

宇宙はブラックホールであるという仮説についての一考察

～ニュートン力学と特殊相対性理論からのアプローチ～

山脇正人*

キーワード：ブラックホール、シュワルツシルト半径、事象の地平線、ニュートン力学、特殊相対性理論、赤方偏移、ビッグバン

概要

宇宙論は現代においても様々なモデルが提案されているが、今回「宇宙は一つの巨大なブラックホールである」と解釈する一説に対して、ニュートン力学と特殊相対性理論を用いて議論した。事象の地平線が観測点のポテンシャルによってシフトすると考えることでブラックホール宇宙モデルが解釈され、そこから観測可能な宇宙の質量は 1.03×10^{53} kg と見積もられた。また今回の議論から、遠方の天体の赤方偏移はドップラーシフトによるものではなく、ブラックホール近傍における重力赤方偏移と等価なものであり、なおかつ宇宙のインフレーションは必ずしも天体同士が遠ざかる（空間が膨張する）ものではなく、シュワルツシルト半径が拡大している、という解釈を得た。

1. 緒言

近年、ブラックホールの存在を示す観測結果が発表¹されたことで、宇宙物理学への関心が高まっている。また、2022年にはジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡の運用が開始²されており、いま宇宙物理学は黎明期といえる。現代宇宙論ではビッグバンモデル³が最も支持されているといえるが、一方で興味深いモデルも提案されている。その一説⁴によれば、そもそも『我々はブラックホールの中に住んでいる？』という解釈が導かれ、『我々から138億光年以上離れた場所は観測できず、宇宙の地平線（私たちに光が届くギリギリの場所）の先にあります。その先には何も無いのではなく、観測できないだけで我々と同じような宇宙がずっと広がっているはずです。逆に言えば、138億光年以上離れた観測者にとっては、我々は見えません。まさにこれはブラックホールと同じ状況です。』⁵という解説がされている。そこで今回、この仮説（以下、ブラックホール宇宙モデルと称す）に対する考察を行った。今回の議論では、シュワルツシルト・ブラックホール⁶（質量のみ値を持ち、角運動量と電荷を0とする最も単純なモデルのブラックホール）を用いた。

2. ブラックホール

近年、銀河M87近傍から放出される光に、ブラックホールの存在を示す証拠となる赤方偏移が観測されたことが発表¹されている。ブラックホールは図1のように光すら脱出できなくなる重力場を形成すると一般相対性理論から導かれるが、その条件は①式のようになる。

* 国立研究開発法人産業技術総合研究所分析計測標準研究部門

e-mail: yamawaki.masato@aist.go.jp

$$r_s = \frac{2GM_{r_s}}{c^2} \quad \text{①}$$

(r_s : シュワルツシルト半径⁵、 G : 万有引力定数、 M_{r_s} : ブラックホールの質量、 c : 光速)

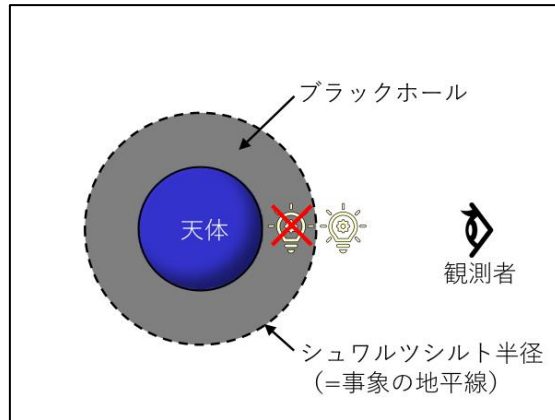


図1 ブラックホール

ある天体の半径がシュワルツシルト半径 r_s 以下になるとき、その天体はブラックホールとなる。ブラックホールは超高密度な天体であるとイメージされることが多い。しかし、①式においてブラックホールの質量 M_{r_s} と半径 r_s が比例関係にあることから、例えば質量が2倍になると体積は8倍 (M_{r_s} は r_s の3乗に比例) となり、その密度は1/4倍となる。つまり、ブラックホールは「質量」が大きくなればなるほど、その「密度」は小さくなっていくのである。よって、「超巨大」で「低密度」なブラックホールも存在しうることになる。そこで、このようなブラックホールを「超巨大低密度ブラックホール」(図2)と呼ぶことにする。

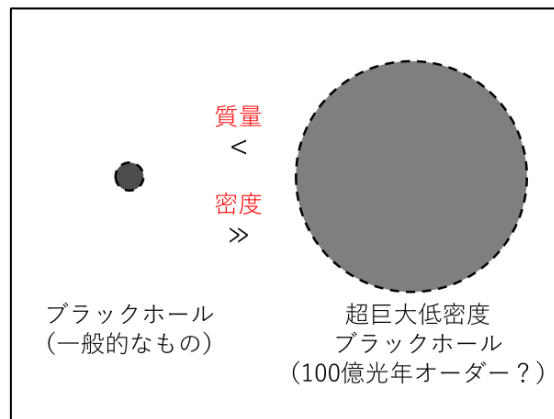


図2 超巨大低密度ブラックホール

3. ブラックホール宇宙モデル

ブラックホール宇宙モデルを解釈すると、図3のようなイメージとなる。この仮説に対してシュワルツシルト・ブラックホールを用いて議論した。

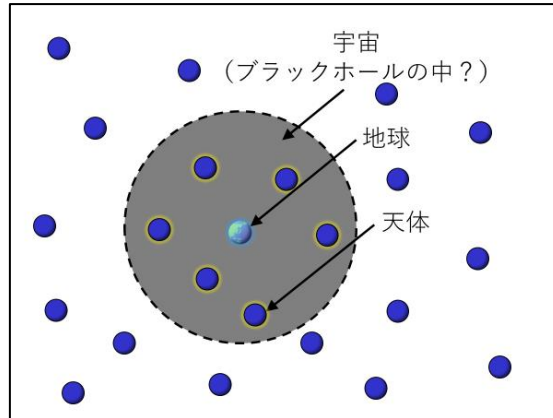


図3 ブラックホール宇宙モデルのイメージ

まず、宇宙を質量 M で半径 R の集合体と考え、①式からシュワルツシルト半径 r_s を求める。観測可能な宇宙の全質量 M は 1×10^{53} kg (平均的な天体の質量 2×10^{30} kg、天体数 5×10^{22} 個に相当)⁷、万有引力定数 G は 6.67×10^{-11} m³ kg⁻¹ s⁻²であることから、シュワルツシルト半径 r_s は 1.48×10^{26} mとなる。一方で、観測可能な宇宙の大きさが、138 億光年 (1 光年は約 1×10^{16} m) とすると 1.38×10^{26} mであり、シュワルツシルト半径 r_s と観測可能な宇宙の半径 R がほぼ一致する。よって、『我々はブラックホールの中に住んでいる?』とするブラックホール宇宙モデルは、まんざらでもなく思える。

4. 超巨大低密度ブラックホールの存在

ところで、我々の住む宇宙にはブラックホールなどのダークマター・ダークエネルギー⁸が存在し、その質量は観測可能な宇宙の全質量 M の20倍以上とされる。宇宙の全質量を観測可能な宇宙の全質量 M の20倍であるならばシュワルツシルト半径 r_s も20倍であり、観測可能な宇宙の大きさとシュワルツシルト半径は当然一致しないことになるが、一方で次のような矛盾が生じる。平均的な密度を ρ とするブラックホールの全質量 M_{r_s} は

$$M_{r_s} = \frac{4\pi r_s^3}{3} \rho \quad (2)$$

(ρ : ブラックホールの平均的な密度)

である。ここで①式に②式を代入し、 r_s に対して整理すると

$$r_s = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}} \quad (3)$$

となる。つまり、 ρ が20倍であるならば③式から r_s は約0.22倍となり、半径が約33億光年の「超巨大低密度ブラックホール」が存在する条件を満たす。また宇宙の密度が均一であるならば、この「超巨大低密度ブラックホール」は我々の宇宙のどこにでも存在しうることになる。よって、「超巨大低密度ブラックホールが作り上げる事象の地平線」が我々の住む宇宙のあちらこちらで観測されなければならない。

