに素で非自明な K の整イデアルとして, 補助イデアル $\mathfrak{f}$ をとる. 次のことが, [KS24] により証明されている.

補題 6.13 ([KS24, Proposition 5.27])**.** *$h_\mathfrak{f}$ を $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f})/K)$ の位数とする. また, 部分 Fourier 変換 $P^i := P^{\mathfrak{A}_i^{-1}}$ とし, $x_i \in \mathcal{A}_i[\mathfrak{f}]$ を $x_i := \theta_i(\Omega_{CM} + \mathfrak{f}{\mathfrak{A}_i}^{-1}\Omega_{CM})$ で定義する. ここで, θ_i は $\omega(\mathcal{A}_i)$ により定まる一意化 $A_i^{\mathrm{an}}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\Omega_{CM}$ である.*

さらに, $f^i_{[c]}$ を $\mathcal{A}_i$ に対して (8) における $f_{[c]}$ の定義と同様にして定義する. この時, 次の等式が成立する.

$$\begin{aligned}\frac{(\alpha-1)!(2\pi i)^{|\beta|}}{{\Omega_{CM}}^{\alpha}{\Omega^\vee_{CM}}^{\beta}}\mathrm{Local}_l(\chi\rho^{-1}, \Sigma)(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}))\prod_{v\in\Sigma_l}(1-\frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)})L_\mathfrak{f}(\chi\rho^{-1}) \\ = \sum_{i=1}^{h_\mathfrak{f}}\chi(\mathfrak{A}_i)\sum_{s_i\in\mathcal{A}_i[\lambda^n]}P^i\widetilde{F_{\chi\rho^{-1}}}(s_i)EK^{\beta,\alpha-1}_{\Gamma_\mathfrak{f},\mathcal{A}_i}(f^i_{[c]}, x_i+s_i),\end{aligned}$$

ここで $|\beta| := \sum_{\overline{\sigma}\in\overline{\Sigma}_K}\beta_{\overline{\sigma}}$ とし, n は ρ の導手が λ^n を割り切るような十分大きな整数とした.

注意 6.14. この補題の等式は n の取り方によらない.

補題の証明 *6.13.* 本稿の Appendix C を参照のこと. □

定理の証明において $\rho \neq 1$ としてよい. $(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}))\prod_{v\in\Sigma_l}(1-\frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)})L_\mathfrak{f}(\chi\rho^{-1}) \neq 0$ は, この補題により次と同値.

$$\sum_{i=1}^{h_\mathfrak{f}}\chi(\mathfrak{A}_i)\sum_{s_i\in\mathcal{A}_i[\lambda^n]}P^i\widetilde{F_{\chi\rho^{-1}}}(s_i)EK^{\beta,\alpha-1}_{\Gamma_\mathfrak{f},\mathcal{A}_i}(f^i_{[c]}, x_i+s_i) \neq 0. \tag{24}$$

この式 (24) の左辺を計算する．ここで, $c_i \in \mathcal{O}_{K,\lambda}^{\times}$ を $\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K,\lambda} \simeq \mathcal{O}_{K,\lambda}$ で $\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}$ の生成元が対応する $\mathcal{O}_{K,\lambda}^{\times}$ の元とする．また, n を ρ の導手 (λ^n) となるようにする．

$$(24)\ 左辺 = \sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}) \sum_{s_i \in \lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}} (\frac{1}{N(\lambda^n)} \sum_{x \in (\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^{\times}} \exp(-2\pi i \mathrm{tr}(xs_i))\rho(x)) EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathcal{A}_i}^{\beta,\alpha-1}(f_{[c]}^i, x_i + \widetilde{s_i}) \tag{25}$$

$$= \frac{1}{N(\lambda^n)} \sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}) \sum_{s \in (\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^{\times}} (\sum_{x \in (\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^{\times}} \exp(-2\pi i \mathrm{tr}(\frac{xsc_i}{\lambda^n}))\rho(x)) EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathcal{A}_i}^{\beta,\alpha-1}(f_{[c]}^i, x_i + \widetilde{sc_i}) \tag{26}$$

$$= (\frac{1}{N(\lambda^n)} \sum_{y \in (\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^{\times}} \rho(y) \exp(-2\pi i \mathrm{tr}(\frac{y}{\lambda^n})))(\sum_{i=1}^{h_f} \chi(\mathfrak{A}_i) \sum_{s \in (\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^{\times}} \rho(sc_i)^{-1} EK_{\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathcal{A}_l}^{\beta,\alpha-1}(f_{[c]}^i, x_i + \widetilde{sc_i})) \tag{27}$$

$$= G(\rho)(\sum_{s \in (\mathcal{O}_K/\lambda^n)^{\times}} \rho(s)^{-1} (\sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{A}_i) \widehat{\partial_{\mathcal{A}_i}}^{[\alpha-1]} F_{x,\beta,[c]}(x_i;\Gamma_{\mathfrak{f}})(t)|_{t=\widetilde{s}})) \tag{28}$$

ここで, 1 行目の等式 (25) では, この単射により誘導される次の準同型

$$s_i \in \lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1} \hookrightarrow \lambda^{-n}\mathcal{O}_{K,\lambda}/\mathcal{O}_{K,\lambda}$$

の s_i の像を sc_i/λ^n と定めた．但し, $s \in \mathcal{O}_{K,\lambda}$ は $\mathcal{O}_K/\lambda^n$ におけるクラスの代表元と考える．

$\widetilde{s_i}$, $\widetilde{sc_i}$ は, アーベル多様体 $\mathcal{A}_{i/\mathbb{C}}$ の一意化 θ_i が誘導する同型

$$\mathcal{O}_K/\lambda^n \simeq \lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\Omega_{CM}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\Omega_{CM} \simeq \mathcal{A}_i[\lambda^n] \tag{29}$$

で, それぞれ $s_i, sc_i \in \mathcal{O}_K/\lambda^n$ が対応する $\mathcal{A}_i$ の等分点とする．また, $G(\rho)$ は次で定義される Gauss 和である．

$$G(\rho) := \frac{1}{N(\lambda^n)} \sum_{y \in (\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^{\times}} \rho(y) \exp(-2\pi i \mathrm{tr}(\frac{y}{\lambda^n})).$$

