

需要主導型の輸送ネットワーク形成： Hub and Spoke 構造の創発

酒井 高良¹・高山 雄貴²

¹正会員 東京工業大学特任助教 環境・社会理工学院 (〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 W6-9)

E-mail: sakai.t.av@m.titech.ac.jp (Corresponding Author)

²正会員 東京工業大学教授 環境・社会理工学院 (〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 W6-9)

E-mail: takayama.y.af@m.titech.ac.jp

本研究では、Hub and Spoke (HS) 構造の創発を再現しうる需要主導型の輸送ネットワーク形成ゲームを構築し、その均衡状態の性質を明らかにする。具体的には、まず、輸送サービス利用者の選択行動が輸送ネットワークを形成する過程を集団ゲームとして定式化し、そのゲームがポテンシャル・ゲームに属することを明らかにする。続いて、このゲームに対応するポテンシャル最大化問題が Minimum Concave-cost Network Flow Problem (MCNFP) と同じ数理構造を持つ問題に変換できることを示し、MCNFP に対する大域的最適化アルゴリズムを導入する。数値実験により、ゲームの確率安定な均衡状態として HS 構造を有する輸送ネットワークが形成されることを明らかにする。

Key Words: hub and spoke, economies of scale, potential game, stochastic stability, minimum concave-cost network flow problem

1. 序論

Hub and Spoke (HS) 構造とは、少数のハブとそれらハブに接続するスポークから構成されるネットワーク構造のことである (図-1)。この HS 構造は、鉄道、空路、海路など様々な種類の輸送ネットワークにおいて頻繁に観察できる¹⁾⁻³⁾。例えば、大手航空会社・連合の多くは、いくつかのハブ空港を中心とした航空ネットワークを構築している。また、鉄道やバスなどの公共交通機関においても、複数路線・系統が停車するターミナル (ハブ) を中心とした交通ネットワークが形成されることが多い。

HS 構造が多種多様な輸送ネットワークにおいて成立している要因のひとつに、輸送コストに働く“規模の経済”がある⁴⁾⁻⁷⁾。ここでの規模の経済とは、輸送量の増加に伴い単位輸送量あたりの輸送コストが減少するという性質である。この規模の経済が働く状況下では、集約的輸送により輸送効率を向上させることができる。そのため、輸送サービスの提供主体は、ハブを用いた集約的輸送体系を採用し、その結果として HS 構造を有する輸送ネットワークが形成される。

このような、輸送サービス提供主体の最適化行動

として HS 構造が形成されるという説明には一定の合理性がある。しかしながら、この形成メカニズムは、輸送ネットワーク形成に関わる主体を供給サイドのみと仮定している。輸送ネットワークの形成は、その輸送サービスを提供する供給サイドの選択行動だけでなく、それらを利用する需要サイドの選択行動の影響も受けると考えられる。なぜなら、供給サイドが輸送ネットワークを変化させれば、それに伴って需要サイドの選択行動 (需要パターン) も変化し、この需要パターンの変化は供給サイドのさらなる輸送ネットワーク再編にも影響を与える可能性が高いからである。このような需給の相互作用の結果として輸送ネットワークが形成されるという視点に立つと、HS 構造が数多く存在するという観測的事実を説明・記述するためには、需要サイドの選択行動を陽に考慮することが必要となる。

輸送ネットワークにおける HS 構造の形成・デザインを、供給サイドの選択行動から解析する研究は、O’Kelly (1986)⁸⁾ の嚆矢的研究以来、数多く存在する^{4),6),7),9)-12)}。これらの膨大な研究蓄積については、Campbell and O’Kelly (2012)¹³⁾ のレビューを参照されたい。しかしながら、その一方で、需要サイドの選択行動を考慮した解析は限定的である。

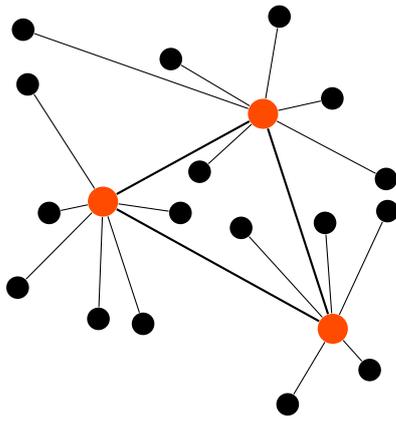


図-1: Hub and Spoke 構造

数少ない研究として、Mori (2011)¹⁴⁾ は、2 種類の規模の経済（輸送量と輸送距離に関する規模の経済）が運賃に働く状況を仮定し、そのもとで輸送サービス利用者（需要サイド）の選択行動の結果として生じる輸送ネットワークを均衡状態として定式化し、解析している。そこでは、特定の条件下で HS 構造が均衡解として成立しうることが示されている。また、HS 構造が成立する際のハブの位置やハブの間隔に関する基礎的な性質を、2 種類の規模の経済の強度と関連付けて明らかにしている。しかしながら、Mori (2011)¹⁴⁾ の解析は、あるネットワーク形状（e.g., HS 構造）を所与として、その形状が均衡解として成立するためのパラメータの条件を特定するというアプローチに留まっている。すなわち、任意のパラメータで HS 構造が成立するかどうかを明らかにするための方法論は構築されていない。さらに、均衡状態が複数存在するにも関わらず、その安定性について議論はなされていない。このことは、HS 構造を有する輸送ネットワークが、どのような状況下で形成され、安定的に成立するか体系的知見が得られていないことを意味する。

本研究の目的は、需要サイドの選択行動に基づいて形成される輸送ネットワークの性質を、系統的に明らかにするための理論基盤を構築することである。本研究は2つのパートから構成される。まず、前半のパートでは、需要サイド（輸送ネットワーク上を移動する主体）が主導して輸送ネットワークを形成する過程を、集団ゲーム（輸送ネットワーク形成ゲーム）として定式化する。このゲームにおいて、需要サイドは、自身の居住地から終点までに移動する際に利用する経路（輸送サービスの組み合わせ）を選択する。ここで、輸送サービスの運賃には、Mori (2011)¹⁴⁾ のモデルと同様に、“輸送量に関する規模の経済”と“輸送距離に関する規模の経済”が働く。こ

の輸送ネットワーク形成ゲームには複数均衡が存在しうる。本研究では、確率安定性¹⁵⁾ の概念に基づき、もっともらしい均衡状態を特定・選択する。そのため、まず、輸送ネットワーク形成ゲームがポテンシャル・ゲームに属することを明らかにする。そして、ポテンシャル・ゲームでは、確率安定な均衡状態はポテンシャル関数の大域的最大化点として得られるという事実¹⁵⁾ を用いて、ポテンシャル最大化問題の大域的な求解を通して均衡状態の特定・選択を行う。

後半のパートでは、ポテンシャル最大化問題の大域的最適解を求めるための最適化アルゴリズムを導入する。まず、ポテンシャル最大化問題に対して、適切に変数変換を行うことで、数理計画の分野で多くの研究蓄積がある Minimum Concave-cost Network Flow Problem (MCNFP) と同じ数理構造を持つ問題に変換できることを明らかにする。この事実に基づき、MCNFP の数理構造を活用し、大域的最適解への収束が保証された Soland (1974)¹⁶⁾ の分枝限定アルゴリズムを導入する。最後に、このアルゴリズムを用いた数値実験により、確率安定均衡状態として HS 構造を有する輸送ネットワークが形成されうることが明らかにする。ここでは、2 種類の規模の経済の強度が異なる場合、創発する HS 構造のパターンが異なることも明らかにする。

本稿の構成を次に示す。続く2章では、輸送ネットワーク形成ゲームを定式化する。3章では、本研究で用いるポテンシャル・ゲームの枠組みを簡単にまとめ、4章において本研究の輸送ネットワーク形成ゲームがポテンシャル・ゲームに属することを明らかにする。次に、5章では、輸送ネットワーク形成ゲームの確率安定解を求めるための、ポテンシャル最大化問題に対する大域的最適化アルゴリズムを示す。そして、6章で、数値実験結果を示し、HS 構造が確率安定な均衡状態として形成されることを明らかにする。最後に、7章で本研究のまとめと今後の展望を述べる。

2. モデル

本章では、輸送ネットワーク形成ゲームを定式化する。まず、**2.(1)** にてモデルの空間設定を述べる。続いて、**2.(2)** にて規模の経済が働く輸送サービスの表現とそれら輸送サービスの運賃の決定方法について述べる。**2.(3)** で輸送ネットワーク形成ゲームを定式化し、その均衡状態の定義を与える。なお、本研究のモデルは離散空間を対象としている点を除けば、

