宇宙はブラックホールであるという仮説についての一考察

～ブラックホールから原子そして原子核へ～

山脇正人*

キーワード：ブラックホール、シュワルツシルト半径、事象の地平線、ニュートン力学、特殊相対性理論、放射線、核力、ビッグバン、科学哲学

概要

宇宙論は現代においても様々なモデルが提案されているが、今回「宇宙は一つの巨大なブラックホールである」と解釈する一説に対して、ニュートン力学と特殊相対性理論を用いて議論した。事象の地平線が観測点のポテンシャルによってシフトすると考えることでブラックホール宇宙モデルが理解され、そこから観測可能な宇宙の質量は 1.86×10^{53} kg と見積もられた。今回の議論から、遠方の天体の赤方偏移はドップラーシフトによるものではなく、ブラックホール近傍における重力赤方偏移と同等なものであり、なおかつ宇宙のインフレーションは必ずしも天体同士が遠ざかる（空間が膨張する）ものではなく、シュワルツシルト半径が拡大している、という見解に至った。また、ブラックホール内部の「斥力」を示唆する関係式が得られ、そこから原子物理学などへの展開を試みた。その結果、いくつかの共通点が見いだされ、特に原子核の結合エネルギーにおいては実験値を良く近似する関係式を導き出すことができた。

1.　緒言

近年、ブラックホールの存在を示す観測結果が発表[1]されたことで、宇宙物理学への関心が高まっている。また、2022 年にはジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡の運用が開始[2]されており、いま宇宙物理学は黎明期といえる。現代宇宙論ではビッグバンモデル[3]が最も支持されているといえるが、一方で興味深いモデル[4, 5]も存在する。そのモデルでは、そもそも『我々はブラックホールの中に住んでいる？』と解釈され、『我々から 138 億光年以上離れた場所は観測できず、宇宙の地平線（私たちに光が届くギリギリの場所）の先にあります。その先には何もないのではなく、観測できないだけで我々と同じような宇宙がずっと広がっているはずです。逆に言えば、138 億光年以上離れた観測者にとっては、我々は見えません。まさにこれはブラックホールと同じ状況です。』[6]と解説されている。そこで今回、この仮説（以下、ブラックホール宇宙モデルと称す）に対する考察を行った。今回の議論では、シュワルツシルト・ブラックホール[7]（質量のみ値を持ち、角運動量と電荷を 0 とする最も単純なモデルのブラックホール）を用いた。

2.　ブラックホール

近年、銀河 M87 近傍から放出される光に、ブラックホールの存在を示す証拠となる赤方偏移が観測されたことが発表[1]されている。ブラックホールは図 1 のように光すら脱出できなくなる重力場を形成すると一般相対性理論から導かれるが、その条件は(1)式のようになる。

---

* 国立研究開発法人産業技術総合研究所分析計測標準研究部門

e-mail: yamawaki.masato@aist.go.jp

$$r_s = \frac{2GM_{r_s}}{c^2} \qquad (1)$$

（r_s：シュワルツシルト半径[6]、G：万有引力定数、M_{r_s}：ブラックホールの質量、c：光速）

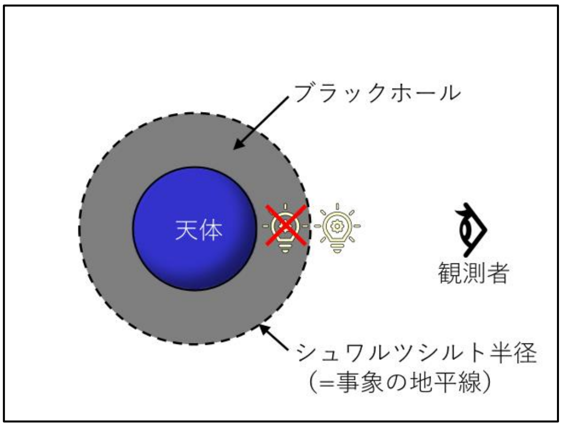

図 1 ブラックホール

ある天体の半径がシュワルツシルト半径r_s以下になるとき、その天体はブラックホールとなる。ブラックホールは超高密度な天体であるとイメージされることが多い。しかし、(1)式においてブラックホールの質量M_{r_s}と半径r_sが比例関係にあることから、例えば質量が 2 倍になると体積は 8 倍（M_{r_s}はr_sの 3 乗に比例）となり、その密度は 1/4 倍となる。つまり、ブラックホールは「質量」が大きくなればなるほど、その「密度」は小さくなっていくのである。よって、「巨大」で「低密度」なブラックホールも存在しうることになる。そこで、このようなブラックホールを「巨大低密度ブラックホール」（図 2）と呼ぶことにする。