2 行目の等式 (26) で $s \in (\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^{\times}$ を足し上げるのは, $s \notin (\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n)^{\times}$ となった場合, n の取り方と Gauss 和の性質より項が 0 となることによる．また, 3 行目の等式 (27) では $y = xsc_i$ とする．では, 4 行目の等式 (28) では命題 3.20 を用いる．

さて, ここで R 上のアーベルスキームにおける同種写像

$$\lambda_i : \mathcal{A}(\mathfrak{f}) \longrightarrow \mathcal{A}_i$$

を定める．$\mathcal{A}_i = \mathfrak{A}_i^{-1} \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{f})$ なので,

$$\lambda_i := [\mathfrak{A}_i] : \mathcal{A}(\mathfrak{f}) \longrightarrow \mathcal{A}_i = \mathfrak{A}_i^{-1} \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{f})$$

が R 上定義され, エタール射となる ([KS24, proposition 4.7] を参照).

この射により, $\widehat{\partial_{\mathcal{A}_i}}^{[\alpha-1]} F_{x,\beta,[c]}(x_i;\Gamma_{\mathfrak{f}})(t)$ を $\mathcal{A}(\mathfrak{f})$ 上に引き戻したもの

$$\widehat{\partial_{\mathcal{A}_i}}^{[\alpha-1]} F_{x,\beta,[c]}(x_i;\Gamma_{\mathfrak{f}})(\lambda_i(t)) := \lambda_i^*(\widehat{\partial_{\mathcal{A}_i}}^{[\alpha-1]} F_{x,\beta,[c]}(x_i;\Gamma_{\mathfrak{f}})(t))$$

を考える．$\mathcal{A}(\mathfrak{f})_{/R}$ の単位切断に沿った完備化 $\widehat{\mathcal{A}}(\mathfrak{f})_{/R}$ 上の形式函数 Θ_{χ} を次のように定義し, Θ_{χ} に付随する測度を考える．

定義 6.15.

$$\Theta_{\chi}(t) := \sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{A}_i) \widehat{\partial_{\mathcal{A}_i}}^{[\alpha-1]} F_{x,\beta,[c]}(x_i;\Gamma_{\mathfrak{f}})(\lambda_i(t)) \in \Gamma(\widehat{\mathcal{A}}(\mathfrak{f}), \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{A}}(\mathfrak{f})})$$

として $\widehat{\mathcal{A}}(\mathfrak{f})_{/R}$ 上の構造層の大域切断を定義する．

このようにすると, 命題 3.25 により, 充分大きな自然数 N が取れ, $p^N\Theta_\chi(t) \in \mathcal{F}_{M,\mathcal{A}(\mathfrak{f})}$ が従う. そこで, $p^N\Theta_\chi(t)$ に対して, Definition5.4 の意味で対応する $\mathcal{O}_{K,\lambda}^\times$ 上の p 進測度を α_χ とする. このような測度が構成できることは, 補題 5.5 による. 次が成立することを示す.

補題 6.16. $M_{\alpha_\chi}(\rho) \neq 0$ が成立すれば, $L(\chi\rho^{-1}) \neq 0$ が成り立つ.

補題の証明 *6.16.* $\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n \simeq \mathcal{A}(\mathfrak{f})[\lambda^n] \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathfrak{f})_{\mathrm{tors}}$ を先に (29) で与えたアーベル群の準同型とする. さらに, 次のような同型を考える.

$$\mathcal{O}_{K,\lambda}/\lambda^n \simeq \frac{1}{\lambda^n}\mathcal{O}_{K,\lambda}/\mathcal{O}_{K,\lambda}.$$

これら 2 つのアーベル群の準同型を合成して, 順極限をとることにより, 次のような $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ 加群の単射を得る.

$$\delta : K_\lambda/\mathcal{O}_{K,\lambda} \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathfrak{f})_{\mathrm{tors}}.$$

以下では, この同型を δ を固定する.

式 (28), (24) により, $(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}))\prod_{v\in\Sigma_l}(1 - \frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)})L_\mathfrak{f}(\chi\rho^{-1}) \neq 0$ であることと, 次が成り立つことは同値.

$$G(\rho)\sum_{s\in(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^\times}\rho^{-1}(s)\Theta_\chi(t)|_{t=\delta(\zeta^s)} \neq 0$$

初めに, すべての $\rho \in \mathcal{X}_\lambda$ に対して

$$(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}))\prod_{v\in\Sigma_l}(1 - \frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)}) \neq 0 \tag{30}$$

が成立することを示す.

まず, 任意の $v \in \Sigma_l$ をとる. この時, ある $\rho \in \mathcal{X}_\lambda$ に対し,

$$N(v) - \chi\rho^{-1}(v^{-1}) = 0$$

が成立するとする. これは,

$$v^{\Sigma_K}\overline{v}^{\Sigma_K} = v^{-\beta+\alpha}\rho(v) \Leftrightarrow v^{\Sigma_K-\alpha}\overline{v}^{\beta+\Sigma_K} = \rho(v)$$

であることと同値であり, $(\beta,\alpha) \in \mathrm{Crit}(\Gamma_\mathfrak{f})$ なので, 上式右側の等式における左辺は 1 のべき乗根にはなりえず, 矛盾が生じる. 同様にして, すべての $\rho \in \mathcal{X}_\lambda$ に対して

$$Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}) \neq 0$$

が成立するので, 式 (30) が成り立つ. 従って, $\rho \in \mathcal{X}$ に対し,

$$(Nc - \chi\rho^{-1}(c^{-1}))\prod_{v\in\Sigma_l}(1 - \frac{\chi\rho^{-1}(v^{-1})}{N(v)})L_\mathfrak{f}(\chi\rho^{-1}) \neq 0 \Leftrightarrow G(\rho)\sum_{s\in(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^\times}\rho^{-1}(s)\Theta_\chi(t)|_{t=\delta(s/\lambda^n)} \neq 0$$

であれば, $L(\chi\rho^{-1}) \neq 0$ が成立する.