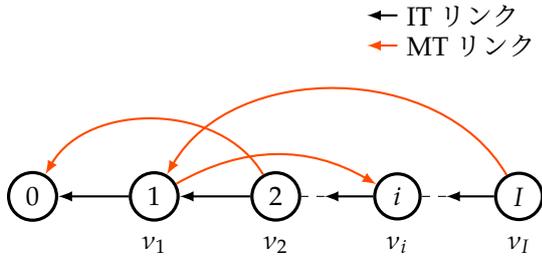


図-2: 空間構造と輸送サービス

Mori (2012)¹⁴ のモデルと基本的な枠組みは同じである。そのため、適宜対応関係を示しながら、本研究のモデルを説明する。

付録 A には、本稿で用いる主要な記号の定義をまとめている。適宜参照されたい。

(1) 空間

単一終点と I 起点が一次元線分上に位置する空間を考える (図-2)。終点は線分空間の左端に位置し、インデックス $i = 0$ を用いて表す。起点は、終点に近い順にインデックス $i = 1, 2, \dots, I$ を用いて表し、これら起点ノードの集合を I とする。ノード i と $i+1$ の間の距離は d とする。ノード (i, j) 間の距離を $d_{ij} \equiv d|i-j|$ とする。各起点には利用者が居住しており、起点 i の利用者の総数を v_i と表す。

(2) 輸送サービス

各起点間および各起終点間は、輸送サービスを表すリンクで連結されている。全リンクの集合を \mathcal{E} で表す：

$$\mathcal{E} \equiv \{(i, j) \mid i \in I, j \in I \cup \{0\}, i \neq j\}. \quad (1)$$

輸送サービスには2つの種類がある。1つ目の輸送サービスは個別輸送 (IT: Individual Transport) 型の輸送サービスであり、隣接するノード間を結ぶリンク $(i, j) \in \mathcal{E}^{\text{IT}}$ で提供される。ここで

$$\mathcal{E}^{\text{IT}} \equiv \{(i, j) \mid |i-j| = 1, (i, j) \in \mathcal{E}\} \quad (2)$$

であり、以降では \mathcal{E}^{IT} に含まれるリンクを IT リンクと呼ぶ。IT 型輸送サービスの (単位輸送量あたりの) 運賃は当該リンクを通行する利用者数 (輸送量) に依存せず、距離のみに依存する。距離が d である IT リンクの運賃は、パラメータ $t > 0$ を用いて次のように定義する：

$$c^{\text{IT}}(d) = td. \quad (3)$$

2つ目の輸送サービスは大量輸送 (MT: Mass Transport) 型の輸送サービスである。この MT 型輸送サー

ビスは、隣接しないノード間 $(i, j) \in \mathcal{E}^{\text{MT}}$ で提供される。ここで、

$$\mathcal{E}^{\text{MT}} \equiv \{(i, j) \mid |i-j| \neq 1, (i, j) \in \mathcal{E}\} \quad (4)$$

であり、以降では \mathcal{E}^{MT} に含まれるリンクを MT リンクと呼ぶ。この MT 型輸送サービスの運賃は、IT 型輸送サービスと異なり、輸送距離だけでなく輸送量にも依存する。つまり、需要連動型の運賃となる。この需要連動型の運賃の決定する関数はすべてのリンクで同一であり、輸送量が増えるにしたがって運賃が減少するという“輸送量に関する規模の経済”と、輸送量が増えるにしたがって単位距離あたりの運賃が減少するという“距離に関する規模の経済”という2つの規模の経済が反映される。具体的には、輸送量 x 、輸送距離 d のとき、(単位輸送量あたりの) 運賃 $c^{\text{MT}}(x, d)$ は、以下の仮定 2.1, 仮定 2.2 を満足するものとする：

仮定 2.1 (輸送量に関する規模の経済) MT リンクの運賃関数 $c^{\text{MT}}(x, d)$ は、任意の $d \in (0, \infty)$ に対して、 $x > x' > 0$ ならば、

$$c^{\text{MT}}(x', d) > c^{\text{MT}}(x, d) > 0$$

である。

仮定 2.2 (輸送距離に関する規模の経済) MT リンクの運賃関数 $c^{\text{MT}}(x, d)$ は、任意の $x \in (0, \infty)$ に対して、 $d > d' > 0$ ならば、

$$c^{\text{MT}}(x, d) > c^{\text{MT}}(x, d') > 0, \\ c^{\text{MT}}(x, d)/d < c^{\text{MT}}(x, d')/d'$$

である。

加えて、MT 型輸送サービスの運賃は、同距離を IT 型輸送サービスのみを利用した場合の運賃と比較して、以下に示す優位性・劣位性を備えるものとする。

仮定 2.3 MT リンクの運賃関数 $c^{\text{MT}}(x, d)$ は、次の関係を満足する：

$$\lim_{x \rightarrow +0} c^{\text{MT}}(x, d) > td \quad \forall d > 0, \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c^{\text{MT}}(x, d) \in [0, td) \quad \forall d > 0, \quad (6)$$

$$\lim_{d \rightarrow +0} c^{\text{MT}}(x, d) \in (0, +\infty) \quad \forall x > 0. \quad (7)$$

式 (5) は、輸送量 x が十分少ない場合において、MT リンクの運賃が同距離の IT 型輸送サービスの運賃より高いことを表している。式 (6) は、輸送量 x が十分大きい場合において、MT リンクの運賃が同距離の IT 型輸送サービスの運賃より低いことを表している。また、式 (7) は、輸送量 x が存在するならば、

MT リンクは輸送距離がどれだけ小さくしようと非ゼロの運賃がかかることを意味している。これは IT リンクでは、いわゆる乗り換えコストがかからないが、距離に関する規模の経済を反映する MT リンクでは乗り換えコストが生じることを表現するものである。

ここで示した MT 輸送サービスの運賃に関する仮定は Mori (2011)¹⁴ における各種条件と対応している。仮定 2.2 および仮定 2.1 は、Mori (2011)¹⁴ の式 (4) および式 (1), (2) にそれぞれ対応する。仮定 2.3 は、Mori (2011)¹⁴ の式 (5), (6), (7) に対応している。

以降、本稿では、MT リンクと IT リンクの運賃を統一的に $c_{ij}(x_{ij})$ を用いて表記する：

$$c_{ij}(x_{ij}) \equiv \begin{cases} c^{\text{IT}}(d_{ij}) & \text{if } (i, j) \in \mathcal{E}^{\text{IT}} \\ c^{\text{MT}}(x_{ij}, d_{ij}) & \text{if } (i, j) \in \mathcal{E}^{\text{MT}} \end{cases} \quad (8)$$

(3) 輸送ネットワーク形成ゲーム

本研究では、輸送ネットワークが形成される過程を集団ゲーム (population game)¹⁵ として記述する。具体的には、各ノードに居住する利用者の終点までの経路選択行動を考える。ここで、利用者は、自身の移動費用を最小化する (i.e., 移動に関わる利得を最大化する) ように、どの IT リンク、MT リンクを利用するかを選択する。この経路選択行動の結果、利用者が利用しているリンク (i.e., そのリンクの輸送サービスを少なくとも 1 主体が利用しているリンク) から構成されるネットワークに着目する。そして、そのネットワーク形状がゲームの進行に伴って変化する様子を輸送ネットワークの形成過程として捉える。

集団ゲームは、利用者集団および各利用者集団の戦略集合、状態集合、利得関数から構成される。本研究の輸送ネットワーク形成ゲームにおけるこれらの要素を順番に示していく。ノード $i \in \mathcal{I}$ に居住する利用者を集団 i の利用者とし、集団 i の利用者が、終点までに選択可能な経路の集合 (i.e., 戦略集合) を \mathcal{K}_i で表す。また、経路 $k \in \mathcal{K}_i$ を選択する利用者の数を y_i^k とし、集団全体の状態は $\mathbf{y} \equiv \{y_i^k\}_{k \in \mathcal{K}_i, i \in \mathcal{I}}$ を用いて表す。なお、この \mathbf{y} は、以下に示す利用者数の保存条件を満足する：

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_i} y_i^k = v_i \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (9)$$

集団全体の状態が \mathbf{y} であるときの、集団 $i \in \mathcal{I}$ の利用者が経路 $k \in \mathcal{K}_i$ を選択したときに得られる利得 $F_i^k(\mathbf{y})$ を次のように定義する：

$$F_i^k(\mathbf{y}) \equiv - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} c_{ij}(x_{ij}) \delta_{ij}^k \quad \forall k \in \mathcal{K}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (10)$$