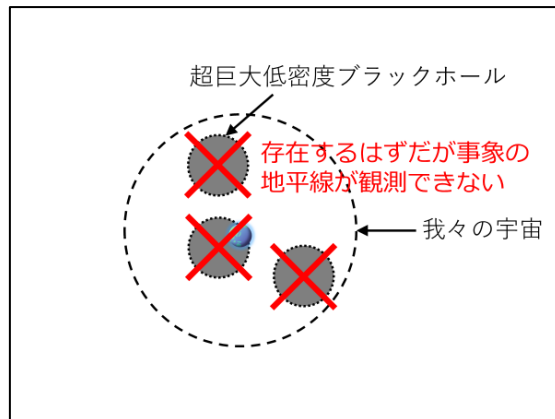


図4 存在するはずの「超巨大低密度ブラックホール」はどこへいったのか？

しかしながら、半径約 33 億光年もの超巨大な事象の地平線がどこにも観測されないことから図 4 のような『存在するはずの「超巨大低密度ブラックホール」はどこへいったのか？』という疑問が生まれる。そこでこの疑問を解決すべく、図 5 のように「事象の地平線は観測点によってシフトする」と予測して考察をおこなった。

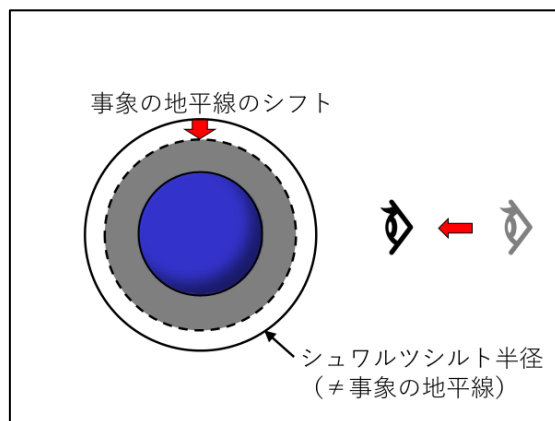


図5 事象の地平線が観測点によってシフトする (シュワルツシルト半径≠事象の地平線) という予測

5. 事象の地平線のシフト

「事象の地平線のシフト」について議論する上で、「ニュートン力学的考察」と「特殊相対性理論的考察」をおこなった。

5.1 ニュートン力学的考察

本考察の前に、まず天体の重力ポテンシャルについて整理しよう。

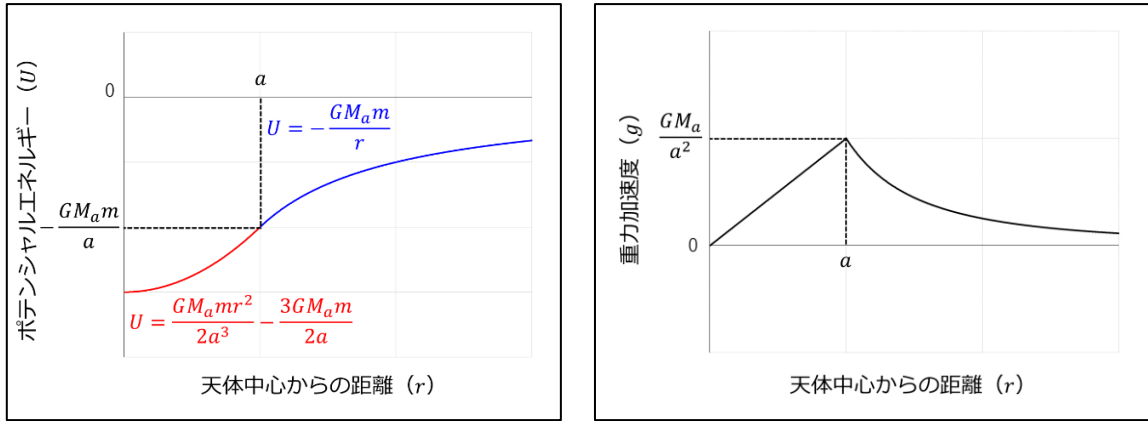


図6 天体のポテンシャルエネルギー（左）と重力加速度（右）

ある天体の半径を a 、質量を M_a 、ある粒子（例えば電子）の質量を m とすると、天体の外側（ $r \geq a$ ）のポテンシャルエネルギー U （図6（左）の青線）は

$$U = -\frac{GM_a m}{r} \quad (4)$$

であり、天体の内側（ $r \leq a$ ）のポテンシャルエネルギー U （図6（左）の赤線）は

$$U = \frac{GM_a m r^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a} \quad (5)$$

である。参考までに、重力加速度は図6（右）のようになり $r = a$ が最大値である。

ちなみに、④式において $-U = \frac{1}{2}mc^2$ （運動エネルギーが持ちうる最大値）を代入すると

$$r = \frac{2GM_a}{c^2} \quad (6)$$

となり、一般相対性理論から得られる①式と等価な解が得られることは良く知られる⁵。ただし、 c^2 は真空中の光速であるため、もしも「天体内部について議論」するならば①式は

$$r_s = \frac{2GM_{r_s}}{(nc_n)^2} \leftrightarrow c_n^2 = \frac{2GM_{r_s}}{n^2 r_s} \quad (7)$$

（ n ：相対屈折率、 c_n ：媒質中の光速）

として考える必要がある。

さて、天体中心からの距離 r を観測点とする事象の地平線のシフト Δr_s について考えるが、ここでポテンシャルエネルギー U を用いたニュートン力学的考察をおこなう。シフトした事象の地平線のポテンシャルエネルギー $U(r_s - \Delta r_s)$ と観測点 r のポテンシャルエネルギー $U(r)$ 差が、常に $\frac{1}{2}mc_n^2$ （運動エネルギーが持ちうる最大値）を満たすと考える（図7）。

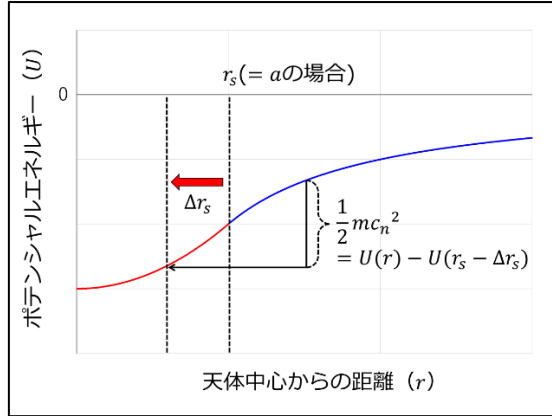


図7 観測点によってシフトする事象の地平線の関係

まず、 $r_s - \Delta r_s \geq a$ の場合（事象の地平線が天体の外側に位置）を考えると

$$\frac{1}{2}mc^2 = -\frac{GM_{r_s}m}{r} - \left(-\frac{GM_{r_s}m}{(r_s - \Delta r_s)}\right)$$

$$\rightarrow r_s - \Delta r_s = \frac{2GM_{r_s}r}{rc^2 + 2GM_{r_s}} \quad (8)$$

となる。⑧式は $r \rightarrow \infty$ のときに $\Delta r_s \rightarrow 0$ となることから、観測点 r が天体から遠い場合において、⑧式と①式は漸近する（シュワルツシルト半径＝事象の地平線）。

次に、 $r_s - \Delta r_s \leq a$ の場合（事象の地平線が天体の内側に位置）を考えると

$$\frac{1}{2}mc_n^2 = -\frac{GM_a m}{r} - \left(\frac{GM_a m (r_s - \Delta r_s)^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a}\right)$$

$$\rightarrow c_n^2 = -\frac{2GM_a}{r} - \left(\frac{GM_a (r_s - \Delta r_s)^2}{a^3} - \frac{3GM_a}{a}\right)$$

$$\rightarrow c_n^2 = \frac{3GM_a}{a} - \frac{2GM_a}{r} - \frac{GM_a (r_s - \Delta r_s)^2}{a^3} \quad (9)$$