以上のことから最後に, ある自然数 N が存在して任意の $\rho \in \mathcal{X}$ に対して

$$M_{\alpha_\chi}(\rho) = p^N G(\rho)\sum_{s\in(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^\times}\rho^{-1}(s)\Theta_\chi(t)|_{t=\delta(s/\lambda^n)} \tag{31}$$

が成立することを示す. 特性函数に関する等式 (16) により, 次の等式を得る. 簡単のため $\alpha = \alpha_\chi$ とする.

$$\begin{aligned}
M_\alpha(\rho) &= \int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}}\rho(a)d\alpha(a)\\
&= \sum_{a \mod \lambda^n}\rho(a)\alpha(a + \lambda^n\mathcal{O}_{K,\lambda})\\
&= \frac{1}{N(\lambda)^n}\sum_{x\in(\mathcal{O}_K/\lambda^n)^\times}\sum_{a \mod \lambda^n}\rho(a)\exp(2\pi i\mathrm{tr}(ax/\lambda^n))\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}}\exp(2\pi i\mathrm{tr}(xy/\lambda^n))d\alpha(y)\\
&= G(\rho)\sum_x\rho(x)^{-1}\int_{\mathcal{O}_{K,\lambda}}\exp(2\pi i\mathrm{tr}(xy/\lambda^n))d\alpha(y).
\end{aligned}$$

最後の式は, α_χ の定義より, (31) と一致している. □

以上のことから, 定理を示すには α_χ に対して, 有限個を除くすべての $\rho \in \mathcal{X}$ について $M_{\alpha_\chi}(\rho) \neq 0$ が成立することを示せばよい. まず, $\rho : \mathcal{O}_{K,\lambda}^\times \simeq \mu_{q-1} \times (1+\lambda\mathcal{O}_{K,\lambda}) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$, ($q = |\mathcal{O}_K/\lambda|$ とする) で, ρ を μ_{q-1} の指標と, $(1+\lambda\mathcal{O}_{K,\lambda})$ の指標の積に分解する. もし, $M_{\alpha_\chi}(\rho) = 0$ が無数の相異なる ρ に対して成立すれば, 鳩ノ巣原理から或る固定された μ_{q-1} の指標 ω が存在し, 無数の相異なる $1+\lambda\mathcal{O}_{K,\lambda}$ の有限指標 ρ' に対して, $M_{\alpha_\chi}(\omega\rho') = 0$ が成立するはずである.

Lemma 5.16 により, $\alpha_\chi|_\omega$ という形式函数に付随する測度で, $\alpha_\chi|_\omega \circ c = \alpha_\chi|_\omega$, $M_{\alpha_\chi|_\omega}(\rho') = wM_{\alpha_\chi}(\omega\rho')$ を満たすものが構成された. ここで, $c \in (\mathcal{O}_{K,\lambda} \cap R)^\times$, また w は或る正の整数である. 特に, 無数の相異なる ρ' に対して次の等式が成立する.

$$M_{\alpha_\chi|_\omega}(\rho') = 0. \tag{32}$$

今 $\alpha_\chi|_\omega$ に対して, 命題 5.14 を用いれば, 高々有限個の $\rho' \in \mathrm{Hom}_{conti.}(1+\lambda\mathcal{O}_{K,\lambda}, \overline{\mathbb{Q}}^\times)$ に対して $M_{\alpha_\chi|_\omega}(\rho') = 0$ であるはずであるので, これは (32) に矛盾する. したがって, 高々有限個の ρ に対してしか $L(\chi\rho^{-1}) = 0$ が成立しないので, 主張を得た. □

この定理を Mordell-Weil 群の構造へ応用する.

6.4. **Mordell-Weil 群への応用.** この節では, K を $\mathbb{Q}$ 上ガロアな CM 体とする. 前節で示した Hecke L 函数値の非消滅性 (主定理 A) をもとにして, Mordell-Weil 群の有限性である主定理 B を示す. その上で, Mordell-Weil 階数に関する次の BSD 予想の成立を仮定する.

予想 6.17. *A_F を代数体 F 上のアーベル多様体とする. $L(A,F,s)$ をその Hasse-Weil の L 函数としたときに, これは $s=1$ へ解析接続されて*

$$\mathrm{ord}_{s=1} L(A,F,s) = \mathrm{rk}A(F).$$

ここで, rk は $\mathbb{Z}$ 加群としての階数である.

定理 6.18. *(K,l) が定理 6.12 における条件 $(*)$ を満たすとする. さらに, K 上定義された単純アーベル多様体 $A_{/K}$ が次の条件を満たすものとする.*

1. *$A_{/K}$ は, $\mathrm{End}(A) \simeq \mathcal{O}_K$ を満たしている.*
2. *$A_{/K}$ は, l 上のすべての素点で通常良還元をもつ.*
3. *$A_{/K}$ は全ての素点で良還元を持つ.*

A_K は, 付随する CM 型 Σ_K を定めるとし, 定理 6.12 と同様にして λ を定義する. $K(\lambda^\infty)/K$ の任意の有限次中間体 F に対して $A_{/F}$ で階数に関する BSD 予想が成り立つとする. この時 $A_{/K}$ の Mordell-Weil 群について次が成立する. すなわち, K の λ 外不分岐最大アーベル拡大体 $K(\lambda^\infty)$ とする. この時, $\mathbb{Z}$ 加群 $A(K(\lambda^\infty))/A(K(\lambda^\infty))_{\mathrm{tors}}$ は有限生成である.

定理の証明に入る前に, CM 体 K 上の代数体 F を定義体とし, $\mathcal{O}_K$ に CM をもつ CM 型アーベル多様体 A に関する Hasse-Weil の L 函数について議論する. 第 1 節定理 2.2 で, 次のような準同型を構成した.

$$s \in \mathbb{A}_F^\times \mapsto \frac{\alpha_s}{\mu(s)} \in K.$$

特に, K の無限素点 v_∞ に対応する埋め込み

$$v_\infty : K \longrightarrow \mathbb{C}$$

により, $\psi_{F,v_\infty} = \psi_{v_\infty} : \mathbb{A}_F^\times/F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ が定義できる. これは, 連続であり, 代数的 Hecke 指標となる.