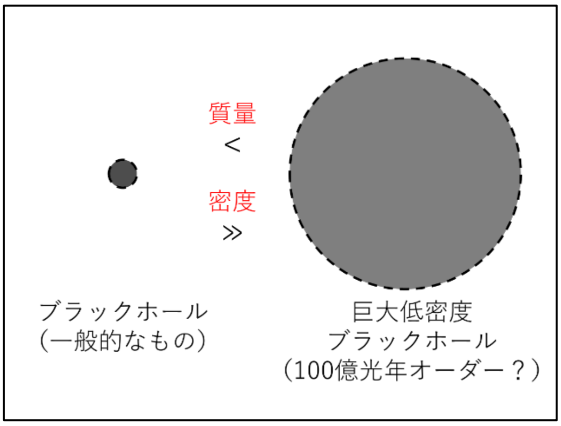

図 2　巨大低密度ブラックホール

3.　ブラックホール宇宙モデル

ブラックホール宇宙モデルを解説すると、図 3 のようなイメージとなる。この仮説に対してシュワルツシルト・ブラックホールを用いて議論した。

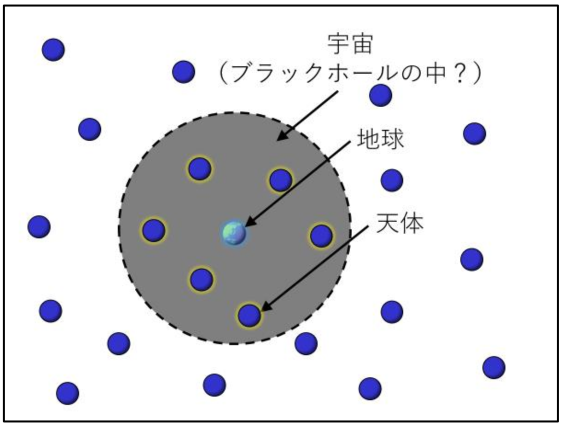

図 3　ブラックホール宇宙モデルのイメージ

まず、宇宙を質量Mで半径Rの集合体と考え、(1)式からシュワルツシルト半径r_sを求める。観測可能な宇宙の全質量Mは 1×10^{53} kg（平均的な天体の質量 2×10^{30} kg、天体数 5×10^{22} 個に相当）[8]、万有引力定数Gは 6.67×10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} であることから、シュワルツシルト半径r_sは 1.48×10^{26} m となる。一方で、観測可能な宇宙の大きさが、138 億光年（1 光年は約 1×10^{16} m）とすると 1.38×10^{26} m であり、シュワルツシルト半径r_sと観測可能な宇宙の半径Rがほぼ一致する。よって、『我々はブラックホールの中に住んでいる？』とするブラックホール宇宙モデルは、まんざらでもなく思える。

4.　巨大低密度ブラックホール

ところで、我々の住む宇宙にはブラックホールなどのダークマター・ダークエネルギー[9]が存在し、その質量は観測可能な宇宙の全質量Mの「20 倍」以上と考えられている。宇宙の全質量を観測可能な宇宙の全質量Mの「20 倍」であるならばシュワルツシルト半径r_sも「20 倍」であり、観測可能な宇宙の大きさとシュワルツシルト半径は当然一致しないことになるが、一方で次のような矛盾が生じる。平均的な密度をρとするブラックホールの全質量M_{r_s}は

$$M_{r_s} = \frac{4\pi r_s^3}{3}\rho \qquad (2)$$

（ρ：ブラックホールの平均的な密度）

である。ここで(1)式に(2)式を代入し、r_sに対して整理すると

$$r_s = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}} \qquad (3)$$

となる。つまり、ρも「20 倍」であるならば(3)式からr_sは約 0.22 倍となり、半径が約 33 億光年の「巨大低密度ブラックホール」が我々の宇宙のどこにでも存在しうることになる。

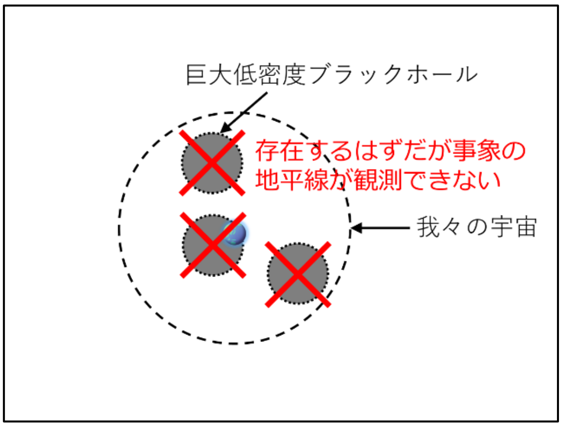

図 4　存在するはずの「巨大低密度ブラックホール」はどこへいったのか？

しかしながら、半径約 33 億光年の「巨大低密度ブラックホール」がつくりあげているはずの事象の地平線がどこにも観測されないことから、図 4 のような『存在するはずの「巨大低密度ブラックホール」はどこへいったのか？』という疑問が生まれる。そこでこの疑問を解決すべく、図 5 のように「事象の地平線は観測点によってシフトする」という仮説に基づいて議論した。

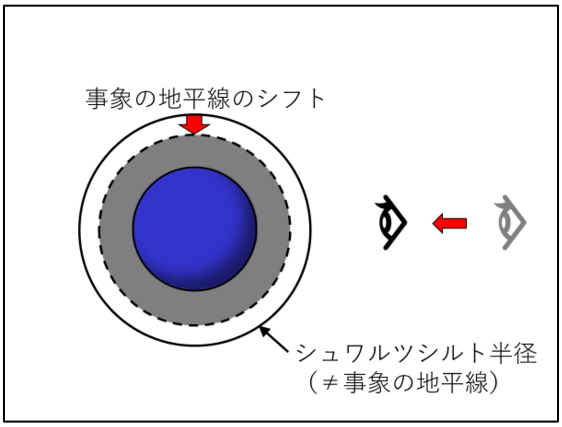

図 5　事象の地平線が観測点によってシフトする（シュワルツシルト半径≠事象の地平線）
という仮説

5.　事象の地平線のシフト

「事象の地平線のシフト」について議論する上で、「ニュートン力学的考察」と「特殊相対性理論的考察」をおこなった。　※「ニュートン力学的考察」はだいぶ哲学的な話となっています。