ここで δ_{ij}^k は、経路 k がリンク (i, j) を含む場合は 1、そうでない場合は 0 となる二値変数である。

これらの要素を用いて、輸送ネットワーク形成ゲームを次のように定義する：

定義 2.1 (輸送ネットワーク形成ゲーム) 次に示す戦略集合 \mathcal{K} 、状態集合 \mathcal{Y} 、利得関数 $F(\mathbf{y})$ からなる集団ゲーム $\mathcal{G} = (\mathcal{K}, \mathcal{Y}, F(\mathbf{y}))$ を輸送ネットワーク形成ゲームと呼ぶ：

$$\mathcal{K} \equiv \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{K}_i, \quad (11)$$

$$\mathcal{Y} \equiv \left\{ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \mid \sum_{k \in \mathcal{K}_i} y_i^k = v_i, \quad \forall i \in \mathcal{I} \right\}, \quad (12)$$

$$F(\mathbf{y}) \equiv \{F_i^k(\mathbf{y})\}_{k \in \mathcal{K}_i, i \in \mathcal{I}}. \quad (13)$$

この輸送ネットワーク形成ゲームの Nash 均衡の定義を次に示す：

定義 2.2 (Nash 均衡) 輸送ネットワーク形成ゲーム $\mathcal{G} = (\mathcal{K}, \mathcal{Y}, F(\mathbf{y}))$ において、次の条件を満たす集団状態 $\mathbf{y}^* \in \mathcal{Y}$ を Nash 均衡と呼ぶ：

$$y_{i^*}^k > 0 \Rightarrow F_i^k(\mathbf{y}^*) = \max_{k' \in \mathcal{K}_i} \{F_i^{k'}(\mathbf{y}^*)\} \quad \forall k \in \mathcal{K}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (14)$$

定義 2.2 に示す Nash 均衡は、各利用者が自身の選択変更のみでは、自身の利得を改善できない状態を意味する。すなわち、全利用者が戦略変更の incentive を持たない状態である。

この Nash 均衡状態において、どの輸送サービスが利用されているか (i.e., どのような輸送ネットワークが構築されているか) を示すために、次の均衡輸送ネットワークの概念を導入する：

定義 2.3 (均衡輸送ネットワーク) 定義 2.2 を満たす Nash 均衡状態 \mathbf{y}^* に対して、次の条件を満足するリンク $(i, j) \in \mathcal{E}$ から構成されるネットワークを均衡輸送ネットワークと呼ぶ：

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k \in \mathcal{K}^i} y_{i^*}^k \delta_{ij}^k > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}. \quad (15)$$

定義 2.3 に示す均衡輸送ネットワークは、均衡状態において少なくとも 1 主体が利用しているリンクから構成されるネットワークを意味する。つまり、利用者の選択行動の結果として生じている輸送ネットワークの構造を表している。

ここで、本研究の輸送ネットワーク形成ゲームにおける供給サイド (輸送サービス提供主体) の位置付けを述べておく。本研究のモデルにおいて供給サイドは、需要サイドの選択変更に対して即座に反応

する形で輸送サービスを提供すると仮定している。そして、その運賃は式 (8) によって決定するとしている。すなわち、需要サイドが輸送パターンの変化を主導し、供給サイドがそれに追従して輸送ネットワークを形成し、ある種の運賃価格規制 (8) のもとで輸送サービスを提供している状況と解釈できる。

3. ポテンシャル・ゲームと確率安定性

詳細は次章で述べるが、前章で定式化した輸送ネットワーク形成ゲームには複数の均衡状態が存在する。本研究では、複数の均衡状態の中から、もっともらしい均衡状態を選択するための基準として、確率安定性を用いる。確率安定性とは、確率的なゆらぎが含まれる進化ダイナミクスのもとの動学的安定性を定義した概念であり、この概念を用いるともっともらしいダイナミクスのもとで生じる確率安定な均衡状態（確率安定解）を定めることができる。この事実に基づき、本研究では確率安定解をもっともらしい均衡状態として選択する。そして、この確率安定解の特定には、輸送ネットワーク形成ゲームがポテンシャル・ゲームに属するという事実を用いる。具体的には、集団ゲームがポテンシャル・ゲームであれば、確率安定解がポテンシャル関数の大域的最大化点に一致するという性質に基づき、ポテンシャル最大化問題の大域的求解を通して確率安定解を特定する。

本章では、このような均衡選択・特定アプローチの理論的根拠である確率安定性およびポテンシャル・ゲームについて、それらの一般的定義、性質を Sandholm (2010)¹⁵⁾ に基づきまとめる^{注1)}。具体的には、まず、3.(1) でポテンシャル・ゲームの枠組みを示す。続いて、3.(2) で確率安定性の定義を示す。そして、3.(3) において、ポテンシャル・ゲームにおける確率安定解の性質を述べる。なお、本章で用いる記号の定義は他の章とは異なるので注意されたい。

(1) ポテンシャル・ゲーム

ポテンシャル・ゲームとは、利得関数のベクトル場にポテンシャル（関数）が存在する集団ゲームのことである。集団ゲームが、ポテンシャル・ゲームである場合、主体の戦略変更による利得変化を1つの共通のスカラー関数（ポテンシャル関数）の変化によって捉えることができる¹⁷⁾。これは、Nash 均衡解の動学的安定性をポテンシャル関数を用いて特徴付けることを可能にするものである。本研究における輸送ネットワーク形成ゲームの解析は、この事実

に基づいている。本節の残りの部分で、ポテンシャル・ゲームの定義を述べ、次節以降では本研究の解析の基礎となる確率的進化ダイナミクスと確率安定性の概念を順番に導入していく。

ある集団ゲームを考える。集団の集合を \mathcal{P} 、集団 $p \in \mathcal{P}$ の戦略集合を S^p とし、 $S \equiv \bigcup_{p \in \mathcal{P}} S^p$ とする。集団 $p \in \mathcal{P}$ で戦略 $i \in S^p$ を選択している主体の数を y_i^p とし、集団 $p \in \mathcal{P}$ の状態を $\mathbf{y}^p \equiv \{x_i^p\}_{i \in S^p}$ で表す。集団 $p \in \mathcal{P}$ がとりうる状態の集合を \mathcal{Y}^p とする。また、全集団の主体の状態を $\mathbf{y} \equiv \{\mathbf{y}^p\}_{p \in \mathcal{P}}$ で表し、全集団の状態がとりうる状態集合を \mathcal{Y} で表す。全集団の状態が $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ であるときの、集団 $p \in \mathcal{P}$ で戦略 $i \in S^p$ を選択している主体の利得を $F_i^p(\mathbf{y})$ とする。利得関数のベクトル場を $\mathbf{F}(\mathbf{y}) \equiv \{F_i^p(\mathbf{y})\}_{i \in S^p, p \in \mathcal{P}}$ とする。これらを用いて、ポテンシャル・ゲームは次のように定義される：

定義 3.1 (ポテンシャル・ゲーム) ポテンシャル・ゲームとは、以下の等式を満たすポテンシャル関数 $f(\mathbf{y}) : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する集団ゲーム $\mathcal{G} \equiv (S, \mathcal{Y}, \mathbf{F})$ である。

$$\frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial y_i^p} = F_i^p(\mathbf{y}) \quad \forall i \in S^p, \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n \quad (16)$$

集団ゲームがポテンシャル・ゲームである場合、その集団ゲームの Nash 均衡をポテンシャル関数を用いて特徴付けることができる。このことを以下の定理に示す：

定理 3.1 (Sandholm; 2010¹⁵⁾) 集団ゲーム \mathcal{G} をポテンシャル関数 $f(\mathbf{y})$ を持つポテンシャル・ゲームとする。集団ゲーム \mathcal{G} の Nash 均衡の集合は、次に示すポテンシャル関数最大化問題の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件を満たす状態の集合と一致する：

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} f(\mathbf{y}). \quad (17)$$

定理 3.1 は、ポテンシャル最大化問題の KKT 条件を満足する点を求めることができれば、ゲームの Nash 均衡解を得ることができることを意味している。また、KKT 条件を満足する点が複数存在する場合は、Nash 均衡解が複数存在することも意味している。

(2) 確率的進化ダイナミクスと確率安定性

複数均衡の中からもっともらしい均衡を選択するための基準のひとつとして、確率的進化ダイナミクスのもとの動学的安定性を議論する確率安定性の概念を導入する。確率的進化ダイナミクスとは、主体の選択変更の繰り返しによる集団状態の変化過程