さらに, 絶対ガロア群 G_F の $A[l^\infty]$ への作用が G_F^{ab} を経由することに注意しながら Neron-Ogg-Shafarevich の判定法を用いることで, ψ_{v_∞} の不分岐素点の集合と A_F が良還元を持つ素点の集合が一致することが従う.

ここで, $L(s,\psi_{v_\infty})$ を次で定義する.

定義 6.19.

$$L(s,\psi_{v_\infty}) := \prod_v (1-\psi_{v_\infty}(\pi_v)N(v)^{-s})^{-1}$$

とする．ここで, v は ψ_{v_∞} の不分岐素点, すなわち F における有限素点 v で $\psi_{v_\infty}(\mathcal{O}_{K^+,v}^\times)=1$ となるものを走るとする．また, π_v は $\mathcal{O}_{K^+,v}$ の素元とした．

すると, Hasse-Weil の L 函数と定義した L 函数の関係として次が成立する．

$$cL(A,F,s) = \prod_{v_\infty} L(s,\psi_{F,v_\infty})L(s,\overline{\psi_{F,v_\infty}})$$

となる複素数 $c\in\mathbb{C}$ が取れる．ここで v_∞ は K の無限素点全体を走るとする．

この c は $A_{/F}$ の導手 (conductor) を割り切る素点での Eular 因子の積である．従って, $A_{/F}$ が至る所で良還元を持つ時には $c=1$ である．

Shimura[Shi76, Theorem I, Proposition 5] (虚二次体の場合), Harder[Har87, Corollary 4.3.1, p.87] (一般の critical な代数的 Hecke 指標の場合) により次のことが示されている．

補題 6.20. ある v_∞ に対して $L(1,\psi_{F,v_\infty})\neq 0$ ならば, 全ての v_∞ に対して $L(1,\psi_{F,v_\infty})\neq 0$, $L(1,\overline{\psi_{F,v_\infty}})\neq 0$.

以上のことは次の主張にまとめられる．

補題 6.21. *A_F を, CM 体 K の整数環を CM にもつ代数体 $F\supset K$ 上定義された CM 型アーベル多様体とする．$A_{/F}$ が階数に関する BSD 予想を満たすとする．この時, ある K の無限素点 v_∞ に対して, $L(1,\psi_{F,v_\infty})\neq 0$ であれば $A(F)$ は有限群である．*

以下, 特に A の定義体として K が取れるような場合を考える．すると, 第 2 節で固定していた $\iota_\infty\circ\tau_K : K\hookrightarrow\mathbb{C}$ により K の無限素点が定まるので, これに関して $\psi_K := \psi_{\iota_\infty\circ\tau_K}$ という代数的 Hecke 指標を考える．以上のことを踏まえて, 定理 6.18 を証明する．

証明．初めに, A を $K(\lambda^\infty)/K$ の有限次中間体 F に基底変換した A_F を考える．すると, 定義から

$$\psi_F = \psi_K\circ N_{F/K}$$

が成立する．このことから, $\Gamma := \mathrm{Gal}(F/K)$ としたときに次が成立する．

$$L(\psi_F,s) = \prod_{\rho\in\widehat{\Gamma}} L(\psi_K\cdot\rho,s),$$

ここで $\widehat{\Gamma}$ は Γ の $\overline{\mathbb{Q}}$ に値を持つすべての位数有限指標全体とした．A が, すべての K での素点で良還元を持つことにより ψ_K は導手 1 であり, $\psi_K\cdot N_{K/\mathbb{Q}}^{-1}$ は定理 6.12 の仮定を満たすような Hecke 代数的指標である．したがって, 定理 6.12, 補題 6.21 により,

$$\{\mathrm{ord}_{s=1}(L(A,F,s))\in\mathbb{Z}\mid F \text{ は任意の } K(\lambda^\infty)/K \text{ の有限次中間体全体を走る.}\}\subset\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が有界であることが従う．そこで, 階数に関する BSD 予想の仮定のもと,

$$\{\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}A(F)\in\mathbb{Z}\mid F \text{ は任意の } K(\lambda^\infty)/K \text{ の有限次中間体全体を走る.}\}\subset\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

も有界な集合であるので, 命題が従う． □

この主張の系として, 次の主張を得る．

系 6.22. *上記の定理 6.18 の仮定を満たすアーベル多様体 $A_{/K}$ について, K の任意の λ 外不分岐 $\mathbb{Z}_l$ 拡大体 K_∞ とすれば, $(A(K_\infty)\otimes_{\mathbb{Z}_l}\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^\vee$ は, 自然に $\mathbb{Z}_l[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ 加群となる．ここで $\vee$ は Pontryagin 双対であるとした．この時, この加群は有限生成ねじれ $\mathbb{Z}_l[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ 加群である．*

証明．[J18]Theorem 2.1.5 により, 示すべき主張は, 任意の K_∞/K の有限次中間体 F に対して rank $_{\mathbb{Z}}(A(F))$ が F によらず一様に有界であることと同値であることが知られている．ゆえに, 定理 6.18 により系の主張を得る． □

Appendix

Appendix A (対称テンソル加群のなす代数). R を可換環とする. M を R 加群として, n 次の対称テンソルのなす加群 $\mathrm{TSym}^n_R(M)$, $n \geq 0$ を次のようにして定義する.

定義 6.23. S_n を n 次の対称群とする. $M^{\otimes n} := M \otimes_R M \ldots \otimes_R M$ を M の R 上の n 回テンソルにより得られる R 加群とする. この時, $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \in M^{\otimes n}$, $\sigma \in S_n$ として

$$\sigma \cdot a_1 \otimes \ldots \otimes a_n := a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}$$

により, S_n の $M^{\otimes n}$ への作用を定義する. この時,

$$\mathrm{TSym}^n_R(M) := (M^{\otimes n})^{S_n} = \{m \in M^{\otimes n} \mid \sigma \cdot m = m,\ \sigma \in S_n \text{ は任意.}\}$$

として R 部分加群を定義する.