5.1　ニュートン力学的考察

5.1.1　重力ポテンシャルの整理と相対屈折率の導入

本考察の前に、まず天体の重力ポテンシャルについて整理しよう。

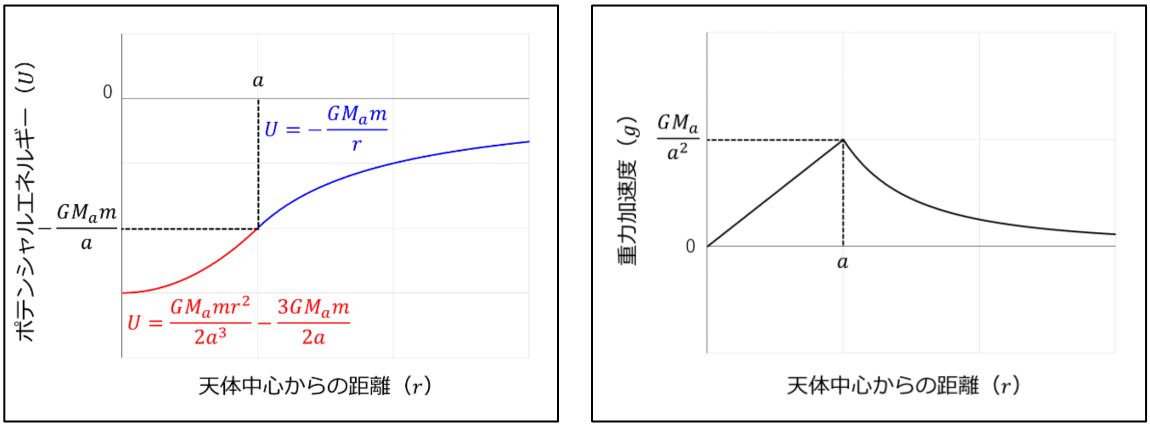

図 6　天体のポテンシャルエネルギー（左）と重力加速度（右）

ある天体の半径をa、質量をM_a、ある粒子（例えば電子）の質量をmとすると、天体の外側（$r \geq a$）のポテンシャルエネルギーU（図 6（左）の青線）は

$$U(r)=-\frac{GM_a m}{r} \qquad (4)$$

であり、天体の内側（$r \leq a$）のポテンシャルエネルギーU（図 6 （左）の赤線）は

$$U(r)=\frac{GM_a mr^2}{2a^3}-\frac{3GM_a m}{2a} \qquad (5)$$

である。参考までに、重力加速度は図 6（右）のようになり$r=a$が最大値である。

ちなみに、(4)式において$-U=\frac{1}{2}mc^2$（運動エネルギーが持ちうる最大値）を代入すると

$$r=\frac{2GM_a}{c^2} \qquad (6)$$

となり、偶然にも（1)式（シュワルツシルト半径の関係式）と同じ解が得られることは良く知られている[6]。ただし、c^2は真空中の光速であるため、もしも「天体内部について議論」するならば(1)式は

$$r_s=\frac{2GM_{r_s}}{(nc_n)^2} \leftrightarrow c_n{}^2=\frac{2GM_{r_s}}{n^2 r_s} \qquad (7)$$

（n：相対屈折率、c_n：天体内部の光速）

と考えてもよいのかもしれない。

5.1.2　事象の地平線のシフト

さて、天体中心からの距離rを観測点とする事象の地平線のシフトΔr_sについて、ニュートン力学的に考察してみよう。ポテンシャルエネルギー$U(r)$に対するエネルギー差が常に$\frac{1}{2}mc_n{}^2$（運動エネルギーが持ちうる最大値）となる位置（$r_s-\Delta r_s$）が事象の地平線となると考える（図 7）。

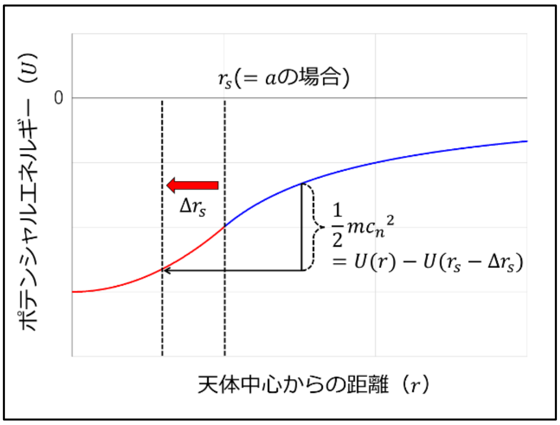

図７　観測点によってシフトする事象の地平線の関係

まず、$r_s - \Delta r_s \geq a$の場合（事象の地平線が天体の外側に位置）を考えると

$$\frac{1}{2}mc^2 = -\frac{GM_{r_s}m}{r} - \left(-\frac{GM_{r_s}m}{(r_s - \Delta r_s)}\right)$$

$$\rightarrow\ r_s - \Delta r_s = \frac{2GM_{r_s}r}{rc^2 + 2GM_{r_s}} \qquad (8)$$

となる。(8)式は$r \rightarrow \infty$のときに$\Delta r_s \rightarrow 0$となることから、観測点rが天体から遠い場合において、(8)式と(1)式（シュワルツシルト半径の関係式）は一致する。

次に、$r_s - \Delta r_s \leq a$の場合（事象の地平線が天体の内側に位置）を考えると

$$\frac{1}{2}mc_n{}^2 = -\frac{GM_a m}{r} - \left(\frac{GM_a m(r_s - \Delta r_s)^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a}\right)$$

$$\rightarrow\ c_n{}^2 = -\frac{2GM_a}{r} - \left(\frac{GM_a(r_s - \Delta r_s)^2}{a^3} - \frac{3GM_a}{a}\right)$$

$$\rightarrow\ c_n{}^2 = \frac{3GM_a}{a} - \frac{2GM_a}{r} - \frac{GM_a(r_s - \Delta r_s)^2}{a^3} \qquad (9)$$

となる。ただし、このc_nは天体の内側と外側で異なるため、簡略化して考えるために$a = r_s$として考えると、$M_a = M_{r_s}$であることから(9)式は

$$c_n{}^2 = \frac{3GM_{r_s}}{r_s} - \frac{2GM_{r_s}}{r} - \frac{GM_{r_s}(r_s - \Delta r_s)^2}{r_s{}^3} \qquad (10)$$

となる。仮に、(7)式（相対屈折率を考慮したシュワルツシルト半径の関係式）の天体の相対屈折率を$n = \sqrt{2}$として、(10)式に$c_n{}^2 = GM_{r_s}/r_s$を代入すると、$r \rightarrow r_s\ (= a)$のときに$\Delta r_s \rightarrow r_s$となり、図８のように事象の地平線は一点に収束する（$r_s - \Delta r_s = 0$）。つまり、事象の地平線は近づけば遠のく「逃げ水」のようなものであると理解できる。

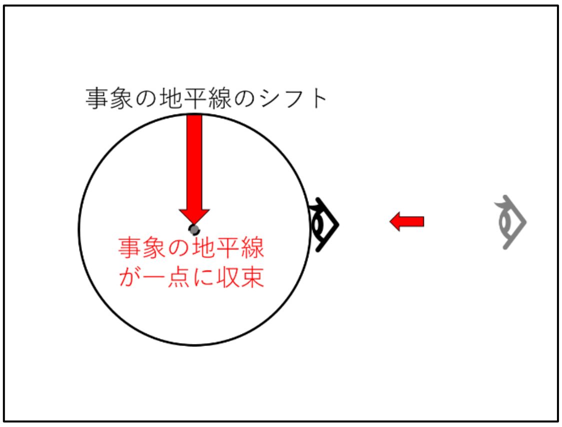

図８　観測点がシュワルツシルト半径に近づくと事象の地平線が一点に収束する

5.1.3　巨大低密度ブラックホールの内側

ここで図４の疑問となる『存在するはずの「巨大低密度ブラックホール」はどこへいったのか？』について考えてみよう。上記「天体」を半径aの「集合体」と読み替え、さらに「観測点が集合体の内側に位置（$r \le a$）」する場合を考えると

$$\frac{1}{2}m{c_n}^2 = \left(\frac{GM_a mr^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a}\right) - \left(\frac{GM_a m(r_s - \Delta r_s)^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a}\right)$$

$$\rightarrow\ {c_n}^2 = \frac{GM_a}{a^3}\left(r^2 - (r_s - \Delta r_s)^2\right) \qquad (11)$$