を、マルコフ連鎖として捉えるモデルである。主体は、利得に基づいて基本的には合理的選択 (i.e., 最適応答) を選択するが、低い確率で最適応答ではない戦略をとる。このことは次のようにモデリングされる。まず、時刻 t において、単一の主体がランダムに選ばれ戦略変更の機会が与えられる。この時刻 t における全集団の状態を \mathbf{y} とすると、集団 $p \in \mathcal{P}$ の戦略 $i \in \mathcal{S}^p$ をとる主体が戦略変更の機会を得た場合、その主体が戦略 $j \in \mathcal{S}^p$ に戦略変更する確率は $\rho_{ij}^p(\mathbf{y} | \eta) \in [0, 1]$ で表わされる。ここで、 η は主体の最適応答度合を表すノイズパラメータである。ノイズパラメータ η が小さいほど主体が誤った選択をする確率は低く、 η が大きいほど主体が誤った選択をする確率は高くなる。すなわち、 $\eta \rightarrow 0$ のとき主体の選択行動は最適応答となり、 $\eta \rightarrow \infty$ で主体の選択行動は完全にランダムとなる。

この戦略変更確率 $\rho_{ij}^p(\mathbf{y} | \eta)$ が、direct exponential protocol というクラスの戦略改定プロトコルであれば、この戦略変更確率によって導かれるマルコフ連鎖には、定常分布が一意に存在することが知られている。なお、direct exponential protocol の具体例は、Sandholm (2010),¹⁵⁾ pp.428-429 に記載されているので、適宜参照されたい。いずれの direct exponential protocol も、主体のもっともらしい戦略変更プロセスを表現するものである。

確率安定性は、このマルコフ連鎖過程（状態の進化過程）の定常分布の確定論的極限によって定義される^{注2)}。

定義 3.2 (確率安定性) 集団ゲーム $\mathcal{G} \equiv (\mathcal{S}, \mathcal{Y}, \mathbf{F})$ 、および集団ゲーム \mathcal{G} に対するパラメータ η を持つ確率的進化ダイナミクスを考える。この確率的進化ダイナミクスのもとでの、集団の状態空間 \mathcal{Y} の定常分布を π^η とする。状態 $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ は、 \mathbf{y} を含む任意の開集合 $O(\mathbf{y}) \subseteq \mathcal{Y}$ に対して、以下の式を満たすとき確率安定である。

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \pi^\eta(O(\mathbf{y})) > 0. \quad (18)$$

ここで、 $\pi^\eta(O(\mathbf{y}))$ は π^η で与えられる定常分布のうち集合 $O(\mathbf{y}) \cap \mathcal{Y}$ の定常確率である。

極限 $\eta \rightarrow 0$ は、主体行動が確定論的として極限をとり、主体がより合理的な行動をとることを意味している。

(3) 確率安定状態とポテンシャル関数

集団ゲームがポテンシャル・ゲームであれば、次の定理により、その確率安定解とポテンシャル関数を関係付けることができる^{15),18)}。

定理 3.2 (Sandholm; 2010¹⁵⁾) 集団ゲーム \mathcal{G} をポテンシャル関数 f を持つポテンシャル・ゲームとする。状態 $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ がポテンシャル関数 f を大域的に最大化するならば、状態 \mathbf{y} は確率安定である。

この定理は、ポテンシャル関数を大域的に最大化する点を求めることで、確率安定性の意味でもっともらしい均衡状態を特定できることを意味している。

4. 輸送ネットワーク形成ゲームのポテンシャル関数とその最大化問題

本章では、本研究の輸送ネットワーク形成ゲーム (定義 2.1) がポテンシャル・ゲームであることを示し、そのポテンシャル関数最大化問題 [max-P] を導入する。前章で述べたように、ポテンシャル・ゲームであれば、確率安定解をポテンシャル関数の大域的最大化点として特定できるので、問題 [max-P] の (大域的) 求解を通して、もっともらしい均衡状態の選択・特定が可能となる。

輸送ネットワーク形成ゲームの利得関数のベクトル場には、ポテンシャル関数が存在する。したがって、輸送ネットワーク形成ゲームはポテンシャル・ゲームに属する。このことを次の定理に示す：

定理 4.1 定義 2.1 に示す輸送ネットワーク形成ゲームは、次に示すポテンシャル関数 $f(\mathbf{y})$ を持つ、ポテンシャル・ゲームである。

$$f(\mathbf{y}) = - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \int_0^{x_{ij}} c_{ij}(\omega) d\omega \quad (19)$$

$$\text{where } x_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{K}_i} y_i^k \delta_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}. \quad (20)$$

証明 関数 $f(\mathbf{y})$ の \mathbf{y} に関する偏導関数が利得関数に一致する。したがって、定義 3.1 より、定義 2.1 に示す輸送ネットワーク形成ゲームはポテンシャル・ゲームである。□

仮定 2.1 より MT リンクの運賃関数は単調減少関数である。したがって、ポテンシャル関数 $f(\mathbf{y})$ を局所的に最大化する点は複数存在する可能性があることに注意されたい。以上より、次の命題が導かれる：

命題 4.1 輸送ネットワーク形成ゲームの Nash 均衡解は、一意とは限らない。

命題 4.2 次に示す問題 [max-P] の大域的最適解は、輸送ネットワーク形成ゲームの確率安定解である：

[max-P]

$$\max_{\mathbf{y} \geq 0} \cdot - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \int_0^{x_{ij}} c_{ij}(\omega) d\omega \quad (21)$$

$$\text{s.t. } x_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{K}_i} y_i^k \delta_{ij}^k \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}, \quad (22)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_i} y_i^k = v_i \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (23)$$

これより、問題 [max-P] の大域的最適解を求めることができれば、輸送ネットワーク形成ゲームの確率安定な均衡解 (i.e., もっともらしい確率的進化ダイナミクスのもとで確率安定的に実現する均衡解) を得ることができる。本研究では、この事実に基づき、問題 [max-P] の大域的最適解を求め、確率安定解および対応する均衡輸送ネットワークの特性を明らかにしていく。

5. 大域的最適化アルゴリズム

本章では、問題 [max-P] の大域的最適解を求めるための大域的最適化アルゴリズムを示す。具体的には、まず 5.(1) において、効率的求解のための準備として問題 [max-P] の決定変数を経路輸送量変数からリンク輸送量変数に変換する。次に、5.(2) では、問題に自明な大域的最適解が存在するケースについて述べる。5.(3) では、変数変換をした問題が MCNFP と同じ数理構造を持つことを示し、5.(4) で、この事実を活用した大域的最適化アルゴリズムを示す。

(1) 問題の変数変換

問題 [max-P] の決定変数は、経路輸送量変数 \mathbf{y} である。この \mathbf{y} は、経路別に定義されるため変数の次元が膨大となり、効率的数値計算の妨げとなる。また、本研究の解析対象である均衡輸送ネットワーク (定義 2.3) の形状を把握するには、各リンクの輸送量が分かれば十分である。そこで、問題 [max-P] を、リンク輸送量変数 \mathbf{x} を決定変数とする問題に変換する。具体的には、次の問題を考える：

[min-P]

$$\min_{\mathbf{x} \geq 0} \cdot Z(\mathbf{x}) \equiv \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} Z_{ij}(x_{ij}) \quad (24)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in \mathcal{I}} x_{ij} = \sum_{j \in \mathcal{I}} x_{ji} + v_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (25)$$

ここで、

$$Z_{ij}(x_{ij}) \equiv \int_0^{x_{ij}} c_{ij}(\omega) d\omega \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E} \quad (26)$$

である。以降のアルゴリズムの説明を明瞭にするた

めに、変数変換に加えて、目的関数の符号を逆転させて最小化問題として記述していることに注意されたい。この問題 [min-P] の決定変数は、リンク輸送量変数 \mathbf{x} であるので、経路輸送量変数 \mathbf{y} に比べて変数の次元は大きく低くなる。なお、問題 [min-P] の求解により得られる最適リンク輸送量 \mathbf{x}^* から、均衡輸送ネットワークの形状を直ちに把握することができる。また、詳細は後述するが、問題 [min-P] は、MCNFP と同じ構造を持つ。そのため、この変換により、MCNFP に対する最適化手法を適用し、輸送ネットワーク形成ゲームの均衡解を求解することが可能となる。

(2) 自明な大域的最適解が存在するケース

MT リンクの運賃関数の形状によっては、問題 [min-P] の大域的最適解を直ちに特定できる場合がある。すなわち、自明に確率安定解が特定できる。具体的には、MT リンクの運賃関数が、任意の正の輸送量 $x > 0$ に対して

$$\int_0^x c^{\text{MT}}(\omega, d) d\omega = +\infty \quad \forall d > 0 \quad (27)$$

となる性質を持つ場合、すべての起点の利用者が、IT リンクのみを利用する輸送パターンが最適解となる。なぜなら、式 (27) が成立する場合、いずれかの MT リンクに輸送量が存在すれば、目的関数 (24) の値は $+\infty$ となるからである。