このようなものから, 次数付き R 加群

$$\mathrm{TSym}^*_R(M) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{TSym}^n_R(M)$$

が定まる. この R 加群はシャッフル積と呼ばれる積で次数付き R 代数となる.

定義 6.24. $m = m_1 \otimes \ldots \otimes m_k \in \mathrm{TSym}^k_R(M)$, $m' = m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_l \in \mathrm{TSym}^l_R(M)$ に対して, シャッフル積を次のように定義する.

$$m \cdot m' := \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \sigma(m \otimes m') \in \mathrm{TSym}^{k+l}_R(M).$$

ここで, $S_{k,l} \subset S_{k+l}$ は

$$S_{k,l} := \{\sigma \in S_{k+l} \mid \sigma(1) < \ldots < \sigma(k),\ \sigma(k+1) < \ldots < \sigma(k+l)\}$$

で定義する.

このようにして定義された, 対称テンソル加群のなす代数は, 次の分解公式を満たす.

補題 6.25. M, N を平坦 R 加群とする. この時, $n \geq 0$ に対し, 次が成立する.

$$\mathrm{TSym}^n_R(M \oplus N) \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{TSym}^k_R(M) \otimes_R \mathrm{TSym}^{n-k}_R(N).$$

この同型は, 右辺から左辺へ, シャッフル積をとることにより与えられる.

証明. R 加群 M に対して, divided power 包絡環 $\Gamma_R(M)$ がさだまる. M が R 上平坦であれば,

$$\mathrm{TSym}^*_R(M) \simeq \Gamma_R(M)$$

が成立 ([De79]5.5.2.5, p 123 参照).

$\Gamma_R(M \oplus N)$ に対して補題の性質が満たされること ([R63], III § 7, p.256) より補題が従う. □

Appendix B (最大値原理). 付値体上の有限生成代数整域に対して, 次の最大値原理が成立する.

定理 6.26. J は付値体で乗法付値 $|\cdot|$ を持つとする. また, R を有限生成 J 代数整域とする.

この時, *Noether* の正規化定理により, ある J 上の多項式環 $S := J[y_1, \ldots, y_s]$ が存在して $S \subset R$ で R は S 上整である. 特に, $f \in R$ に対して $a_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$ がとれ, $f \in R$ は

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

の根となる.

すると, この a_i, $i = 1, \ldots, n$ を用いて次が成立する.

$$\sup_{x \in \mathrm{Spm}(R)} |f(x)| = \max_i \{|a_i|^{\frac{1}{i}}\}$$

ここで, $\mathrm{Spm}(R)$ は R の極大イデアルよりなる集合で, 各 $x \in \mathrm{Spm}(R)$ に関して, $f(x) := f \mod x \in R/x \subset \overline{J}$ として定める. ただし, $\overline{J}$ は J の代数閉包, $|a_i|$, $a_i \in S$ は多項式の *Gauss* ノルムとした.

注意 6.27. 定理の左辺 $\sup_{x\in\mathrm{Spm}(R)} |f(x)|$ を $|f|$ と記述する.

まずは次の補題を証明する:

補題 6.28. $f \in S$ に対して, ある $x \in \mathrm{Spm}(R)$ が取れて

$$|f(x)| = \sup_{x\in\mathrm{Spm}(R)} |f(x)|$$

が成立する.

補題の証明 *6.28.* $f = 0$ の場合は明らかなので $f \neq 0$ として示す. まず, Gauss ノルムの定義より, ある $a \in J$ に対して

$$|f| = |a|$$

となる. f を $a^{-1}f$ により変えることで

$$|f| = 1.$$

としてよい. $\tilde{f}$ を f の $\mathcal{O}_J/m_j[y_1, \ldots, y_s]$ への像とし, m_J を $\mathcal{O}_J$ の極大イデアルとする. この時, $\tilde{f} \neq 0$ であるので, $\mathcal{O}_J/m_J$ の有限次拡大体 W を適切にとることで, $(\tilde{t_1}, \ldots, \tilde{t_s}) \in W^s$ が存在して $\tilde{f}((\tilde{t_1}, \ldots, \tilde{t_s})) \neq 0$.

すると, ある J の有限次拡大体 M が存在して

$$x = (y_1 - t_1, \ldots, y_s - t_s) \cap R$$

, $t_1, \ldots, t_s \in M$, かつ $f(x) \not\equiv 0 \mod m_J$ が成立する. 従って, $|f(x)| = |f|$ が成り立つ. □

この補題を使うことで, 定理を証明する.

定理の証明 *6.26.* 初めに, 補題から

$$|f(x)|^n \leq \max_i\{|a_i(x)||f(x)|^{n-i}\} \leq \max\{|a_i| \sup_{x\in Spm(R)} |f(x)|^{n-i}\}$$

が任意の $x \in \mathrm{Spm}(R)$ で成立するのはよい. 従って,

$$\max_i\{|a_i|^{\frac{1}{i}}\} \leq \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathrm{Spm}(R)\}$$

が成立することを証明すれば十分である. 以下, $\Gamma := Aut(R/S)$ とする. すると, a_i は $\{f^\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ の内 i 個の積をとった線形和なので

$$|a_i(x)| = |a_i(y)| \leq \max\{|f^\sigma(x)|^i\}_\sigma$$

がすべての $x \in \mathrm{Spm}(R), y := x \cap S \in \mathrm{Spm}(S)$ で成立する. すると,

$$\sup_{x\in\mathrm{Spm}(R)} |f(x)| = \sup_{x\in\mathrm{Spm}(R)} |f^\sigma(x)|$$

がすべての $\sigma \in \Gamma$ で成立することが分かる. 従って,

$$|a_i| \leq \sup_{x\in\mathrm{Spm}(R)} |f(x)|^i$$

を得る. □

6.5. Appendix C (補題 6.13 の証明). この節では, CM 型 Σ_K である CM 体 K の Hecke L 函数について主結果の証明において認めたことを証明する.

χ を導手が K の整イデアル $\mathfrak{f}$ を割り切るような K の代数的 Hecke 指標とする. χ の無限型を, 以下では $\beta-\alpha$, 但し $\beta \in \mathbb{Z}[\overline{\Sigma}_K]$, $\alpha \in \mathbb{Z}[\Sigma_K]$ とする.