となる。ここで、$a = kr_s$（kは比例係数）のとき、$M_a = k^3 M_{r_s}$となることから(11)式は

$${c_n}^2 = \frac{Gk^3 M_{r_s}}{(kr_s)^3}\left(r^2 - (r_s - \Delta r_s)^2\right) \rightarrow\ {c_n}^2 = \frac{GM_{r_s}}{{r_s}^3}\left(r^2 - (r_s - \Delta r_s)^2\right) \qquad (12)$$

（k：比例係数）

となり、(12)式はkに依存しないことから$k \gg 1$の場合（「集合体の内側」）についても(11)式と同様に議論してもよいことになる。ここで、(12)式に(7)式${c_n}^2 = 2GM_{r_s}/n^2 r_s$を代入すると

$$\frac{2GM_{r_s}}{n^2 r_s} = \frac{GM_{r_s}}{{r_s}^3}\left({r_s}^2 - (r_s - \Delta r_s)^2\right)$$

$$\rightarrow\ \frac{(r_s - \Delta r_s)^2}{{r_s}^2} = 1 - \frac{2}{n^2} \qquad (13)$$

となり、もしも$|n| \ge \sqrt{2}$であれば(13)式が成り立つ。これは、「事象の地平線がシフトして観測者から半径Δr_sの地点が事象の地平線となる」ということであり、これこそが『我々から 138 億光年以上離れた場所は観測できず、宇宙の地平線（私たちに光が届くギリギリの場所）の先にあります』と解釈されるブラックホール宇宙モデルなのだ、という見解に至った。

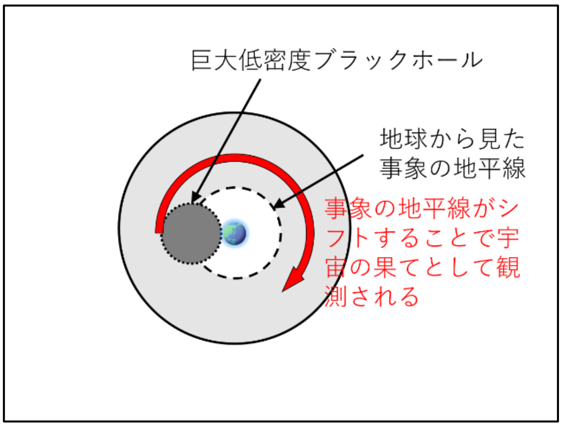

図 9　地平線がシフトすることで宇宙の果てとして観測される

5.2　特殊相対性理論的考察

では次に、特殊相対性理論を用いてもう少し議論を深めてみよう。

5.2.1　特殊相対性理論の整理とポテンシャルエネルギー

まず本考察の前に、ブラックホールがもたらす時間の遅れについて整理する。図 10 のように赤方偏移は天体の移動や重力加速度により生じ、同時に時間の遅れも生じる。一般相対性理論によれば強い重力場によって時間の遅れや赤方偏移が生じ、事象の地平線上では時間が停止していることになる。[10]

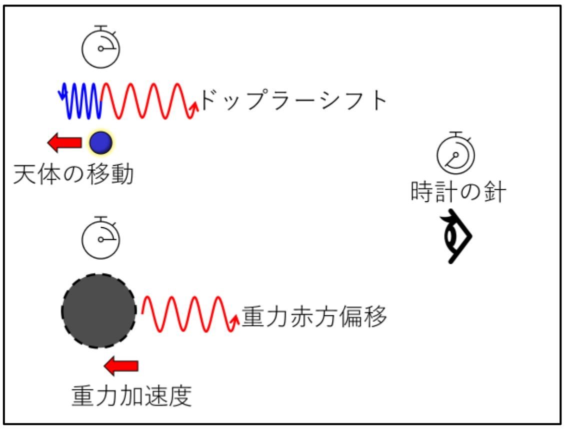

図 10　時間の遅れと赤方偏移

時間に対する特殊相対性理論[11]の式は

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (14)$$

（t：静止系の時間、t'：慣性系の相対時間、v：慣性系の相対速度、c：光速）

であるが、(14)式の中にあるv^2/c^2の分母と分子に$\pm\frac{1}{2}m$を掛け、さらにcをc_nに拡張した(15)式について考える。

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1 - \frac{\pm\frac{1}{2}mv^2}{\pm\frac{1}{2}m{c_n}^2}}} \qquad (15)$$

5.2.2　シュワルツシルト半径の外側

速度と位置の関係性について議論する。まず、観測点が天体aの外側（$r \geq a$）にあるとき、$r \to \infty$を基準とするポテンシャルエネルギーUと地点rから脱出するために必要な運動エネルギーの関係は

$$U(r) = -\frac{GM_a m}{r} = -\frac{1}{2}m{v_r}^2 \qquad (16)$$

$$U(r_s) = -\frac{GM_a m}{r_s} = -\frac{1}{2}m{v_{r_s}}^2 = -\frac{1}{2}m{c_n}^2 \qquad (17)$$

（v_r：地点rからの脱出速度、v_{r_s}：地点r_sからの脱出速度）

となり、(16)式と(17)式を(15)式に代入すると

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'(r)}{\sqrt{1 - \left(\frac{GM_a}{r}\right)\Big/\left(\frac{GM_a}{r_s}\right)}} = \frac{\mathrm{d}t'(r)}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \qquad (18)$$

（t：基準点($r \to \infty$)の時間、$t'(r)$：観測点rの相対時間）

となる。つまり、観測点rがr_sに近づくにしたがって時間の遅れが生じ、r_sでは時間が停止することになる。ちなみに、(18)式はシュワルツシルト解[10]と一致している。

5.2.3　シュワルツシルト半径の内側

次に、観測点が集合体の内側（$r \leq a$）にあるとき、$r = 0$を基準とするポテンシャルエネルギーUと地点rに到達するために必要な運動エネルギーの関係は

$$U(r) = \frac{GM_{r_s} m r^2}{2{r_s}^3} = \frac{1}{2}m{v_r}^2 \qquad (19)$$

$$U(r_s) = \frac{GM_{r_s} m {r_s}^2}{2{r_s}^3} = \frac{GM_{r_s} m}{2r_s} = \frac{1}{2}m{v_{r_s}}^2 = \frac{1}{2}m{c_n}^2 \qquad (20)$$