となる。ただし、この c_n は天体の内側と外側で異なることから、簡略化して考えるために $a = r_s$ とする。このとき $M_a = M_{r_s}$ であることから⑨式は

$$c_n^2 = \frac{3GM_{r_s}}{r_s} - \frac{2GM_{r_s}}{r} - \frac{GM_{r_s} (r_s - \Delta r_s)^2}{r_s^3} \quad (10)$$

となる。仮に⑦式 of 天体の相対屈折率を $n = \sqrt{2}$ として、⑩式に $c_n^2 = GM_{r_s}/r_s$ を代入すると、 $r \rightarrow r_s (= a)$ のときに $\Delta r_s \rightarrow r_s$ となり、図8のように事象の地平線は一点に収束する（ $r_s - \Delta r_s = 0$ ）。つまり、事象の地平線は近づけば遠く「逃げ水」のようなものと解釈される。ちなみに、一般相対性理論で取り扱う図6（右）の重力加速度 g は、 $r = a$ で最大値となるために事象の地平線のシフトを考慮しづらい。

この現象を水風船に例えると、風船に水を入れ続けたとき、一般相対性理論ではある時点で風船表面に事象の地平線が「突然」現れることになるのに対し、本解釈では事象の地平線がまず「中心部」に現れ、給水とともに徐々に拡大していくということになる。

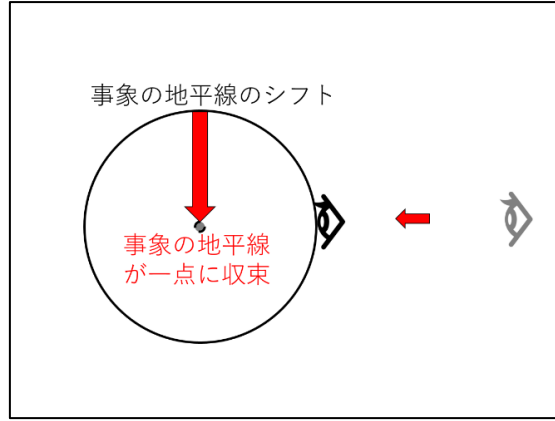


図8 観測点がシュワルツシルト半径に近づくと事象の地平線が一点に収束するという解釈

ここで図4の疑問となる『存在するはずの「超巨大低密度ブラックホール」はどこへいったのか?』について考えるため、上記「天体」を半径 a の「集合体」と読み替え、なおかつ「観測点が集合体の内側に位置 ($r \leq a$)」する場合を考えると

$$\frac{1}{2}mc_n^2 = \left(\frac{GM_a m r^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a} \right) - \left(\frac{GM_a m (r_s - \Delta r_s)^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a} \right)$$

$$\rightarrow c_n^2 = \frac{GM_a}{a^3} (r^2 - (r_s - \Delta r_s)^2) \quad (11)$$

となる。ここで、比例係数 k とする $a = kr_s$ のとき、 $M_a = k^3 M_{r_s}$ であることから⑪式は

$$c_n^2 = \frac{Gk^3 M_{r_s}}{(kr_s)^3} (r^2 - (r_s - \Delta r_s)^2) = \frac{GM_{r_s}}{r_s^3} (r^2 - (r_s - \Delta r_s)^2) \quad (12)$$

(k : 比例係数)

となり、⑫式は k に依存しないことから $k \gg 1$ の場合（「集合体の内側」）についても⑪式と同様に議論することができる。また、「 $a \gg r_s$ のとき、事象の地平線から見た観測者は事象の地平線にいる」とも解釈できる。

ここで、図4において「観測者の目の前に超巨大低密度ブラックホールが存在する場合 ($r = r_s$)」を考える。⑫式に⑦式 $c_n^2 = 2GM_{r_s}/n^2 r_s$ を代入すると

$$\frac{2GM_{r_s}}{n^2 r_s} = \frac{GM_{r_s}}{r_s^3} (r_s^2 - (r_s - \Delta r_s)^2)$$

$$\rightarrow \frac{(r_s - \Delta r_s)^2}{r_s^2} = 1 - \frac{2}{n^2} \quad (13)$$

となり、⑬式から $|n| \geq \sqrt{2}$ でなければならないことがわかる。仮に、「低密度化」したブラックホールが、最小の相対屈折率 $n = \sqrt{2}$ であるとするならば、 $\Delta r_s = r_s$ となる。これは、半径 r_s の集合体表面と観測者が同じ位置にあったとしても、少なくとも観測者から半径 r_s 以内の場所に事象の地平線が観測されることはないことを意味する。よって、図9のように『存在するはずの「超巨大低密度ブラックホール」は観測者の目の前 (4π 方向) に存在するが、事象の地平線がシフトすることで宇宙の果てとして観測される』（つまり、観測者から半径 r_s の地点が事象の地平線となる）と解釈することができる。もし、事象の地平線のシフト Δr_s を考慮しなければ、『観測者の目

の前に事象の地平線が観測される』ことになってしまう。

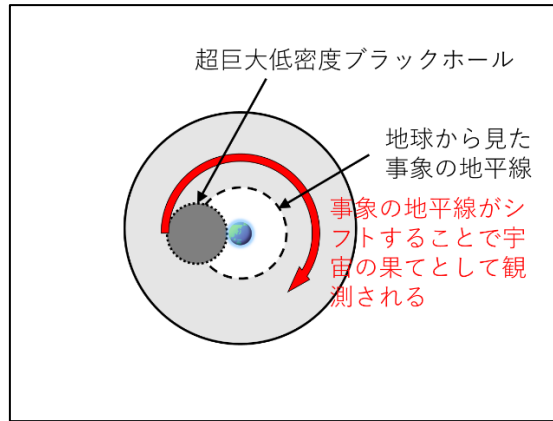


図9 超巨大低密度ブラックホールの事象の地平線がシフトすることで宇宙の果てとして観測されるという解釈

5.2 特殊相対性理論的考察

まず本考察の前に、ブラックホールがもたらす時間の遅れについて整理しよう。図10のように赤方偏移は天体の移動や重力加速度により生じ、同時に時間の遅れも生じる。一般相対性理論によれば強い重力場によって時間の遅れや赤方偏移が生じ、事象の地平線上では時間が停止していることになる。

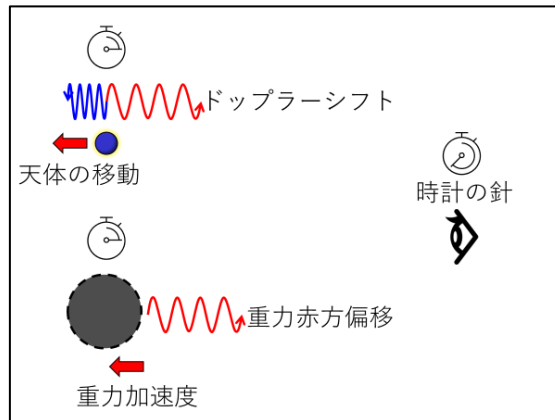


図10 時間の遅れと赤方偏移

時間に対する特殊相対性理論⁹の式は

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (14)$$

(t : 静止系の時間、 t' : 慣性系の相対時間、 v : 慣性系の相対速度、 c : 光速)
 であるが、この⑭式は次の⑮式のように変換できる。

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{(\pm mv^2/2)}{(\pm mc_n^2/2)}}} \quad (15)$$