次のような原始的でない (imprimitive) Hecke L 函数を調べる.

$$L_{\mathfrak{f}}(\chi, s) := \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in I_{\mathfrak{f}} \\ \mathfrak{A} \subset \mathcal{O}_K}} \frac{\iota_\infty \circ \chi(\mathfrak{A})}{N(\mathfrak{A})^s}$$

, ここで $N(\mathfrak{A}) := |\mathcal{O}_K/\mathfrak{A}|$, $I_{\mathfrak{f}}$ は K の分数イデアルで $\mathfrak{f}$ と互いに素なもののなす群.

$P_{\mathfrak{f}} := \{(a) \in I_{\mathfrak{f}} \mid a \in K,\ a \equiv 1 \mod {}^{\times}\mathfrak{f}\}$ と定義したとき,

$$L_{\mathfrak{f}}(\chi, s) = \sum_{[\mathfrak{a}] \in I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}} \sum_{\substack{b \in [\mathfrak{a}] \\ b \in \mathcal{O}_K \\ b \text{ は } \mathfrak{f} \text{ と互いに素}}} \frac{\iota_\infty \circ \chi(b)}{N(b)^s}$$

が成立する. 部分 L 函数を

$$L_{\mathfrak{f}}(\chi, s, \sigma_{\mathfrak{a}}) := \sum_{\substack{b \in [\mathfrak{a}] \\ b \in \mathcal{O}_K \\ b \text{ は } \mathfrak{f} \text{ と互いに素}}} \frac{\iota_\infty \circ \chi(b)}{N(b)^s}$$

とする. $b \in [\mathfrak{a}], b \in \mathcal{O}_K$ であれば, $b = \mathfrak{a}\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{a}^{-1}$ かつ $\lambda \in P_{\mathfrak{f}}$ という λ が存在する. したがって, $\lambda \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}$.

$\lambda_1, \lambda_2 \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}$ が $\lambda_1 \mathfrak{a} = \lambda_2 \mathfrak{a}$ を満たしているとき, ある $\epsilon \in \mathcal{O}_K^{\times}$ が存在して $\lambda_1 = \lambda_2 \epsilon$ である. この ϵ は $\epsilon \in \Gamma_{\mathfrak{f}}$ を満たす.

以上より, 次の等式を得る.

$$\begin{aligned}
L_{\mathfrak{f}}(\chi, s, \sigma_{\mathfrak{a}}) &= \sum_{\substack{b \in [\mathfrak{a}] \\ b \in \mathcal{O}_K \\ b \text{ は } \mathfrak{f} \text{ と互いに素}}} \frac{\iota_\infty \circ \chi(b)}{Nb^s} \\
&= \sum_{\mathfrak{l} \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}/\Gamma_{\mathfrak{f}}} \iota_\infty \circ \chi(\mathfrak{a}) \frac{\bar{\mathfrak{l}}^{\beta}}{\mathfrak{l}^{\alpha} N(\mathfrak{a}\mathfrak{l})^{\mathfrak{s}}} \\
&= \iota_\infty \circ \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s} \sum_{\mathfrak{l} \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}/\Gamma_{\mathfrak{f}}} \frac{\bar{\mathfrak{l}}^{\beta}}{\mathfrak{l}^{\alpha} N(\mathfrak{l})^{s}}
\end{aligned}$$

したがって, 次の補題が成立する.

補題 6.29. χ の導手が $\mathfrak{f}$ を割り切るとする. また, $R_{\mathfrak{f}}$ は $I_{\mathfrak{f}}$ の部分集合で $I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}$ の代表系となるものとする.

この時

$$L_{\mathfrak{f}}(\chi, s) = \sum_{\mathfrak{a} \in R_{\mathfrak{f}}} \iota_\infty \circ \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s} E^{\beta,\alpha}(1, 0, \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}; \Gamma_{\mathfrak{f}})$$

が成立する.

この補題を基にして, 補題 6.13 を証明する.

補題の証明 *6.13.* ここでは簡単のため, ρ がすべての K における l 上の素点で分岐している場合に対して証明する. この場合では, $\widetilde{F_{\rho^{-1}}} = F_{\rho^{-1}}$ が成立することに注意する.

簡単のため,

$$C := \frac{(\alpha-1)!(2\pi i)^{|\beta|}}{{\Omega_{CM}}^{\alpha} {\Omega_{CM}^{\vee}}^{\beta}}$$

と定義する.

高次の Eisenstein 数の定義を用いることで, 次の等式が成立する.

$$
\begin{aligned}
&C^{-1}\sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}}\chi(\mathfrak{A}_i)\sum_{s_i\in\mathcal{A}[\lambda^n]}P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i)EK^{\beta,\alpha-1}_{\Gamma_{\mathfrak{f}},\mathcal{A}_i}(f^i_{[c]},x_i+s_i)\\
&=\sum_{t\in\Gamma_{\mathfrak{f}}\backslash c^{-1}\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{f}/\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{f}}(\sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}}\chi(\mathfrak{A}_i)\sum_{s_i\in\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}}P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i)f_{[c]}(-t)E^{\beta,\alpha}(t+1+s_i,\mathfrak{f}\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}{}^{-1};\Gamma_{\mathfrak{f}}))\\
&=\sum_{i=1}^{h_{\mathfrak{f}}}\chi(\mathfrak{A}_i)(\sum_{s_i\in\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}}N(c)P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i)E^{\beta,\alpha}(s_i+1,\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1};\Gamma_{\mathfrak{f}})\\
&-\sum_{s_i\in\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}}P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i)E^{\beta,\alpha}(1+s_i.c^{-1}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}{}^{-1};\Gamma_{\mathfrak{f}}))
\end{aligned}\tag{33}
$$