（v_r：基準点（$r = 0$）から地点rへの到達速度、v_{r_s}：基準点（$r = 0$）から地点r_sへの到達速度）

となり、(19)式と(20)式を(15)式に代入すると

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'(r)}{\sqrt{1 - \left(\frac{GM_{r_s} m r^2}{2{r_s}^3}\right)\Big/\left(\frac{GM_{r_s} m}{2r_s}\right)}} = \frac{\mathrm{d}t'(r)}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{{r_s}^2}}} \qquad (21)$$

（t：観測点（$r = 0$）の時間、$t'(r)$：観測点（$r = 0$）から距離rの相対時間）

となる。つまり、観測者からの距離rがr_sに近づく（つまり、観測者から遠ざかる）にしたがって時間の遅れが生じることになる。ここで、(14)式と(21)式を比較すると

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{r^2}{{r_s}^2} \ \rightarrow \ v = \frac{r}{r_s}c \qquad (22)$$

の関係が得られる。これは偶然にもハッブルの法則[12]と同じであることから、図 11 のような解釈ができる。

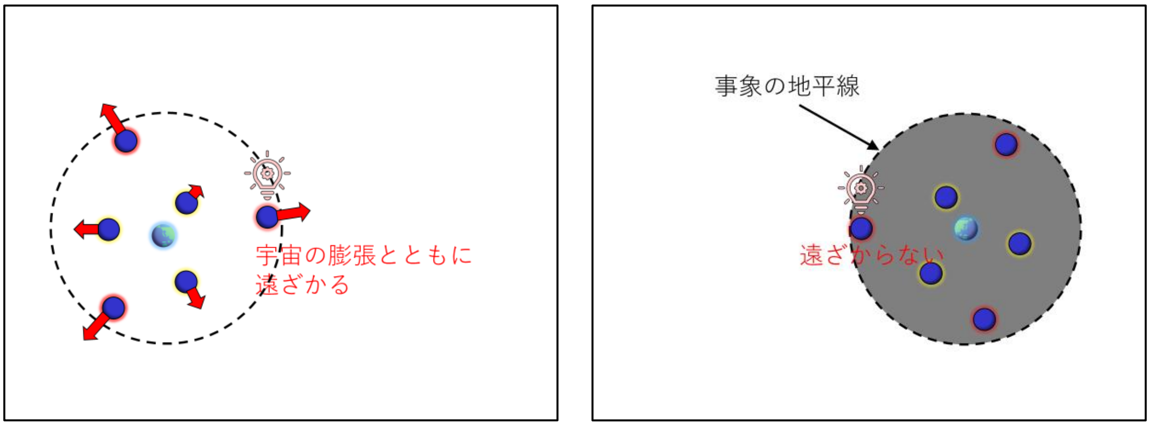

図 11　ビッグバンモデル（左）とブラックホール宇宙モデル（右）

5.2.4　ブラックホール宇宙の質量

それでは、(21)式を用いてニュートン力学と特殊相対性理論から見積もられる宇宙の質量について比較してみよう。全質量M_{r_s}、半径r_s、平均的な密度ρの「ブラックホール宇宙」に考えると、ニュートン力学的には

$$M_{r_s} = \int_0^{r_s} 4\pi r^2 \rho \mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi\rho {r_s}^3 \qquad (23)$$

である。一方、質量に対する特殊相対性理論[11]の式は

$$M' = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (24)$$

（M：静止系の質量、M'：慣性系の相対質量、v：慣性系の相対速度、c：光速）

であるが、質量Mと密度ρは比例関係（$M \propto \rho$）にあることから

$$M' = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ \rightarrow \ \frac{4\pi r^3}{3}\rho' = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ \rightarrow \rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (25)$$

（M：静止系の質量、M'：慣性系の相対質量、ρ：静止系の密度、ρ'：慣性系の相対密度）

となる。ここで、(25)式を(21)式と同じ手順で変換すると

$$\rho'(r) = \frac{\rho}{\sqrt{1 - r^2/{r_s}^2}} \qquad (26)$$

（ρ：観測点（$r = 0$）の密度、$\rho'(r)$：観測点（$r = 0$）から距離rの相対密度）

が得られる。ここで、特殊相対性理論的な空間と区別するためにr'用いると全質量$M_{r_s'}$は

$$M_{r_s'} = \int_0^{r_s'} 4\pi r'^2 \rho' \mathrm{d}r' = \int_0^{r_s'} \frac{4\pi r'^2 \rho}{\sqrt{1 - r'^2/{r_s'}^2}} \mathrm{d}r' \qquad (27)$$

となる。そして、(27)式を計算[13]すると

$$\int_0^{r_s'} \frac{4\pi r'^2 \rho}{\sqrt{1 - r'^2/r_s'^2}} \mathrm{d}r' = \left[2\pi r_s' \rho \left(-r'\sqrt{r_s'^2 - r'^2} + r_s'^2 \sin^{-1}\frac{r'}{r_s'}\right)\right]_0^{r_s'} = \pi^2 \rho r_s'^3 \qquad (28)$$

となり、$M_{r_s} = M_{r_s'}$のとき

$$\frac{4}{3}\pi\rho r_s^3 = \pi^2 \rho r_s'^3 \ \rightarrow \ r_s' = \sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}} r_s \cong 0.75 r_s \qquad (29)$$

となる。つまり、特殊相対性理論を考慮した観測上の宇宙（≅観測可能な宇宙）の半径はニュートン力学的半径の約 0.75 倍に見積もられる。　※特殊相対性理論的に見積もったブラックホール宇宙の質量$M_{r_s'}$が無限大に発散してしまうのでは？という矛盾は回避できた。

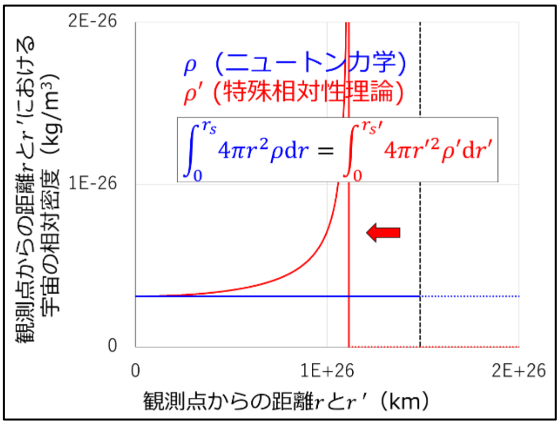

図 12　ニュートン力学的な宇宙の半径r_sと特殊相対性理論を考慮した観測上の宇宙の半径r_s'