なお、Mori (2011)¹⁴ の解析では、式 (27) を満たす以下の関数が MT 型輸送サービスの運賃関数として採用されている：

$$c^{\text{Mori}}(x, d) = (\phi + \rho d) \frac{1}{x}. \quad (28)$$

ここで ϕ, ρ はパラメータである。輸送量 x について積分すれば分かるように、この関数 (28) は式 (27) を満たす。そのため、この運賃関数を採用した場合、すべての起点の利用者が IT リンクのみを利用する輸送パターンが問題 [min-P] の大域的最適解となる。

このような、自明に確率安定解を特定できてしまうケース (しかもそれが、MT リンクを一切使わないケース) を除外するため、MT リンクの運賃関数に対して十分条件的に次の仮定を導入する：

仮定 5.1 MT リンクの運賃関数 $c^{\text{MT}}(x, d)$ は、次の条件を満足する。

$$c^{\text{MT}}(0, d) \in [0, +\infty) \quad \forall d > 0. \quad (29)$$

この仮定の直接的な意味は、MT リンク (i, j) において、リンク輸送量が $x_{ij} = 0$ のときでも、運賃は必ず有限の値を取るということである。この仮定を満

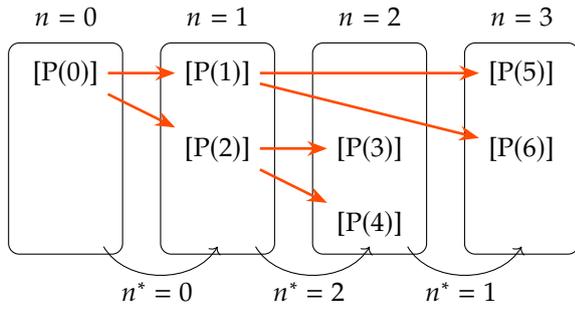


図-3: 各反復における近似問題生成のイメージ

足する MT リンクの運賃関数を用いれば、少なくとも自明に IT リンクのみを利用するパターンが大域的最適解となることはない (i.e., 結果として IT リンクのみを利用するパターンが大域的最適解となることはあり得る). 以降では, この仮定のもとで問題 [min-P] を解くことを考える.

(3) 数理構造

本節では, 解くべき問題 [min-P] の数理構造について整理する. 問題 [min-P] の目的関数 (24) は, 仮定 2.1 より凹関数となる. したがって, 問題 [min-P] は, 凹関数を線形制約 (輸送量保存条件) のもとで最小化する問題となる. そのため, 複数の局所最適解が存在し, 通常の凸最小化アルゴリズムでは大域的最適解を得られる保証はない. しかしながら, 注目すべきは, 問題の構造が 1960 年代以降, 数理計画の分野で活発に研究されている MCNFP¹⁹⁾⁻²¹⁾ に帰着するという点である^{注3)}.

MCNFP は NP 困難であるが²²⁾, 大域的最適解への収束が保証された厳密解法も存在する (MCNFP の解法に関するレビューは, Guisewite and Pardalos (1990),²³⁾ Monteiro et al. (2012, 2013)^{24),25)} や Fontes et al.(2006a, 2006b, 2007)²⁶⁾⁻²⁸⁾ を参照されたい). 本研究では, MCNFP に対する厳密解法のひとつである Soland (1974)¹⁶⁾ の分枝限定アルゴリズムを採用する. このアルゴリズムは, 有限回の反復で大域的最適解へ収束することが保証されている^{注4)}.

(4) アルゴリズム

Soland (1974)¹⁶⁾ の分枝限定アルゴリズムは, 元問題に対する近似問題を逐次生成する分枝操作と, 生成された近似問題の中から “より良い” 問題を取捨選択し求解する限定操作から構成される. 分枝操作において生成される近似問題は, いずれも目的関数を特定の区間で線形近似した問題となるが, 問題ごとに近似区間は異なる. 具体的には, 直前の限定操作において選択・求解された近似問題の解を用いて, そ

の問題の近似区間を 2 分割することで新たに近似問題を生成する. 限定操作では, それまでに生成された近似問題の中から, 大域的最適解を解に持つと期待される近似問題を適切に選択し, その問題を解くことで暫定解を更新する. この分枝操作と限定操作を繰り返すことで, ある種の網羅的な解探索が行われ, 結果として大域的最適解を求めることができる. 以降では, より詳細に各操作の内容を示していく.

反復回数および生成される近似問題を区別するためのインデックス $n = 0, 1, 2, \dots$ を導入する. n 番目に生成される近似問題を $[P(n)]$ と表記する^{注5)}. アルゴリズムの与件パラメータとして, $n = 0$ 番目の近似問題を定義するための近似区間 $[\underline{x}_{ij}^{(0)}, \bar{x}_{ij}^{(0)}], \forall (i, j) \in \mathcal{E}$ を用意する. 本研究では, $[\underline{x}_{ij}^{(0)}, \bar{x}_{ij}^{(0)}] = [0, \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i], \forall (i, j) \in \mathcal{E}$ とする. 各リンクの輸送量は全需要 $\sum_{i \in \mathcal{I}} v_i$ を上回ることではないため, 問題の大域的最適解はこの領域に必ず存在する.

n 番目に生成される近似問題 $[P(n)]$ は, 近似区間 $[\underline{x}_{ij}^{(n)}, \bar{x}_{ij}^{(n)}], \forall (i, j) \in \mathcal{E}$ で目的関数を線形近似した問題となる. 具体的には, 近似問題 $[P(n)]$ は次の線形計画問題に帰着する:

$$\begin{aligned}
 [P(n)] \\
 \underline{Z}(n) \equiv \min_{\mathbf{x}} \quad & G^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} G_{ij}^{(n)}(x_{ij}) \quad (30) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in \mathcal{I}} x_{ij} = \sum_{j \in \mathcal{I}} x_{ji} + v_i \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (31)
 \end{aligned}$$

ここで, $G_{ij}^{(n)}(x_{ij})$ は関数 $Z_{ij}(x_{ij})$ を区間 $[\underline{x}_{ij}^{(n)}, \bar{x}_{ij}^{(n)}]$ において線形近似した関数である:

$$\begin{aligned}
 G_{ij}^{(n)}(x_{ij}) \\
 \equiv \frac{Z_{ij}(\bar{x}_{ij}^{(n)}) - Z_{ij}(\underline{x}_{ij}^{(n)})}{\bar{x}_{ij}^{(n)} - \underline{x}_{ij}^{(n)}} x_{ij} + \frac{Z_{ij}(\underline{x}_{ij}^{(n)})\bar{x}_{ij}^{(n)} - Z_{ij}(\bar{x}_{ij}^{(n)})\underline{x}_{ij}^{(n)}}{\bar{x}_{ij}^{(n)} - \underline{x}_{ij}^{(n)}} \quad (32)
 \end{aligned}$$

すべての近似問題 $[P(n)]$ は, 線形近似する区間に関わらず, all-or-nothing 配分問題となる. したがって, 最短経路探索問題に帰着するので Dijkstra 法²⁹⁾ を用いて容易かつ高速に求解できる.

アルゴリズムは, それまでに生成された近似問題の中から 1 つを選択し, その近似区間をさらに 2 分割し, 新たに 2 つの近似問題を生成することで進行する. 反復回数 n において, 近似区間の分割対象となる近似問題 $[P(n^*)]$ は次のように選ぶ:

$$n^* = \arg \min_{m=0, \dots, 2n} \{ \underline{Z}(m) \} \quad (33)$$

ここで $2n$ は、反復回数 n までに生成された近似問題の最大インデックスである (i.e., 反復回数 n までに $2n + 1$ 個の近似問題が生成されている). 図-3 に、各反復における近似問題生成のイメージを示す. 図の例では、分割対象となる近似問題は $[P(0)]$, $[P(2)]$, $[P(1)]$ の順番に選ばれている.

基準式 (33) で選ばれた近似問題 $[P(n^*)]$ に対して、その近似区間 $[x_{ij}^{(n^*)}, \bar{x}_{ij}^{(n^*)}]$, $\forall (i, j) \in \mathcal{E}$ を次のように分割し、新たな近似問題 $[P(2n+1)]$ および $[P(2n+2)]$ を生成する. 具体的には、まず、以下の基準を満たすリンク (i^*, j^*) を選ぶ:

$$(i^*, j^*) \in \arg \max_{(i,j) \in \mathcal{E}} \left\{ G_{ij}^{(n^*)}(x_{ij}^{*(n^*)}) - Z_{ij}(x_{ij}^{*(n^*)}) \right\} \quad (34)$$

ここで $x_{ij}^{*(n^*)}$ は近似問題 $[P(n^*)]$ の最適解である. そして、リンク (i^*, j^*) 要素の近似区間に対して、次のような 2 分割を行い、近似問題 $[P(2n+1)]$ および $[P(2n+2)]$ を生成する:

$$[x_{i^*j^*}^{(2n+1)}, \bar{x}_{i^*j^*}^{(2n+1)}] = [x_{i^*j^*}^{(n^*)}, x_{i^*j^*}^{*(n^*)}] \quad (35)$$

$$[x_{i^*j^*}^{(2n+2)}, \bar{x}_{i^*j^*}^{(2n+2)}] = [x_{i^*j^*}^{*(n^*)}, \bar{x}_{i^*j^*}^{(n^*)}] \quad (36)$$

このように生成された近似問題 $[P(2n+1)]$ および $[P(2n+2)]$ の解を求め、再び基準式 (33) を用いて次の分割対象となる近似問題を選ぶことを繰り返す.