ここで, 1 行目から 2 行目は, [KS24] の命題 4.6 による $\langle,\rangle$ の計算から従う. 2 行目から 3 行目は $f^i_{[c]}=Nc1_{e(R)}-1_{\mathcal{A}_i[c]}$ から従う. 等式 (33) における, 次の部分を計算すればよい.

$$\sum_{s_i\in\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}}P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}(s_i)E^{\beta,\alpha}(s_i+1,\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1};\Gamma_{\mathfrak{f}})\tag{34}$$

以下では, 簡単のため $\Gamma:=\Gamma_{\mathfrak{f}}$ とし, $\Gamma^{'}:=\Gamma_{\mathfrak{f}\lambda^n}$ とする. 上記の等式で $E^{\beta,\alpha}(1+s_i,f\mathfrak{A}_i^{-1};\Gamma)=[\Gamma:\Gamma^{'}]^{-1}E^{\beta,\alpha}(1+s_i,\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1};\Gamma^{'})$ により Γ を $\Gamma^{'}$ に取り換えて計算すると, 次の式が得られる.

$$(34)=[\Gamma:\Gamma^{'}]^{-1}\sum_{\mathfrak{l}\in 1+\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}/\Gamma^{'}}\frac{P^iF_{\rho^{-1}}(\mathfrak{l})\overline{\mathfrak{l}^{\beta}}}{\mathfrak{l}^{\alpha}N(\mathfrak{l})^s}|_{s=0}\tag{35}$$

ここで, $P^iF_{\rho^{-1}}=P^i\widetilde{F_{\rho^{-1}}}$ という $\lambda^{-n}\otimes\mathbb{Z}_l\cap(1+\lambda^{-n}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1})$ 上で定義された局所定数函数のサポートを考える. すると, このサポートは, 次のようになる.

$$1+\prod_{\lambda_\sigma\in\Sigma_l}\lambda_\sigma^{-v_\sigma}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}{}^{-1}.$$

ここで, ρ の導手 $\prod_{\lambda_\sigma\in\Sigma_l}\lambda_\sigma^{v_\sigma}$ と定めた. 第 6.2 節と同様にして, 次のように分解する.

$$\prod_{\lambda_\sigma\in\Sigma_l}\lambda_\sigma^{v_\sigma}=(a)\mathfrak{b}$$

, ここで $a\in 1+\mathfrak{f}$, $\mathfrak{b}$ は l と互いに素となる K の整イデアルをとる. この分解を用いて, $P^iF_{\rho^{-1}}$ のサポートは次のように記述される.

$$1+\prod_{\lambda_\sigma\in\Sigma_l}\lambda_\sigma^{-v_\sigma}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}{}^{-1}=a^{-1}(a+\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{b}^{-1})=a^{-1}(1+\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{b}^{-1}).$$

この時, $\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ の元は λ 進的に整, すなわち $\mathcal{O}_{K,\lambda}$ の元であることに注意する. そこで, 任意の $\mathfrak{l}\in 1+\prod_{\lambda_\sigma\in\Sigma_l}\lambda_\sigma^{-v_\sigma}\mathfrak{f}\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}{}^{-1}$ を $\lambda=a^{-1}\omega$, $\omega\in 1+\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ と記述することができる. さらに, Gauss 和の性質から $\omega\notin\mathcal{O}_{K,\lambda}^{\times}$ であれば $P^iF_{\rho^{-1}}(a^{-1}\omega)=0$ であることを踏まえれば次が従う.

$$P^iF_{\rho^{-1}}(a^{-1}\omega)=\rho^{-1}(\omega)P^iF_{\rho^{-1}}(a^{-1}).$$

以上のことから次の等式を得る.

$$
\begin{aligned}
(34)&=\frac{a^{\alpha}P^iF_{\rho^{-1}}(a^{-1})}{\overline{a}^{\beta}}[\Gamma:\Gamma^{'}]^{-1}\sum_{\omega\in(1+\mathfrak{f}\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{b}^{-1})/\Gamma^{'}}\frac{\rho^{-1}(\omega)\overline{\omega}^{\beta}}{\omega^{\alpha}N(\omega)^s}|_{s=0}\\
&=\frac{a^{\alpha}P^iF_{\rho^{-1}}(a^{-1})}{\overline{a}^{\beta}}(\chi\rho^{-1}(\mathfrak{b}))^{-1}(\chi\rho^{-1}(\mathfrak{A}_i))^{-1}\sum_{\substack{a\in[\mathfrak{b}\mathfrak{A}_i]\\ a\subset\mathcal{O}_K\\ a:\mathfrak{f}\lambda\text{ と互いに素}}}\frac{\chi\rho^{-1}(a)}{N(a)^s}|_{s=0}
\end{aligned}
$$

ここで, 最後の等式は補題 6.29 と同様. $[b\mathfrak{A}_i]$ は $I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}$ において定まるイデアル $\mathfrak{b}\mathfrak{A}_i$ の同値類とした. ρ の定義から, $\rho(\mathfrak{A}_i)=1$ であることを踏まえて, (34) 式を (33) に代入することで求める等式を得る. □

References

[Ar69] E.Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, (1969), Publications Mathématiques de l'IHÉS, 36.

[BLR80] S. Bosh, W.Lutkebormat, M.Reynaud, Neron Models, (1980), Springer Berlin, Heidelberg.

[Ma72] B. Mazur, Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields, (1972), Invent. Math. 18, 183-266.

[Del73] P.Deligne, Cohomologie a supports propers, expose XVII of SGA 4, Theorie de topos et Cohomologie etale des Schemas, Tome 3, (1973), Springer Verlag, Berlin, p250-480, Lecture Note in Math, Vol 269.

[De79] P.Deligne, Values of L-functions and Periods of Integrals, on seminar website. Translation of P. Deligne, Valeurs de Fonctions L et périodes d ' intégrales, (1979), Proceedings of Symposia in Pure Math. 33, Part 2, 313-346.