5.2.5　遠方の天体の赤方偏移について

また、図 12 の関係性について、長さに対する特殊相対性理論[11]の式について(21)式と同じ手順で変換すると

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{\text{変換}} L = \frac{L'(r)}{\sqrt{1 - r^2/r_s^2}} \qquad (30)$$

（L：静止系（観測点）の長さ、L'：慣性系の相対長さ、$L'(r)$：観測点から距離rの相対長さ）となる。この式から、宇宙の果て近傍では長さが収縮しており、観測点に近づくにしたがって長さが伸びることがわかる。長さLと光の波長λは比例関係（$L \propto \lambda$）にあることから、つまりは遠方の天体が赤方偏移することを意味し、これは重力赤方偏移と同じである。

5.2.6　相対屈折率

ところで、ニュートン力学的考察では相対屈折率nなるものを仮定したが、この相対屈折率nについてさらに考えてみよう。長さLと光の相対屈折率nは反比例の関係（$L \propto 1/n$）にあることから

$$n' = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (31)$$

（n：静止系の相対屈折率、n'：慣性系の相対屈折率）

と扱うこともできるかもしれない。さらに、この式を（18)式（ブラックホール外部の相対時間の式）と同じ手順で変換すると

$$n'_{r \geq r_s}(r) = \frac{n}{\sqrt{1 - r_s/r}} \qquad (32)$$

（n：基準点$(r \to \infty)$の相対屈折率、$n'_{r \geq r_s}(r)$：観測点$r\ (\geq r_s)$の相対屈折率）

となる。

6.　ニュートン力学と特殊相対性理論の一体化

6.1　相対屈折率と万有引力定数の一体化

今回仮定した相対屈折率nは、万有引力定数Gに対して反比例の自乗（$G \propto 1/n^2$）の関係（(7)式参照）にある。そもそも屈折率は「無次元」であることから、相対屈折率nと万有引力定数Gを一体として取扱ってみよう。そこで(32)式より

$$G'_{r \geq r_s}(r) = (1 - r_s/r)G \qquad (33)$$

（$G'_{r \geq r_s}(r)$：基準点$(r \to \infty)$から見た観測点$r\ (\geq r_s)$の相対万有引力定数）

とすると、重力加速度α'は

$$\alpha'_{r \geq r_s}(r) = \frac{G'_{r \geq r_s} M_a}{r^2} = (1 - r_s/r)\alpha \qquad (34)$$

（$\alpha'_{r \geq r_s}(r)$：基準点$(r \to \infty)$から見た観測点$r\ (\geq r_s)$の相対重力加速度）

となり、観測点$r \to r_s$において相対重力加速度$\alpha'_{r \geq r_s} \to 0$となる。

6.2　特殊相対性理論的ポテンシャルエネルギー

では、(34)式を用いて特殊相対性理論的ポテンシャルエネルギーU'を求めてみよう。ニュートン力学的に位置エネルギーUは$\mathrm{d}U = -\alpha m \mathrm{d}r$となるため

・$r_s \leq r$のとき

$$U'_{r \geq r_s}(r) = \int_r^\infty -\alpha'_{r \geq r_s} m \mathrm{d}r = \int_r^\infty -(1 - r_s/r)\frac{GM_a m}{r^2}\mathrm{d}r = \left[\frac{1}{r} - \frac{r_s}{2r^2}\right]_r^\infty GM_a m$$

$$= \left(\frac{r_s}{2r^2} - \frac{1}{r}\right) GM_a m = \left(1 - \frac{r_s}{2r}\right) U(r) \qquad (35)$$

（$U'_{r \geq r_s}(r)$：基準点$(r \to \infty)$から見た地点$r(\geq r_s)$のポテンシャルエネルギー）

となる。(35)式は$r = r_s$のときに$U'_{r \geq r_s} = U/2$となっている。$-U(r_s) = mc^2$であると考えるならば

$$-U'_{r \geq r_s}(r_s) = \frac{1}{2} mc^2 \qquad (36)$$

となり、特殊相対性理論的なシュワルツシルト半径の関係と一致する。つまり、本来ニュートン

力学的なシュワルツシルト半径は

$$r_s = \frac{2G'M_{r_s}}{c^2} \rightarrow r_s = \frac{GM_{r_s}}{c^2} \qquad (37)$$

であると考えられる。

次に、$r \leq r_s$の場合おいて(33)式と(34)式を（21)式（ブラックホール内部の相対時間と考える式）と同じ手順で変換すると

$$G'_{r\leq r_s}(r) = (1 - r^2/{r_s}^2)G \qquad (38)$$

（$G'_{r\leq r_s}(r)$：観測点（$r = 0$)から距離r ($\leq r_s$)の相対万有引力定数）

$$\alpha'_{r\leq r_s}(r) = \frac{G'_{r\leq r_s}M_a r}{a^3} = (1 - r^2/{r_s}^2)\alpha \qquad (39)$$

（$\alpha'_{r\leq r_s}(r)$：観測点から距離r ($\leq r_s$)の相対重力加速度）

となる。仮に、$r \leq r_s$のポンシャルエネルギー$U'_{r\leq r_s}$を見積もるならば　※ただし、(39)式は観測点（$r = 0$）が基準であるため、$r \rightarrow \infty$を基準とすると$\mathrm{d}U = \alpha m\mathrm{d}r$

$$U'_{r\leq r_s}(r) = \int_r^{r_s} \alpha'_{r\leq r_s} m\mathrm{d}r + U'_{r\geq r_s}(r_s) = \int_r^{r_s} (1 - r^2/{r_s}^2)\frac{GM_a r}{a^3} m\mathrm{d}r + U'_{r\geq r_s}(r_s)$$

$$= \left[\left(\frac{r^2}{2a^3} - \frac{r^4}{4a^3{r_s}^2}\right)\right]_r^{r_s} GM_a m - \frac{GM_a m}{2r_s}$$

$$= \left(\left(\frac{r^4}{4a^3{r_s}^2} - \frac{r^2}{2a^3} + \frac{{r_s}^2}{2a^3} - \frac{{r_s}^2}{4a^3}\right) - \frac{1}{2r_s}\right)GM_a m \qquad (40)$$