アルゴリズムの終了条件は、元問題 $[\min-P]$ の目的関数の凹性を利用して設定される¹⁶⁾. 具体的には、反復回数 n において、分割対象となる近似問題 $[P(n^*)]$ の最適目的関数値 $\underline{Z}(n^*)$ が、次の基準を満たす場合にアルゴリズムを終了する:

$$\underline{Z}(n^*) \geq \bar{Z}(2n) \quad (37)$$

ここで $\bar{Z}(2n)$ の定義は以下である.

$$\bar{Z}(2n) \equiv \min_{m=0, \dots, 2n} \{Z(x^{*(m)})\}. \quad (38)$$

これは、反復回数 n までに生成された近似問題 $\{[P(0)], \dots, [P(2n)]\}$ の最適解において、最小の元問題 $[\min-P]$ の目的関数値を意味している.

以上に述べた操作から構成されるアルゴリズムの全体像を図-4 にまとめる. なお、この分枝限定アルゴリズムは、有限回で反復で終了し、問題の大域的最適解を与える. このことを次の定理にまとめる:

定理 5.1 (Soland; 1974¹⁶⁾) アルゴリズムは有限ステップで終了し、大域的最適解を与える.

証明は、原著論文 Soland (1974)¹⁶⁾ を参照されたい.

Step 0 $n = 0$ とする. 上下限の初期解 $\underline{x}^{(0)}, \bar{x}^{(0)}$ を設定する. 近似問題 $P(0)$ を解き、 $\underline{Z}(0)$ および $\bar{Z}(0)$ を計算する.

Step 1 分割対象となる近似問題 $[P(n^*)]$, $n^* = \arg \min_{m=0, \dots, 2n} \{Z(m)\}$ を選ぶ.

Step 2 $\underline{Z}(n^*) \geq \bar{Z}(2n)$ ならば終了. そうでないなら Step 3 へ.

Step 3 近似問題 $P(n^*)$ を分割し、新たな近似問題 $P(2n+1)$ および $P(2n+2)$ を生成する. それらの近似問題を解き、 $\bar{Z}(2n+1), \bar{Z}(2n+2)$, $\underline{Z}(2n+1), \underline{Z}(2n+2)$ を計算する. $n = n + 1$ として、Step 1 へ戻る.

図-4: 分枝限定アルゴリズム

6. 数値計算

本章では、前章で示したアルゴリズムを用いて数値計算を行い、問題 $[\min-P]$ の大域的最適解の求解を通して、ゲームの確率安定な均衡状態として HS 構造を有する輸送ネットワークが形成されることを明らかにする.

(1) 実験条件

起点ノードの数は $I = 16$ と設定し、ノード間距離は $d = 1.0$ とした. 起点に存在する利用者の総数は全起点で同一であり $v_i = v = 10.0$ とした. また、IT リンクの運賃 (3) を定める交通費用パラメータは $t = 1.0$ とした.

IT リンクおよび MT リンクの運賃関数は次のように設定する.

$$c_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} td_{ij} & \text{if } (i, j) \in \mathcal{E}^{\text{IT}} \\ (\phi + \rho d_{ij}) \frac{1}{x_{ij} + 1} & \text{if } (i, j) \in \mathcal{E}^{\text{MT}} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}. \quad (39)$$

ここで、 $\phi > 0$ および $\rho > t$ はそれぞれ、輸送量および輸送距離に関する規模の経済の相対的な強度を反映するパラメータである. パラメータ ϕ の値が小さいほど輸送量に関する規模の経済の強度が大きいことを意味し、パラメータ ρ の値が小さいほど輸送距離に関する規模の経済の強度が大きいことと意味する. MT リンクの運賃関数は仮定 2.1, 仮定 2.2, 仮定 2.3, 仮定 5.1 を満足している.

表-1: パラメータの設定

	ϕ	ρ	ネットワークの特徴
ケース (a)	50.0	20.0	ハブなし
ケース (b)	50.0	10.0	1 階層ハブ
ケース (c)	10.0	10.0	2 階層ハブ
ケース (d)	10.0	5.0	3 階層ハブ
ケース (e)	50.0	2.5	1 階層ハブ
ケース (f)	25.0	2.5	2 階層ハブ

パラメータ ϕ および ρ を変化させた 6 つのケースについて、数値実験を行い、均衡輸送ネットワークの形状を分析した。各ケースにおけるパラメータ ϕ , ρ の設定を表-1 に示す。なお、表-1 には天下りの、各ケースにおいて形成される均衡輸送ネットワークの特徴も記載している。各ケースにおける輸送量および輸送距離に関する規模の経済の強度の関係を次に示す：

輸送量の規模の経済 : (a)=(b)=(e)<(f)<(c)=(d)

輸送距離の規模の経済 : (a)<(b)=(c)<(d)<(e)=(f)

(2) HS 構造の創発

各ケースにおける均衡輸送ネットワークの形状を図-5a から図-5f に示す。各図では、左端に唯一終点ノード 0 が位置し、起点ノードは終点に近い順に 1, 2, ..., 16 と配置されている。黒い矢印は IT リンクを表し、赤い矢印は MT リンクを表す。各ノード上部の棒グラフは、そのノードから流出する輸送量の合計を表す。

図-5a は、ケース (a) における均衡輸送ネットワークを示したものである。このケースでは、確率安定均衡状態においてハブが存在しない。すなわち、すべての起点の利用者は、確率安定均衡状態において IT リンクのみを利用して終点に移動する。これは、MT リンクの運賃に反映される規模の経済の強度が相対的に弱いため、MT リンクよりも IT リンクの方が運賃が低くなるためである。

図-5b は、ケース (b) における均衡輸送ネットワークを示したものである。ケース (b) はケース (a) と比較して、輸送距離に関する規模の経済の強度が強くなるように ϕ を設定している。このケースでは、起点ノード 5 から 16 までの利用者が、起点ノード 8 (ハブ) に集約され、その後終点ノード 0 に移動する HS 構造が形成されている。特に注目すべきは、起点 5, 6, 7 に位置する利用者の選択である。これらの利用者は、物理的に終点からは距離が離れる方向 (図で

は右側) にあるハブに一時的に移動してから終点に移動している。MT リンクの運賃に規模の経済が反映されており、それが利用者の選択行動に影響を与えていることを顕著に示す例である。

図-5c は、ケース (c) における均衡輸送ネットワークを示したものである。ケース (c) はケース (b) と比較して、輸送量に関する規模の経済の強度が強くなるように ϕ を設定している。このケースでは、ノード 5 とノード 10 にハブが形成されており、ノード 10 のハブを経由する利用者は、さらにノード 5 のハブを経由して終点ノード 0 に移動する。つまり、2 階層の HS 構造が形成されている。このケース (c) では、ケース (b) よりも輸送量に関する規模の経済の強度が強いため、より少ない輸送量でも MT リンクの運賃が IT リンクの運賃を下回ることができる。そのため、より多くの MT リンクが形成されたと考えられる。また、ケース (b) では IT リンクのみを利用していたノード 3, 4 の利用者が、ケース (c) ではノード 5 のハブを経由して MT リンクを利用し終点ノード 0 へ移動している。このことから MT リンクの優位性が高まったことが観察できる。

図-5d は、ケース (d) における均衡輸送ネットワークを示したものである。ケース (d) はケース (c) と比較して、さらに輸送距離に関する規模の経済の強度が強くなるように ϕ を設定している。このケースでは、起点ノード 5, 9, 13 にハブが形成されており、3 階層の HS 構造が成立している。

図-5e は、ケース (e) における均衡輸送ネットワークを示したものである。ケース (e) はケース (b) と比較して、輸送距離に関する規模の経済の強度が強くなるように ϕ を設定している。このケースでは、ハブの数はケース (b) と同様に 1 つであり、ハブの位置はノード 8 からノード 10 に変化している。これは、規模の経済の強度が強まったため、より遠い距離でも MT リンクの運賃が IT リンクの運賃を下回ることができるためと考えられる。また、図-5f は、ケース (f) における均衡輸送ネットワークを示したものであるが、ハブの数はケース (c) と同様に 2 つであるものの、その位置は異なっている。