ここで、「等価原理」を用いて運動エネルギーとポテンシャルエネルギー U の関係について議論する。

まず、観測点为天体 a の外側 ($r \geq a$) にあるとき、ポテンシャルエネルギー U と等価な運動エネルギーの関係は

$$U(r) = -\frac{GM_a m}{r} = -\frac{1}{2} m v_r^2 \quad (16)$$

$$U(r_s) = -\frac{GM_a m}{r_s} = -\frac{1}{2} m v_{r_s}^2 = -\frac{1}{2} m c^2 \quad (17)$$

(v_r : 観測点 r の等価速度、 v_{r_s} : 観測点 r_s の等価速度)

となり、⑬式と⑭式を⑮式に代入すると

$$dt = \frac{dt_r}{\sqrt{1 - \left(\frac{GM_a}{r}\right) / \left(\frac{GM_a}{r_s}\right)}} = \frac{dt_r}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \quad (18)$$

(t : 基準点($r \rightarrow \infty$)の時間、 t_r : 観測点 r の相対時間)

となる。つまり、観測点 r が r_s に近づくにしたがって時間の遅れが生じ、 r_s では時間が停止することになる。ちなみに、⑱式はシュワルツシルト解¹⁰としても知られている。

次に、観測点が集合体の内側 ($r \ll a$) にあるとき、観測点を基準とするポテンシャルエネルギー U と等価な運動エネルギーの関係は

$$U(r) = \frac{GM_r m r^2}{2r_s^3} = \frac{1}{2} m v_r^2 \quad (19)$$

$$U(r_s) = \frac{GM_r m r_s^2}{2r_s^3} = \frac{GM_r m}{2r_s} = \frac{1}{2} m v_{r_s}^2 = \frac{1}{2} m c_n^2 \quad (20)$$

(v_r : 観測点から距離 r の等価速度、 v_{r_s} : 観測点から距離 r_s の等価速度)

となり、⑲式と⑳式を⑮式に代入すると

$$dt = \frac{dt_r}{\sqrt{1 - \left(\frac{GM_r m r^2}{2r_s^3}\right) / \left(\frac{GM_r m}{2r_s}\right)}} = \frac{dt_r}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_s^2}}} \quad (21)$$

(t : 観測点 (基準点) の時間、 t_r : 観測点から距離 r の相対時間)

となる。つまり、観測者からの距離 r が r_s に近づく (つまり、観測者から遠ざかる) にしたがって時間の遅れが生じることになる。ここで、⑲式と㉑式を比較すると

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{r^2}{r_s^2} \rightarrow v = \frac{r}{r_s} c \quad (22)$$

の関係が得られる。これはハッブルの法則¹¹と等価であることから、図11のような解釈ができる。

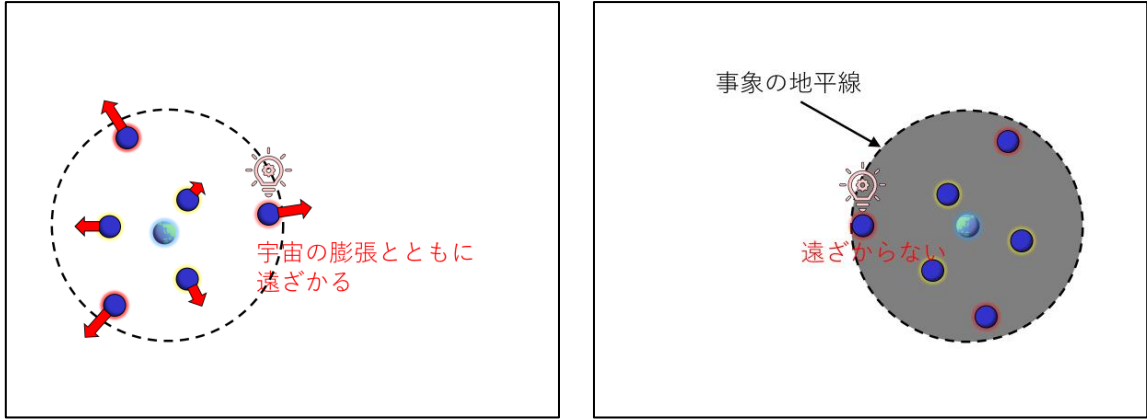


図1.1 ビッグバンモデル (左) とブラックホール宇宙モデル (右)

それでは、②式を用いてニュートン力学と特殊相対性理論を比較してみよう。ここでは、「エネルギー保存の法則」を前提として、「質量を基準」に議論する。

まずは、全質量 M_{r_s} 、半径 r_s 、平均的な密度 ρ の「ブラックホール宇宙」について議論する。ニュートン力学的には

$$M_{r_s} = \int_0^{r_s} 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3} \pi \rho r_s^3 \quad (23)$$

である。では、質量に対する特殊相対性理論の式は

$$M' = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (24)$$

(M : 静止系の質量、 M' : 慣性系の相対質量、 v : 慣性系の相対速度、 c : 光速) であるが、質量 M と密度 ρ は比例関係 ($M \propto \rho$) にあることから

$$M_r = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} \rho_r = \frac{\frac{4\pi r^3}{3} \rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \rho_r = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (25)$$

(M : 静止系の質量、 M_r : 慣性系の相対質量、 ρ : 静止系の密度、 ρ_r : 慣性系の相対密度) となる。ここで、②5式を②1式と同じ手順で変換すると

$$\rho_r = \frac{\rho}{\sqrt{1 - r^2/r_s^2}} \quad (26)$$

(ρ : 観測点 (基準点) の密度、 ρ_r : 観測点から距離 r の相対密度) が得られる。ここで、特殊相対性理論的な空間と比較するために r' を用いると全質量 $M_{r_s'}$ は

$$M_{r_s'} = \int_0^{r_s'} 4\pi r'^2 \rho_r dr' = \int_0^{r_s'} \frac{4\pi r'^2 \rho}{\sqrt{1 - r'^2/r_s'^2}} dr' \quad (27)$$

となる。そして、②7式を計算¹²すると

$$\int_0^{r_s'} \frac{4\pi r'^2 \rho}{\sqrt{1 - r'^2/r_s'^2}} dr' = \left[2\pi r_s' \rho \left(-r' \sqrt{r_s'^2 - r'^2} + r_s'^2 \sin^{-1} \frac{r'}{r_s'} \right) \right]_0^{r_s'} = \pi^2 \rho r_s'^3 \quad (28)$$

となる。よって、 $M_{r_s} = M_{r_s'}$ のとき

$$\frac{4}{3}\pi\rho r_s^3 = \pi^2\rho r_s'^3 \rightarrow r_s' = \sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}}r_s \cong 0.75r_s \quad (29)$$

となる。つまり、特殊相対性理論を考慮した観測上の宇宙（≒観測可能な宇宙）の半径はニュートン力学の約 0.75 倍に見積もる必要がある。

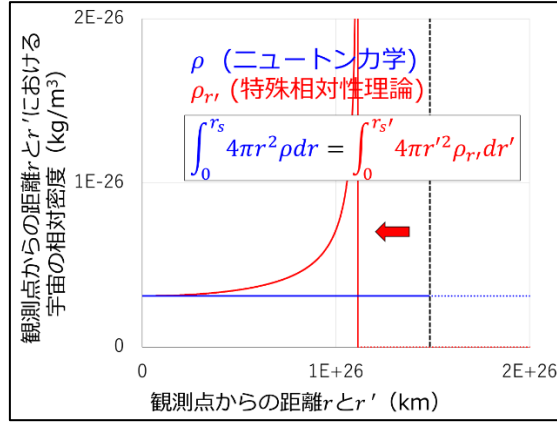


図 1 2 ニュートン力学的な宇宙の半径と特殊相対性理論を考慮した観測上の宇宙の半径

また、図 1 2 の関係性について、長さに対する特殊相対性理論の式から等価原理で得た変換式

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow L = \frac{L_r}{\sqrt{1 - r^2/r_s^2}} \quad (30)$$