[Ds87] Ehud de Shalit, The Iwasawa Theory of Elliptic Curves with Complex Multiplication, (1987), ACADEMIC PRESS, INC.

[Gro57] A.Grothendieck, Sur quelques points d ' alg'ebre homologique, (1957), Tohoku math.

[Ds22] Ehud de Shalit, The Furgues-Fontaine Curve and p-adic Hodge Theory, (2022), Perfectoid Spaces, Banerjee et al, Infosys Science Series.

[Har87] Harder, G. Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case GL2 , (1987) Invent Math 89, 37–118.

[Ha10] M. Hazewinkel, Formal Groups and Applications, (2010), AMS Chelsea Publishing American Mathematical Society.

[Hida04] H. Hida, Non-vanishing modulo p of Hecke L–values, in Geometric Aspects of Dwork ' s Theory II, (2004), (edited by Alan Adolphson, Francesco Baldassarri, Pierre Berthelot, Nicholas Katz, and Francois Loeser), Walter de Gruyter, pp. 735–784

[Hida04] H.Hida, p adic automorphic forms on Shimura varieties, (2004), Springer Monographs in Mathematics (SMM).

[Hru01] E. Hrushovski, The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields, (2001), Ann. Pure Appl. Logic 112, no. 1.

[BK07] K. Bannai and S. Kobayashi, Algebraic theta functions and p-adic interpolation of Eisenstein-Kronecker numbers, (2007), preprint, arXiv:math.NT/0610163v2.

[BKF15] K.Bannai, S.Kobayashi, H.Furusho, p-adic Eisenstein-Kronecker series for CM elliptic curves and the Kronecker limit formulas, (2015), Nagoya Math. J. 219, 269-302.

[BKT07] K. Bannai, S. Kobayashi, and T. Tsuji, On the real Hodge and p-adic realizations of the Elliptic Polylogarithm for CM elliptic curves, (2007), preprint, arXiv:0711.1701v1 [math.NT]

[J18] J.Lee, Structure of the Mordell-Weil Group over the $\mathbb{Z}_p$-Extension, (2018), preprint, arXiv:1809.10351 [math.NT]

[KS24] Kings, Sprang, Eisenstein-Kronecker classes, integrality of critical values of Hecke L-functions and p-adic interpolation, (2024), preprint, arXiv:1912.03657 [math.NT].

[Katz78] N. M. Katz, p-adic L-functions for CM fields, (1978), Invent. Math., 49, 199–297.

[LK23] A.Lei, D.Kundu, non-vanishing modulo p of Hecke L value over imaginary quadratic fields, (2023), Arxiv.

[Lam15] J.Lamplugh, An analogue of the Washington–Sinnott theorem for elliptic curves with complex multiplication I, (2015), J. London Math. Soc. 91, no. 3, 609–642.

[Lau96] G. Laumon, Transformation de Fourier generalisee, (1996), arxiv:9603004[math.NT].

[Liu03] Q. Liu, Algebraic geometry and Arithmetic curves, (2008), Oxford University press.

[Mil72] J.Milne, Abelian varieties defined over their Fields of Moduli, I †, (1972), Bulletin of The London Mathematical Society.

[Mc95] M. McQuillan, Division points on semi-abelian varieties, (1995), Invent. Math. 120, no. 1, 143–159.

[OH15] T.Ochiai, T.Hara, The cyclotomic Iwasawa main conjecture for Hilbert cusp forms with complex multiplications, (2018), Kyoto Journal of Mathematics, 58, No. 1, 1–100.

[R63] N. Roby, Lois polynomes et lois formelles en theorie des modules, (1963), An. Sci. Ecole. Norm. Sup, no80, 213-248.

[R84] D. Rohrlich, On L-functions of elliptic curves and cyclotomic towers, (1984), Invent. Math. 75, 409–423.

[Ray83] M.Raynaud, Sous-variétés d ' une variété abélienne et points de torsion, Prog. Math. 35 (1983), 327–352.

[Shatz86] S.S.Shatz, Group Schemes, Formal Groups, And p-Divisible Groups, (1986), Arithmetic Geometry, edited by Cornel, Shilverman, Springer-Verlag, New York, Berlin Heidelberg, London, Paris, Tokyo.

[Schn85] P. Schneider, p-adic height pairings II, (1985), Invent. Math. 79, 329-374.

[Sch87] L. Schneps, On the μ-invariant of p-adic L-functions attached to elliptic curves with complex multiplication, (1987), J. Number Theory 25, 20–33.

[Ser20] V.On p-adic versions of the Manin-Mumford Conjecture, (2020),preprint, arXiv:2007.02069 [math.NT].

[Shi71] G.Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, (1971), Kanô Memorial Lectures, No. 1. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J.

[Shi76] G.Shimura, The special values of the zeta functions associated with cusp forms, (1976), Comm. Pure Appl. Math. 29, 783–804.

[ST61] G.Shimura, Y.Taniyama, AMA, Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory, (1961), Publ. Math. Soc. Japan No. 6.

[Sin87] Warren M. Sinnott, Γ-transforms of rational function measures on $\mathbb{Z}_S$, (1987), Invent. Math. 89, no. 1, 139–157.

[Tate67] J.Tate, p-divisible group, (1967), roc. Conf. Local Fields , 158–183, Springer, Berlin.

[Tate66] J. Tate – Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. Invent. Math. 2 (1966), 134-144

[Po03] A. Polishchuk , Abelian Varieties, Theta Functions and the Fourier Transform, (2003), Cambridge University Press.

[Y13] S. Yasuda. Explicit t-expansions for the elliptic curve $E : y^2 = 4(x^3 + Ax + B)$, (2013), Proc. Japan Acad. Ser. A Math Sci., 89(9):123–127.

[Z12] U.Zannier, Some problems of unlikely intersections in arithmetic and geometry, (2012). volume 181 of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, With appendixes by David Masser.

Takuya Tanaka, Mathematical Inst. Institute of Science Tokyo, 2-12-1, Ookayama, Meguro, Tokyo, 152-8550, JAPAN

Email address: `tanaka.t.ch@m.titech.ac.jp`