（$U'_{r\leq r_s}(r)$：基準点($r \rightarrow \infty$)から見た地点r($\leq r_s$)のポテンシャルエネルギー）

となる。また、(40)式は$a = r_s$のときであるため、$a \neq r_s$の場合についても考える。

・$r_s \leq r \leq a$のとき

$$U'_{(a\geq)r\geq r_s}(r) = \int_r^a -\alpha'_{r\geq r_s} m\mathrm{d}r + U'_{r\geq r_s}(a) = \int_r^a -(1 - r_s/r)\frac{GM_a mr}{a^3}\mathrm{d}r + U'_{r\geq r_s}(a)$$

$$= \left[\frac{rr_s}{a^3} - \frac{r^2}{2a^3}\right]_r^a GM_a m + \left(\frac{r_s}{2a^2} - \frac{1}{a}\right)GM_a m$$

$$= \left(\frac{r^2}{2a^3} - \frac{rr_s}{a^3} - \frac{1}{2a} + \frac{r_s}{a^2} + \frac{r_s}{2a^2} - \frac{1}{a}\right)GM_a m \qquad (41)$$

・$a \leq r \leq r_s$のとき

$$U'_{(a\leq)r\leq r_s}(r) = \int_r^{r_s} \alpha'_{r\leq r_s} m\mathrm{d}r + U'_{r\geq r_s}(r_s) = \int_r^{r_s} (1 - r^2/{r_s}^2)\frac{GM_a m}{r^2}\mathrm{d}r + U'_{r\geq r_s}(r_s)$$

$$= \left[-\frac{1}{r} - \frac{r}{{r_s}^2}\right]_r^{r_s} GM_{r_s} m - \frac{GM_{r_s} m}{2r_s} = \left(\left(\frac{r}{{r_s}^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_s}\right) - \frac{1}{2r_s}\right)GM_{r_s} m \qquad (42)$$

となり、(41)式と(42)式は(35)式に接続する。ちなみに、(42)式は$a \ll r_s$（$a/r_s \rightarrow 0$）のとき

$$U'_{(a\ll)r\leq r_s} = \left\{\left(\frac{r}{r_s}\left(\frac{a}{r_s}\right) + \frac{a}{r} - 2\left(\frac{a}{r_s}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r_s}\right)\right\}\frac{GM_{r_s} m}{a} \cong \frac{GM_{r_s} m}{r} = -U(r) \qquad (43)$$

となることから、r_sの内側ではrに反比例した「斥力」が働いていることがわかる。さらに

・$r \le r_s \le a$のとき

$$
\begin{aligned}
U'_{r\le r_s(\le a)}(r) &= \int_r^{r_s} \alpha'_{r\le r_s} m\mathrm{d}r + U'_{(a\ge)r\ge r_s}(r_s) \\
&= \left(\left(\frac{r^4}{4a^3{r_s}^2} - \frac{r^2}{2a^3} + \frac{{r_s}^2}{2a^3} - \frac{{r_s}^2}{4a^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{{r_s}^2}{2a^3} - \frac{{r_s}^2}{a^3} - \frac{1}{2a} + \frac{r_s}{a^2} - \frac{1}{a} + \frac{r_s}{2a^2} \right) \right) GM_a m
\end{aligned} \tag{44}
$$

・$r \le a \le r_s$のとき

$$
U'_{r(\le a)\le r_s}(r) = \int_r^{a} \alpha'_{r\le r_s} m\mathrm{d}r + U'_{(a\le)r\le r_s}(a)
$$

$$
= \left(\left(\frac{r^4}{4a^3{r_s}^2} - \frac{r^2}{2a^3} + \frac{1}{2a} - \frac{a}{4{r_s}^2} + \frac{a}{{r_s}^2} + \frac{1}{a} - \frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_s} \right) - \frac{1}{2r_s} \right) GM_{r_s} m \tag{45}
$$

となり、(44)式と(45)式は(41)式と(42)式に接続する。よって、特殊相対性理論的なポテンシャルエネルギーは図 13 のようになる。

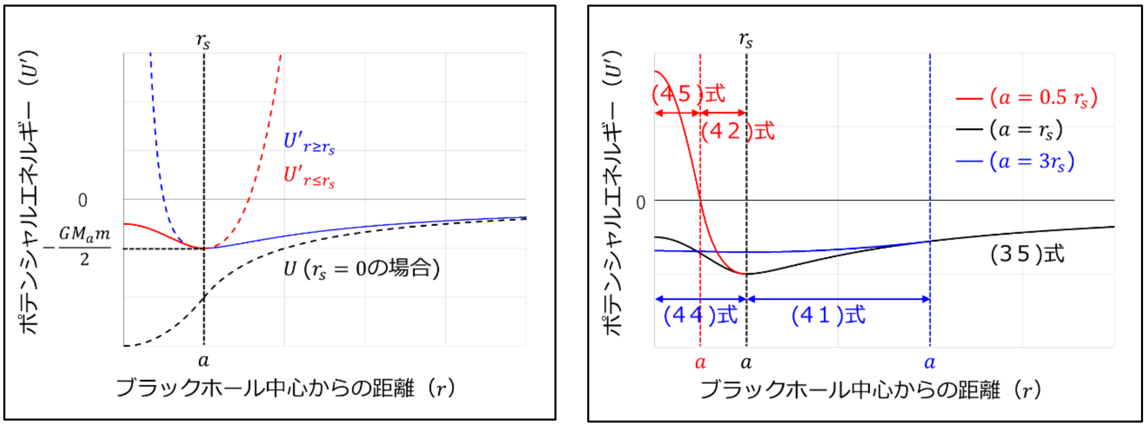

図 13　特殊相対性理論的ポテンシャルエネルギー

例えば、$a \ll r_s$（$a/r_s \to 0$）のとき(45)式は

$$
U'_{r(\le a)\ll r_s}(0) = \left(\frac{3}{2}\left(\frac{r_s}{a}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{r_s}\right) - \frac{5}{2} \right) \frac{GM_{r_s} m}{r_s} \to \infty \tag{46}
$$