(L : 静止系 (観測点) の長さ、 L' : 慣性系の相対長さ、 L_r : 観測点から距離 r の相対長さ) を用いて考察すると、宇宙の果て近傍では長さが収縮しており、観測点に近づくと長さが伸びることになる。長さ L と光の波長 λ は比例関係 ($L \propto \lambda$) にあることから、つまりは遠方の天体が赤方偏移することを意味する。これは重力赤方偏移と等価であり、図 11 (右) のブラックホール宇宙モデルでは遠方の天体に重力赤方偏移と等価なものが生じていると解釈される。

ここで、相対屈折率について議論する。長さ L と光の相対屈折率 n は反比例の関係 ($L \propto 1/n$) にあることから

$$n' = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (31)$$

(n : 静止系の相対屈折率、 n' : 慣性系の相対屈折率)

として読み替えることもできる。これまで静止系 (運動エネルギーが 0) について議論してきたが、例えば観測点が等速運動している場合 (慣性系) について議論してみよう。⑩式において観測点が速度 v で天体周囲を等速円運動 (「渦巻銀河¹³」をモデル) するとき

$$c_n^2 = \left(\frac{c}{n'}\right)^2 = \frac{3GM_{r_s}}{r_s} - \frac{2GM_{r_s}}{r} - \frac{GM_{r_s}(r_s - \Delta r_s)^2}{r_s^3} + \frac{1}{2}mv^2 / \frac{m}{2} \quad (32)$$

(v : 等速円運動する観測点の速度)

となる。ここで等速円運動の関係式は

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_{r_s} m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{GM_{r_s}}{r} \quad (33)$$

であるから、 $r \rightarrow r_s$ のときは $v^2 = c^2/2$ であり、③①式より $n' = n/\sqrt{2}$ となる。仮に $n = \sqrt{2}$ とすると $n' = 1$ となり、事象の地平線のシフトは③②式（慣性系）と⑩⑩式（静止系）で等しくなる（ $\Delta r_s = r_s$ ）。

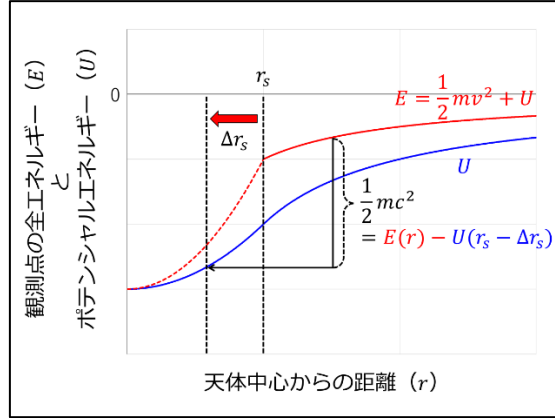


図 1.3 運動エネルギーを考慮した事象の地平線のシフトの一例

また、③①式を⑩⑧式と同じ手順で変換すると

$$n_{r \geq r_s} = \frac{n}{\sqrt{1 - r_s/r}} \quad (34)$$

(n : 基準点($r \rightarrow \infty$)の相対屈折率、 $n_{r \geq r_s}$: 観測点 $r (\geq r_s)$ の相対屈折率)

となり、観測点 $r \rightarrow r_s$ において光速 c_n は0となる。ブラックホール周辺の物質からは強い発光が観察される¹⁴ことが知られているが、③④式よりこの発光は荷電粒子が光速を超えた時に発せられるチェレンコフ光¹⁵と等価なものであると解釈される。

5.3 ニュートン力学的と特殊相対性理論の一体化

そもそも相対屈折率 n とは無次元であり、事象の地平線のシフトを考慮するために必要なパラメータに過ぎない。万有引力定数 G は相対屈折率 n の自乗に反比例（ $G \propto 1/n^2$ ）にあることから、③①式と③④式の相対屈折率 n は万有引力定数 G と一体として取扱うこともできる。

$$G = \frac{G_{r \geq r_s}}{1 - r_s/r} \quad (35)$$

(G : 基準点($r \rightarrow \infty$)の万有引力定数、 $G_{r \geq r_s}$: 観測点 $r (\geq r_s)$ の相対万有引力定数)

そこで、重力加速度 α は

$$\alpha_{r \geq r_s} = \frac{G_{r \geq r_s} M_a}{r^2} = (1 - r_s/r)\alpha \quad (36)$$

(α : 基準点($r \rightarrow \infty$)の重力加速度、 $\alpha_{r \geq r_s}$: 観測点 $r (\geq r_s)$ の相対重力加速度)

と考えることができる。観測点 $r \rightarrow r_s$ において相対重力加速度が0となる。③④式と③⑥式からブラックホールに引き寄せられた物体は、初期に強く発光し、その後 r_s に近づくにしたがって静止することになる（ブラックホールの一部となる）。

さらに、ポテンシャルエネルギー U は

$$U_{r \geq r_s} = \int_r^\infty -\alpha_{r \geq r_s} m dr = \int_r^\infty -GM_a m \frac{r - r_s}{r^3} dr = \left[-GM_a m \left(\frac{r_s}{2r^2} - \frac{1}{r} \right) \right]_r^\infty = \left(1 - \frac{r_s}{2r} \right) U \quad (37)$$

(U : 基準点($r \rightarrow \infty$)のポテンシャルエネルギー、 $U_{r \geq r_s}$: 特殊相対性理論的な空間における地点
 $r (\geq r_s)$ のポテンシャルエネルギー)

と導かれる。ちなみに、③⑦式は $r = r_s$ のときに $U_{r \geq r_s} = U/2$ であることから

$$-\frac{1}{2} mc_n^2 = U_{r \geq r_s}(r_s) = \frac{1}{2} U(r_s) \rightarrow mc_n^2 = U(r_s) \quad (38)$$

となる。

次に、 $r \leq r_s$ の場合において③⑤式と③⑥式を②式と同じ手順で変換すると

$$G = \frac{G_{r \leq r_s}}{1 - r^2/r_s^2} \quad (39)$$

(G : 観測点 (基準点) の万有引力定数、 $G_{r \leq r_s}$: 観測点から距離 $r (\leq r_s)$ の相対万有引力定数)

$$\alpha_{r \leq r_s} = \frac{G_{r \leq r_s} M_a r}{a^3} = (1 - r^2/r_s^2) \alpha \quad (40)$$

(α : 観測点 (基準点) の重力加速度、 $\alpha_{r \leq r_s}$: 観測点から距離 $r (\leq r_s)$ の相対重力加速度)

となる。仮に、 $r \leq r_s$ のポテンシャルエネルギー U を見積もるならば

$$\begin{aligned} U_{r \leq r_s} &= \int_r^{r_s} \alpha_{r \leq r_s} m dr + U_{r \geq r_s}(r_s) = \int_r^{r_s} (1 - r^2/r_s^2) \frac{GM_a m r}{a^3} dr + U_{r \geq r_s}(r_s) \\ &= \left[GM_a m \left(\frac{r^2}{2a^3} - \frac{r^4}{4a^3 r_s^2} \right) \right]_r^{r_s} - \frac{GM_a m}{2r_s} \\ &= \left(\frac{r_s^4}{4a^3 r_s^2} - \frac{r_s^2}{2a^3} + \frac{r_s^2}{4a^3} - \frac{1}{2r_s} \right) GM_a m \quad (41) \end{aligned}$$

(U : 基準点($r \rightarrow \infty$)のポテンシャルエネルギー、 $U_{r \geq r_s}$: 特殊相対性理論的な空間における地点
 $r (\geq r_s)$ のポテンシャルエネルギー)

となる。ただし、④①式は基準点を $r = 0$ としていることから、④①式の $\alpha_{r \leq r_s}$ にかかる符号は③⑦式の $\alpha_{r \geq r_s}$ に対して逆となる。よって、ニュートン力学的と特殊相対性理論を一体化したポテンシャルエネルギーは図14のように示される。例えば、 $r_s \gg a$ のとき $U_{r \leq r_s}(0) \gg 0$ となるが、これは無から膨大なエネルギーが解放されたとするビッグバンの起源と定性的に一致する。また、超新星爆発¹⁶を引き起こすエネルギー状態にも近い。