これらの結果は、2 つの規模の経済の働き方によって、確率安定均衡状態として生じる均衡輸送ネットワークの形状 (i.e., ハブの数, 位置, 階層構造) が異なることを示すものである。

7. 結論

本研究では、様々な種類の輸送ネットワークで観察

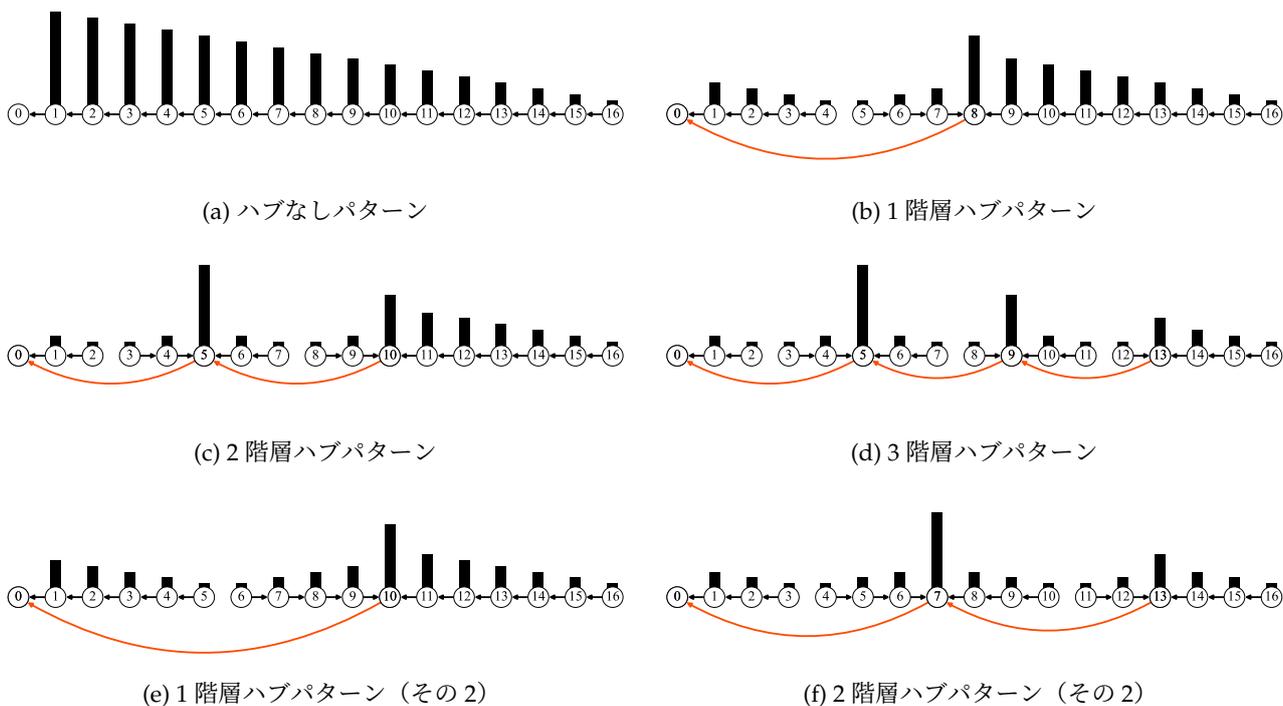


図-5: 各ケースにおける均衡輸送ネットワークの形状

される HS 構造の創発を再現しうる輸送ネットワーク形成ゲームを提案し、その均衡状態の性質を明らかにするための理論基盤を構築した。具体的には、まず、運賃に働く 2 種類の規模の経済：“輸送量に関する規模の経済”と“輸送距離に関する規模の経済”を考慮した上で、輸送サービス利用者（需要サイド）の選択行動に基づいて輸送ネットワークが形成される過程を、集団ゲーム（輸送ネットワーク形成ゲーム）として定式化した。そして、この輸送ネットワーク形成ゲームが、ポテンシャル・ゲームに属することを明らかにした。ポテンシャル・ゲームの確率安定解は、そのポテンシャル最大化問題の大域的最適解として得ることができるという事実¹⁵⁾に基づき、問題の大域的最適解を求めるための分枝限定アルゴリズムを示した。このアルゴリズムは、適切な変数変換により、ポテンシャル最大化問題が MCNFP と同じ数理構造を持つ問題に変換できるという性質を活用したものである。最後に、このアルゴリズムを用いた数値実験を行い、大域的最適解の求解を通して、輸送ネットワーク形成ゲームの確率安定な均衡状態として HS 構造を有する輸送ネットワークが形成しうることを明らかにした。

今後の研究課題として、主に 3 つの方向性が挙げられる。まず、第一に、より大規模な空間における解析を可能にするための高速アルゴリズムの開発である。本研究で用いた分枝限定アルゴリズムは大域的最適解への収束が保証されているものの計算効率

は悪い。対象とする問題自体は NP 困難な問題であるが、特殊な問題構造を活用すれば、最適解の特徴付けが可能であると考えられる。この最適解への先験的知識を活用すれば、実質的な未知変数の大幅な削減が期待できる。

第二に、需要サイドのモデルの拡張である。本研究のモデルでは、需要分布 $\{v_i\}_{i \in I}$ は外生的に扱っている。現実的には、輸送ネットワークの変化に伴い、需要分布も変化するはずである。需要分布も内生的に決定するモデルに拡張することで、輸送ネットワークが供給サイドと需要サイドの相互作用の結果として実現するメカニズムをより詳細に解析可能となり、より頑健な政策的含意を導けることが期待できる。

第三に、供給サイドのモデルの拡張である。2 章でも述べたように、本研究の輸送ネットワーク形成ゲームは需要主導型で展開され、供給サイドの選択行動をほとんど考慮していない。つまり、輸送サービス提供主体の利潤最大化行動はモデリングされておらず、ある種の強力な運賃規制のもとで運賃と輸送サービス提供パターンが決定するという状況となっている。輸送サービス提供主体の選択行動を陽に考慮することは、解析および数値計算に一定の困難性をもたらすと考えられるが、第二の課題と同じように、需給の相互作用に基づく輸送ネットワークの形成メカニズムを理解する上では、取り組むべき課題と言える。

これらの課題については、著者らの研究グループにおいて部分的に進行中である。進展については随時報告していきたい。

謝辞：本研究は、公益財団法人 大林財団 2023 年度研究助成、日本学術振興会・科学研究費補助金 (JP23K22880)、JST 創発的研究支援事業 (JP-MJFR215M) の支援を受けたものである。ここに記し、感謝を表します。

付録 A 記号の定義

本稿で用いる主な記号を表-2 に示す。

NOTES

- 注1) 確率安定性およびポテンシャル・ゲームのより広範かつ専門的な議論については、Sandholm (2010)¹⁵⁾、Alos-Ferrer(2010)¹⁸⁾ を参照されたい。また、ポテンシャル・ゲームの邦文解説としては、Keida (2015)¹⁷⁾ が丁寧である。空間経済学の枠組みにおいて、ポテンシャル・ゲームを用いた解析方法論をまとめた大澤 (2018)³⁰⁾ も参考にされたい。
- 注2) 定義3.2の他にも、主体数の極限をとったとき (large population limit) の定常分布の振る舞いを用いて確率安定性を議論する方法もある¹⁵⁾。これに対して、本研究で用いる定義は small noise limit の意味での確率安定性となる。
- 注3) 数理構造は全く同じであるが、目的関数の意味は異なることに注意されたい。一般的な MCNFP において、目的関数は、総費用 (i.e., リンクコストの総和) を表す。一方、本モデルにおける目的関数は、各リンクにおけるリンクコスト (運賃) の $[0, x_{ij}]$ における積分値を足し合わせた値であり総費用とは異なる。
- 注4) この分枝限定アルゴリズムは、Guisewite and Pardalos (1991)²²⁾ が指摘するように、問題規模 $|x|$ および線形近似区間の初期値 $[\underline{x}^{(0)}, \bar{x}^{(0)}]$ によっては、処理時間の最悪ケースが総当たり的な解パターン¹⁾の列挙アプローチよりも上回る可能性がある。本研究ではアルゴリズムの効率性よりも大域的最適解 (確率安定解) への収束保証を重視し、このアルゴリズムを採用している。
- 注5) 日本語の標準的用法とは異なるが、アルゴリズムの手順を明快に説明するために、ここでは、“0 番目”という概念を許容して説明する。

REFERENCES

- 1) Derudder, B., Devriendt, L. and Witlox, F.: Flying where you don't want to go: An empirical analysis of hubs in the global airline network, *Journal of economic and social geography*, Vol.98, No.3, pp.307–324, 2007.
- 2) Hu, Y. and Zhu, D.: Empirical analysis of the worldwide maritime transportation network, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol.388, No.10, pp.2061–2071, 2009.
- 3) Bowen, J. T.: A spatial analysis of FedEx and UPS: hubs, spokes, and network structure, *Journal of Transport Geography*, Vol.24, pp.419–431, 2012.
- 4) O'Kelly, M. E. and Miller, H. J.: The hub network design problem: A review and synthesis, *Journal of Transport Geography*, Vol.2, No.1, pp.31–40, 1994.
- 5) O'Kelly, M. E.: A geographer's analysis of hub-and-spoke networks, *Journal of Transport Geography*, Vol.6, No.3, pp.171–186, 1998.
- 6) Bryan, D. L. and O'Kelly, M. E.: Hub - and - spoke networks in air transportation: An analytical review, *Journal of regional science*, Vol.39, No.2, pp.275–295, 1999.
- 7) Pels, E.: Optimality of the hub-spoke system: A review of the literature, and directions for future research, *Transport Policy*, Vol.104, pp.A1–A10, 2021.
- 8) O'Kelly, M. E.: The location of interacting hub facilities, *Transportation Science*, Vol.20, No.2, pp.92–106, 1986.
- 9) Hendricks, K., Piccione, M. and Tan, G.: The economics of hubs: The case of monopoly, *The Review of economic studies*, Vol.62, No.1, pp.83–99, 1995.
- 10) Aykin, T.: Networking policies for Hub-and-Spoke systems with application to the air transportation system, *Transportation Science*, Vol.29, No.3, pp.201–221, 1995.
- 11) Gillen, D.: The evolution of networks with changes in industry structure and strategy: Connectivity, Hub-and-Spoke and alliances, *Research in Transportation Economics*, Vol.13, pp.49–73, 2005.
- 12) Sun, Z. and Zheng, J.: Finding potential hub locations for liner shipping, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.93, pp.750–761, 2016.
- 13) Campbell, J. F. and O'Kelly, M. E.: Twenty-Five years of hub location research, *Transportation Science*, Vol.46, No.2, pp.153–169, 2012.
- 14) Mori, T.: Increasing returns in transportation and the formation of hubs, *Journal of Economic Geography*, Vol.12, No.4, pp.877–897, 2011.
- 15) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
- 16) Soland, R. M.: Optimal facility location with concave costs, *Operations research*, Vol.22, No.2, pp.373–382, 1974.
- 17) 慶田收: 完全ポテンシャルゲームとしての正規形ゲームと混雑ゲームの性質, 熊本学園大学経済論集, Vol.21, pp.129–144, 2015. [Keita, O.: Properties of Normal Form Game and Congestion Game as Full Potential Game, *Journal of Economics, Kumamoto Gakuen University*, 21 (1-4), 231-260, 2015.]
- 18) Alós-Ferrer, C. and Netzer, N.: The logit-response dynamics, *Games and economic behavior*, Vol.68, No.2, pp.413–427, 2010.
- 19) Zangwill, W. I.: Minimum concave cost flows in certain

表-2: 記号の定義

モデル		
I	起点ノード集合	
d	ノード間距離	
d_{ij}	ノード $i-j$ 間の距離	
\mathcal{E}	リンク集合	定義: 式 (1)
\mathcal{E}^{IT}	IT リンク集合	定義: 式 (2)
\mathcal{E}^{MT}	MT リンク集合	定義: 式 (4)
v_i	起点ノード i の利用者数	
t	IT リンクの運賃に関する交通費用パラメータ	
x_{ij}	リンク (i, j) の輸送量	
$c_{ij}(x_{ij})$	リンク (i, j) のリンク運賃関数	定義: 式 (8)
\mathcal{K}_i	起点ノード i から終点までの経路集合	
y_i^k	経路 $k \in \mathcal{K}_i$ の輸送量	
δ_{ij}^k	経路 k がリンク (i, j) を含む場合は 1, そうでない場合は 0 となる二値変数	
$F_i^k(\mathbf{y})$	集団の状態が \mathbf{y} であるときの, 経路 $k \in \mathcal{K}_i$ 利用者の利得	定義: 式 (10)
アルゴリズム		
$Z(\mathbf{x})$	問題 [min-P] の目的関数	定義: 式 (24)
$Z_{ij}(x_{ij})$	関数 $Z(\mathbf{x})$ の ij 要素	定義: 式 (26)
$[\bar{x}_{ij}^{(n)}, \underline{x}_{ij}^{(n)}]$	近似問題 $[P(n)]$ において線形近似する区間	
$G^{(n)}(\mathbf{x})$	関数 $Z(\mathbf{x})$ を区分線形近似した関数	定義: 式 (30)
$G_{ij}^{(n)}(x_{ij})$	関数 $G^{(n)}(\mathbf{x})$ の ij 要素	定義: 式 (32)
$\underline{Z}(n)$	近似問題 $[P(n)]$ の最適目的関数値	
$\bar{Z}(2n)$	反復回数 n までに生成された近似問題の最適解において, 最小の元問題 [min-P] の目的関数値	定義: 式 (38)
数値計算		
ν	各起点ノードに居住する利用者数	
ϕ	輸送量に関する規模の経済の強度を反映するパラメータ	
ρ	輸送距離に関する規模の経済の強度を反映するパラメータ	

networks, *Management science*, Vol.14, No.7, pp.429–450, 1968.

- 20) Gallo, G. and Sodini, C.: Concave cost minimization on networks, *European journal of operational research*, Vol.3, No.3, pp.239–249, 1979.
- 21) Gallo, G., Sandi, C. and Sodini, C.: An algorithm for the min concave cost flow problem, *European journal of operational research*, Vol.4, No.4, pp.248–255, 1980.
- 22) Guisewite, G. M. and Pardalos, P. M.: Global search algorithms for minimum concave-cost network flow problems, *Journal of Global Optimization*, Vol.1, No.4, pp.309–330, 1991.
- 23) Guisewite, G. M. and Pardalos, P. M.: Minimum concave-cost network flow problems: Applications, complexity, and algorithms, *Annals of Operations Research*, Vol.25, No.1, pp.75–99, 1990.
- 24) Monteiro, M. S. R., Fontes, D. and Fontes, F.: Solving concave network flow problems, 2012.
- 25) Monteiro, M. S. R., Fontes, D. B. M. M. and Fontes, F. A. C. C.: Concave minimum cost network flow problems solved with a colony of ants, *Journal of Heuristics*, Vol.19, No.1, pp.1–33, 2013.
- 26) Fontes, D. B. M. M., Hadjiconstantinou, E. and Christofides, N.: A dynamic programming approach for solving single-source uncapacitated concave minimum cost network flow problems, *European journal of operational research*, Vol.174, No.2, pp.1205–1219, 2006.
- 27) Fontes, D. B. M. M., Hadjiconstantinou, E. and Christofides, N.: A branch-and-bound algorithm for concave network flow problems, *Journal of Global Optimization*, Vol.34, No.1, pp.127–155, 2006.
- 28) Fontes, D. B. M. M. and Gonçalves, J. F.: Heuristic solutions for general concave minimum cost network flow problems, *Networks. An International Journal*, Vol.50, No.1, pp.67–76, 2007.
- 29) Dijkstra: A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische Mathematik*, 1959.
- 30) 大澤実: 集積経済モデルの数理解析とその周辺, 土木学

DEMAND-DRIVEN FORMATION OF TRANSPORT NETWORKS: EMERGENCE OF HUB AND SPOKE STRUCTURE

Takara Sakai and Yuki Takayama

Many transportation networks, including rail, sea, and air, have a characteristic structure known as hub-and-spoke (HS). Most previous studies have explained the formation of HS structure through the supply-side behavior without carefully considering effects of demand-side behavior on network formations. This study reconsiders Mori (2012) hub formation model from a game-theoretic perspective in discrete space and extends it to a transport network formation game. This game can describe the emergence of the HS structure from the demand-side behavior. In this game, agents choose travel links (transport services) while considering the link cost, which benefits from economies of scale. By agents' behavior, a transportation network is formed as the equilibrium state of the game. We analyze the properties of the equilibrium state and clarify the emergence mechanism and stability of the HS structure in transport networks. The keys of our analysis are that the proposed game is a potential game and that the corresponding potential maximization problem has the structure of a Minimum Concave-cost Network Flow Problem (MCNFP). Based on the facts, we introduce a global optimization algorithm designed for MCNFP and derive the stochastic stable state as the global optimal solution to the potential maximization problem. Our numerical result demonstrates that the transport network with the HS structure can be formed as a stochastic stable state and that the location and spacing of hubs vary depending on how economies of scale work.