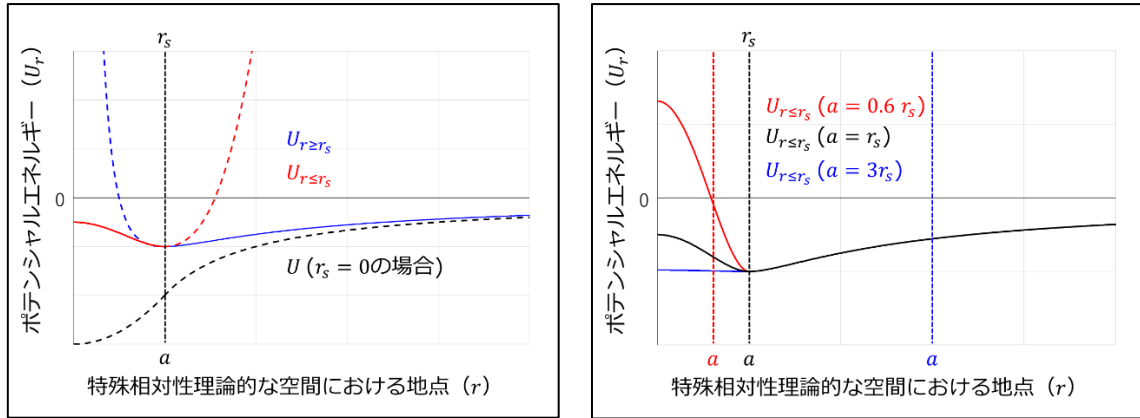
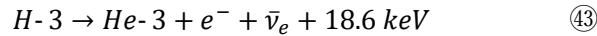
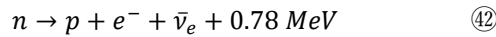


図1 4 ニュートン力学的と特殊相対性理論を一体化したポテンシャルエネルギー

また、図1 4 は実験的に確認されている核力のさまざまな性質と定性的に一致していることから、④式は原子・核物理などへ応用できる可能性がある。例えば、中性子とトリチウムの β 壊変について考えると、核反応式¹⁵は



(n : 中性子、 p : 陽子、 e^- : 電子、 $\bar{\nu}_e$: 反電子ニュートリノ)

である。次に、クーロンポテンシャル的に電子が脱出できない半径を $r_{s,q}$ として③式を用いて計算すると、陽子と ${}^3\text{He}$ の $r_{s,q}$ はおおよそ $2.42 \times 10^{-15} \text{ (m)}$ および $3.42 \times 10^{-15} \text{ (m)}$ となる。陽子と ${}^3\text{He}$ の原子核半径は $0.875 \times 10^{-15} \text{ (m)}$ および $1.87 \times 10^{-15} (\cong 1.3 \times 10^{-15} \times \sqrt[3]{3}) \text{ (m)}$ であるから、④式を用いて $U_{r \leq r_s}(0)$ を計算すると、陽子は 1.21 MeV 、 ${}^3\text{He}$ は 484 keV となる。一方で、 β 壊変による全放出エネルギーは中性子で $1.29 \text{ MeV} (\cong 0.511 \text{ MeV} + 0.78 \text{ MeV})$ 、トリチウムで $530 \text{ keV} (\cong 511 \text{ keV} + 18.6 \text{ keV})$ となり、ラフな計算ながらも④式は核反応エネルギーと近い値を得ることができる。

6. ブラックホール宇宙のインフレーション

次に、ブラックホールのインフレーションについてニュートン力学と特殊相対性理論から議論する。ブラックホールは周囲の天体などを取り込み膨張することができることから、ブラックホール宇宙モデルでは親ブラックホールや子ブラックホールのような各世代のブラックホール間の質量の交換について議論する必要がある。

6.1 ニュートン力学的考察

まず、⑦式に対して質量の増減を考慮すると、ニュートン力学的に次のような関係式で表現することができる。

$$r_s + \Delta r_s = \frac{2G(M_{R_s} + \Delta M + 4\pi r_s^2 \rho_{\Delta r_s} \Delta r_s)}{(nc_n)^2} \quad (44)$$

(ΔM : ブラックホール宇宙が周囲 (親ブラックホール) から取り込んだ質量、 Δr_s : シュワルツシルト半径の増減、 $\rho_{\Delta r_s}$: 親ブラックホールの密度)

また、④式に⑦式(nc_n)² = 2GM_{R_s}/r_sを代入し、②式を用いて Δr_s に対して整理すると

$$\Delta r_s = \frac{r_s \Delta M}{M_{R_s} - 4\pi r_s^3 \rho_{\Delta r_s}} = \frac{\Delta M}{4\pi r_s^2 (\rho/3 - \rho_{\Delta r_s})} \quad (45)$$

となる。例えば、ブラックホールが誕生した直後 (初期のブラックホール宇宙) は $\rho/3 \gg \rho_{\Delta r_s}$ であるため、周囲の物質を取り込むことで膨張するとともに密度が低下する。一方で、ブラックホールが成長 (「超巨大低密度ブラックホール」化) して $\rho/3 < \rho_{\Delta r_s}$ となると、④式の ΔM は負である必要があり、周囲の物質を取り込むことでは膨張することができなくなる。そこで超巨大低密度ブラックホールまで成長した宇宙の膨張については次のように解釈される。図15の状況について考えるならば、子ブラックホールの質量は特殊相対性理論的に見積もることができない。そのため、ニュートン力学的に子ブラックホールの質量はブラックホール宇宙の質量から除外されるべきである。つまり、「ブラックホールの誕生は質量の消滅に等しい」と解釈される。

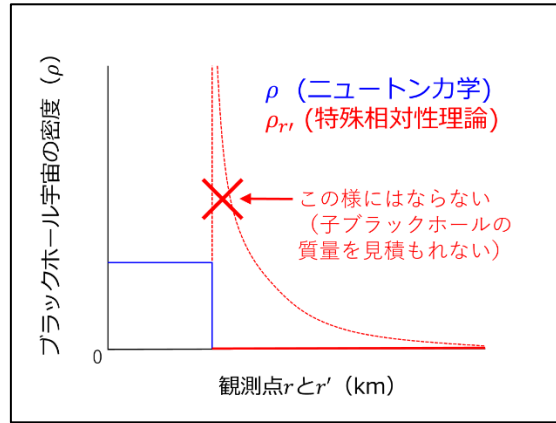


図15 ⑮式を用いてニュートン力学と特殊相対性理論を比較する場合 (イメージ)

6.2 特殊相対性理論的考察

次に、特殊相対性理論的に議論する。まず、ニュートン力学的には

$$M_{R_s} = \int_0^{R_s} 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3} \pi \rho R_s^3 \quad (46)$$

(R_s : ブラックホール宇宙の半径)

である。仮に、 r_s から R_s までを積分したブラックホール宇宙の質量を \overline{M}_{R_s} とすると

$$\overline{M}_{R_s} = \int_{r_s}^{R_s} 4\pi r^2 \rho_r dr = \int_{r_s}^{R_s} \frac{4\pi r^2 \rho}{\sqrt{1 - r_s/r}} dr \quad (47)$$

(r_s : 子ブラックホールの半径)

となる。ただし、 ρ_r は⑮式を⑮式と同じ手順で変換している。ここで $r_s/r = s$ として計算¹²すると

$$\begin{aligned} \overline{M}_{R_s} &= -4\pi \rho \int_{\frac{r_s}{R_s}}^1 \frac{r_s^2}{s^2 \sqrt{1-s}} \left(-\frac{r_s}{s^2} ds\right) = 4\pi \rho r_s^3 \int_{\frac{r_s}{R_s}}^1 \frac{1}{s^4 \sqrt{1-s}} ds \\ &= 4\pi \rho r_s^3 \left[-\frac{1}{3s^3} \sqrt{1-s} - \frac{5}{12s^2} \sqrt{1-s} - \frac{5}{8s} \sqrt{1-s} - \frac{5}{8} \tanh^{-1} \sqrt{1-s} \right]_{\frac{r_s}{R_s}}^1 \end{aligned}$$

$$= 4\pi\rho r_s^3 \left(\frac{R_s^3}{3r_s^3} \sqrt{1-r_s/R_s} + \frac{5R_s^2}{12r_s^2} \sqrt{1-r_s/R_s} + \frac{5R_s}{8r_s} \sqrt{1-r_s/R_s} + \frac{5}{8} \tanh^{-1} \sqrt{1-r_s/R_s} \right) \quad (48)$$

となる。子ブラックホールとブラックホール宇宙の半径比を r_s/R_s として、(46)式と(48)式の関係について図16に示す。

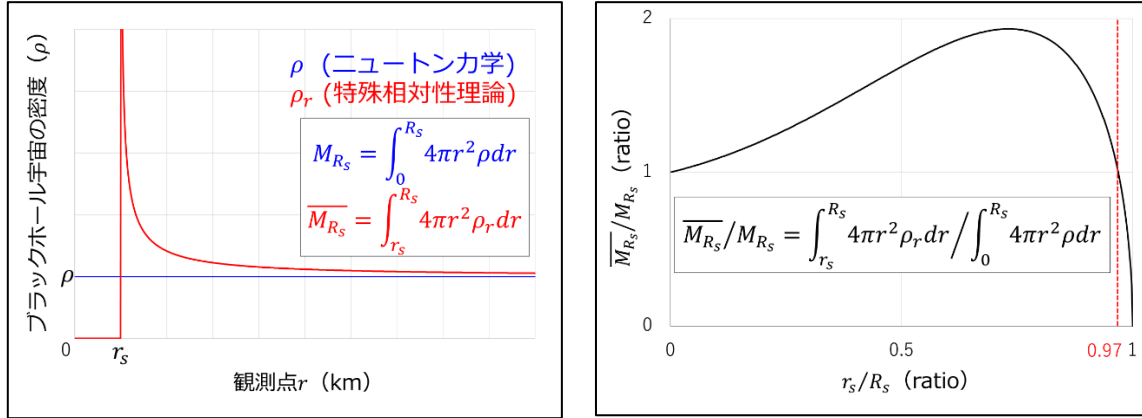


図16 ブラックホール宇宙の密度 (左) と子ブラックホールとブラックホール宇宙の半径比 (r_s/R_s) と質量比 ($\overline{M}_{R_s}/M_{R_s}$) の関係 (右)

図16 (右) より、 r_s/R_s は0から0.97の範囲において $\overline{M}_{R_s} \geq M_{R_s}$ であるが、これは r_s の拡大に伴いブラックホール宇宙の半径も拡大することを意味する。そこで、変動したブラックホール宇宙の半径を $R_s + \Delta R_s$ として、 $\overline{M}_{R_s + \Delta R_s} = M_{R_s}$ となる場合について考えると

$$\overline{M}_{R_s + \Delta R_s} = M_{R_s} \rightarrow \int_{r_s}^{R_s + \Delta R_s} 4\pi r^2 \rho_r dr = \int_0^{R_s} 4\pi r^2 \rho dr \quad (49)$$

($R_s + \Delta R_s$: 変動したブラックホール宇宙の半径、 r_s : 子ブラックホールの半径) について考えると、 $R_s + \Delta R_s$ と r_s の関係は次の図のようになる。

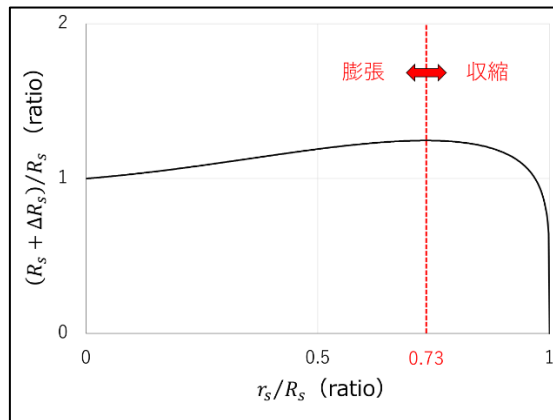


図17 子ブラックホールの半径に対する変動したブラックホール宇宙の半径の関係

図17より、 r_s/R_s が $0 \rightarrow 0.73$ では $(R_s + \Delta R_s)/R_s$ は単調増加 (膨張) し、 r_s/R_s が $0.73 \rightarrow 1$ では $(R_s + \Delta R_s)/R_s$ は単調減少 (収縮) している。これを「エネルギー保存の法則」を前提に「各世代

のブラックホール間の質量の交換」について考えると、単調増加（膨張）するとき「ブラックホール宇宙」は「親ブラックホール」から質量を獲得しており、単調減少（膨張）するときには「ブラックホール宇宙」は「子ブラックホール」に質量を奪われて最終的に消滅する、つまり「子ブラックホールと重なり合う」と解釈される。

6.3 インフレーションモデル

以上の議論から、「ブラックホールの誕生は質量の消滅に等しい」こととなり、図16のように④式はブラックホールの誕生 ($\Delta M < 0$) により超巨大低密度ブラックホール宇宙が成長できるようになる。ちなみに、 $\rho = \rho_{\Delta r_s}$ では③式より r_s も一致することからブラックホール宇宙とその外側の時空間（親ブラックホール宇宙）は重なり合う。例えば、仮に加速器などで超小型のブラックホールが誕生したとすると、周囲から質量を取り込むことですぐに低密度化してしまい、我々の宇宙と重なり合うことになる。

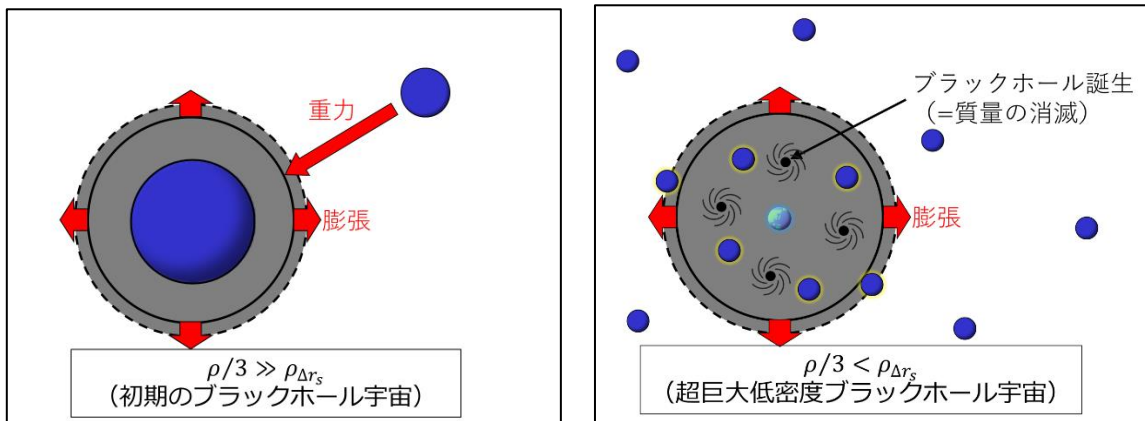


図16 初期ブラックホール宇宙のインフレーション（左）と成長したブラックホール宇宙（超巨大低密度化）のインフレーション（右）についての解釈

次に、④式から導かれる解釈についての一例を紹介する。④式に対する単位時間当たりの変化 (Δt) について考えると

$$\frac{\Delta r_s}{\Delta t} = \frac{1}{4\pi r_s^2 (\rho/3 - \rho_{\Delta r_s})} \frac{\Delta M}{\Delta t} \quad (50)$$

となり、宇宙が光速で膨張していることを考えると $\Delta r_s / \Delta t = c$ であることから⑤式を整理すると

$$\Delta M = 4\pi r_s^2 c (\rho/3 - \rho_{\Delta r_s}) \Delta t \quad (51)$$

となる。(51)式より、初期のブラックホール宇宙 ($\rho/3 \gg \rho_{\Delta r_s}$) は周囲の天体を取り込み膨張するとともに時間が経過し、超巨大低密度化したブラックホール宇宙 ($\rho/3 < \rho_{\Delta r_s}$) は子ブラックホールが誕生 ($\Delta M < 0$) して膨張するとともに時間が経過 ($\Delta t > 0$) する (図17)。すなわち、もしも「宇宙の膨張が無ければブラックホール宇宙の時間も進まない」と解釈される。一方で、ブラックホール宇宙が膨張する際には時間も経過することになるため、④式のようにブラックホール内部 ($r \leq r_s$) のポテンシャルを見積もることは有意なことである。図14 (右) の赤線のような状態ではエネルギーの解放が起こりうると考えられるが、これは無から膨大なエネルギーが

解放されたとされるビッグバンの起源を示唆している。

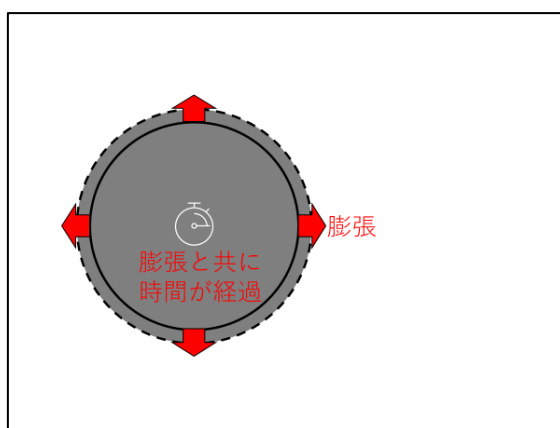


図 1 7 ブラックホール宇宙は膨張と共に時間が経過するという解釈

最後に、『我々はブラックホールの中に住んでいる？』とするブラックホール宇宙モデルの議論に帰る。「ブラックホールの誕生は質量の消滅に等しい」と考えると、観測可能な宇宙の全質量 M から導かれたシュワルツシルト半径 r_s と観測可能な宇宙の半径 R が同等であることから、『我々の宇宙は一つのブラックホールである』とも解釈できる。

また、観測可能な宇宙の半径 R から観測可能宇宙の全質量 M の値を求めてみる。まず、 $U_{r \geq r_s}(r_s) = U_{r \leq r_s}(r_s)$ であることから、これを③式に代入すると

$$U_{r \leq r_s}(r_s) = \frac{U(r_s)}{2} \quad (52)$$

となり、さらに(52)式を⑱式に代入すると

$$\frac{U(r_s)}{2} = -\frac{GM_a m}{2r_s} = -\frac{1}{4}mc^2 \quad (53)$$

となる。ここで、我々が観測可能な天体は半径 r_s 以内であることから $M_a = M_{r_s}$ となる。よって、 M_{r_s} を観測可能な宇宙の全質量 M 、 r_s を観測可能な宇宙の半径 R とすると

$$r_s = \frac{2GM_{r_s}}{c^2} \rightarrow M = \frac{Rc^2}{2G} \quad (54)$$

が得られ、(54)式は①式と一致する。宇宙の半径を 138 億光年とするならば、観測上の宇宙の全質量（≒観測可能な宇宙の全質量）は、(54)式より 1.03×10^{53} kg と見積もられる。

7. 結言

今回「宇宙は一つのブラックホール」と解釈する一説について議論し、事象の地平線のシフトを考慮することでブラックホール宇宙モデルが解釈された。今回の議論から解釈されたブラックホール宇宙モデルは、1960年代多くの科学者から支持されていた定常宇宙モデル¹⁷に似たイメージを持たれるかもしれないが、その始まりは超新星爆発などによるブラックホールの誕生に帰することから、ビッグバンモデルにも似る。本ブラックホール宇宙モデルとビッグバンモデルとの決定的な違いとしては、そのインフレーションにあり、ビッグバンモデルは空間が膨張する（天体同士が遠ざかる）に対し、本ブラックホール宇宙モデルはシュワルツシルト半径が膨張する

(必ずしも天体同士は遠ざからない) という点にある。

ニュートン力学と一般相対性理論は様々な条件下において漸近するが、これはシュワルツシルト半径 r_s の導出においても当てはまる。ただし決定的な違いとしては、ニュートン力学ではシュワルツシルト半径から一時的に有限の距離まで飛び出すことが可能(最終的に戻ってくる)であることに對し、重力加速度を議論する一般相対性理論ではシュワルツシルト半径から外には一瞬たりとも出ることができない、という点にある。この点において、今回の議論にあたって考慮した「観測点により事象の地平線がシフトする」という予測は、いわゆる「観測者効果」のような問題を生じさせてしまうことになる。(一般相対性理論が重力加速度で議論を展開した理由は、この問題を回避するためではないか?と筆者は考えている)しかしながら、電子の二重スリット実験¹⁸などを鑑みると、現代物理学において「観測者効果」は無視することができず、「観測点により事象の地平線がシフトする」という予測も一概に否定することはできないであろう。

付記

本原稿は、個人的な考察をまとめたものである。

参考文献

-
- ¹ The Event Horizon Telescope Collaboration et al., The Astrophysical Journal Letters, 875:L1 (2019), <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>
 - ² NASA, <https://webb.nasa.gov/>
 - ³ R. A. Alpher, H. Bethe and G. Gamow, Physical Review, 73, 803-804 (1948), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.803>
 - ⁴ Nikodem J. Popławski, General Relativity and Gravitation, 53, 18 (2021), <https://doi.org/10.1007/s10714-021-02790-7>
 - ⁵ 須藤靖 (2022)、宇宙は数式でできている、朝日新聞出版、ISBN 978-4-02-295160-1
※<https://dot.asahi.com/dot/2022022500042.html?page=1>
 - ⁶ A. Sneppen, Scientific Reports, 11, 14247 (2021), <https://doi.org/10.1038/s41598-021-93595-w>
 - ⁷ Paul Davies (2007), The Goldilocks Enigma, First Mariner Books, Houghton Mifflin Harcourt, ISBN 978-0618592265
 - ⁸ ESA, https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Planck/Planck_reveals_an_almost_perfect_Universe
 - ⁹ A. Einstein, Annalen der Physik, 322, 10, 891–921 (1905), <https://doi.org/10.1002%2Fandp.19053221004>
 - ¹⁰ K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 7, 189–196 (1916) ※[シュバルツシルト半径 | 天文学辞典 \(astro-dic.jp\)](#)
 - ¹¹ E. Hubble, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 15, 3, 168-173 (1929), <https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>

-
- ¹² I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik and A. Jeffrey (2007), Table of Integrals, Series, and Products, 7th ed. Cambridge, MA, USA: Academic Press, ISBN978-0-12-373637-6 ※[無理関数の原始関数の一覧 - Wikipedia](#)
- ¹³ 岡村定矩 監訳 (2003)、オックスフォード天文学辞典、朝倉書店、ISBN 4-254-15017-2
- ¹⁴ 大須賀健 (2011)、ゼロからわかるブラックホール、講談社、ISBN978-4-06-257728-1
- ¹⁵ 日本アイソトープ協会 (2021)、放射線取扱の基礎、丸善出版、ISBN 4890732837
- ¹⁶ H. A. Bethe, Reviews of Modern Physics, 62, 801-866 (1990),
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.62.801>
- ¹⁷ F. Hoyle, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 108, 5, 372–382 (1948),
<https://doi.org/10.1093/mnras/108.5.372>
- ¹⁸ C. Jönsson, Zeitschrift für Physik, 161, 454–474 (1961), <https://doi.org/10.1007/BF01342460>