となるが、天体がさらに収縮するにしたがってエネルギーが蓄積されていくことを意味している。

6.4　原子・核物理学などへの展開

6.4.1　クーロンポテンシャルとの関係性

図 13 は実験的に報告されている核力と特徴がよく似ていることから、本解釈は原子・核物理などへ展開できる可能性がある。そこで、万有引力の法則をクーロンの法則へ単純に当てはめてみよう。　※角運動量の寄与については今後の検討課題としたい。

まず(37)式（ニュートン力学的なシュワルツシルト半径）にならって、水素原子のクーロン力によるシュワルツシルト半径が

$$m_e c^2 = \frac{ke^2}{r_{s\_e}} \rightarrow r_{s\_e} = \frac{ke^2}{m_e c^2} \qquad (47)$$

（r_{s_e}：水素原子のクーロン力によるシュワルツシルト半径、m_e：電子質量、k：クーロン定数）であるとする。重力による陽子（m_p：陽子の静止質量）のシュワルツシルト半径は$r_s = Gm_p/c^2$（(37)式参照）となることから、クーロン力と重力によるシュワルツシルト半径の関係は

$$r_s = \frac{Gm_p m_e}{ke^2} r_{s\_e} \qquad (48)$$

となる。まず、(35)式（$r \geq r_s$のときのポテンシャルエネルギー）に(48)式を代入すると

$$U'_{r \geq r_s}(r) = \left(\left(\frac{Gm_p m_e}{ke^2}\right)\frac{r_{s\_e}}{2r^2} - \frac{1}{r}\right) Gm_p m_e \qquad (49)$$

となる。さらに、$Gm_p m_e = \left(Gm_p m_e/ke^2\right) ke^2$と置き換えて代入すると

$$U'_{r \geq r_s}(r) = \left(\left(\frac{Gm_p m_e}{ke^2}\right)\frac{r_{s\_e}}{2r^2} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{Gm_p m_e}{ke^2}\right) ke^2$$

$$= \left(\left(\frac{Gm_p m_e}{ke^2}\right)^2 \frac{r_{s\_e}}{2r^2} - \left(\frac{Gm_p m_e}{ke^2}\right)\frac{1}{r}\right) ke^2 \qquad (50)$$

となる。ここで、$r = \left(Gm_p m_e/ke^2\right)\overline{r}$とすると、クーロンポテンシャル$Q$は

・$r_{s_e} \leq r$のとき

$$U'_{\overline{r} \geq r_{s\_e}}(\overline{r}) = \left(\frac{r_{s\_e}}{2\overline{r}^2} - \frac{1}{\overline{r}}\right) ke^2 \rightarrow Q'_{r \geq r_{s\_e}}(r) = \left(\frac{r_{s\_e}}{2r^2} - \frac{1}{r}\right) ke^2 = \left(1 - \frac{r_{s\_e}}{2r}\right) Q(r) \qquad (51)$$

と変換される。また

・$a \leq r \leq r_{s_e}$のとき

$$Q'_{(a \leq) r \leq r_{s\_e}}(r) = \left(\left(\frac{r}{{r_{s\_e}}^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_{s\_e}} - \frac{1}{r_{s\_e}}\right) - \frac{1}{2r_{s\_e}}\right) ke^2 \qquad (52)$$

となる。また、(45)式を変換すると

$$U'_{\overline{r}(\leq a) \leq r_{s\_e}}(\overline{r}) = -\left\{\left(\left(\frac{Gm_p m_e}{ke^2}\right)^3 \frac{\overline{r}^4}{4a^3 {r_{s\_e}}^2} - \left(\frac{Gm_p m_e}{ke^2}\right)^3 \frac{\overline{r}^2}{2a^3} + \left(\frac{Gm_p m_e}{ke^2}\right)\frac{3}{2a} + \left(\frac{Gm_p m_e}{ke^2}\right)\frac{3a}{4{r_{s\_e}}^2} - \frac{2}{r_{s\_e}}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2r_{s\_e}}\right\} ke^2 \qquad (53)$$

となるが、$a = \left(Gm_p m_e/ke^2\right)\overline{a}$とすると

・$r \leq a \leq r_{s_e}$のとき

$$U'_{\overline{r}(\leq \overline{a}) \leq r_{s\_e}}(\overline{r}) = \left\{\left(\frac{\overline{r}^4}{4\overline{a}^3 {r_{s\_e}}^2} - \frac{\overline{r}^2}{2\overline{a}^3} + \frac{3}{2\overline{a}} + \frac{3\overline{a}}{4{r_{s\_e}}^2} - \frac{2}{r_{s\_e}}\right) - \frac{1}{2r_{s\_e}}\right\} ke^2$$

$$\rightarrow Q'_{r(\leq a) \leq r_{s\_e}}(r) = \left\{\left(\frac{r^4}{4a^3 {r_{s\_e}}^2} - \frac{r^2}{2a^3} + \frac{3}{2a} + \frac{3a}{4{r_{s\_e}}^2} - \frac{2}{r_{s\_e}}\right) - \frac{1}{2r_{s\_e}}\right\} ke^2 \qquad (54)$$

となる。同様の手順にて

・$r_{s_e} \leq r \leq a$のとき

$$Q'_{(a \geq) r \geq r_{s\_e}}(r) = \left(\frac{r^2}{2a^3} - \frac{r r_{s\_e}}{a^3} - \frac{1}{2a} + \frac{r_{s\_e}}{a^2} + \frac{r_{s\_e}}{2a^2} - \frac{1}{a}\right) ke^2 \qquad (55)$$

・$r \leq r_{s_e} \leq a$のとき

$$Q'_{r \leq r_{s\_e}(\leq a)}(r) = \left\{\left(\frac{r^4}{4a^3 {r_{s\_e}}^2} - \frac{r^2}{2a^3} + \frac{{r_{s\_e}}^2}{4a^3}\right) + \left(-\frac{{r_{s\_e}}^2}{2a^3} - \frac{3}{2a} + \frac{3r_{s\_e}}{2a^2}\right)\right\} ke^2 \tag{56}$$

となる。つまり、原子核近傍（$r \leq r_{s\_e}$）の陽子と電子には「斥力」が働き、一方で電子同士には$r \leq 2r_{s_e}$（換算質量が$\frac{1}{2}m_e$であるため）で「引力」が働くことを示唆している。

6.4.2　価電子ポテンシャルとの関係性

電子の古典半径($r_e = ke^2/m_e c^2$)とボーア半径（$a_B = \hbar^2/m_e ke^2$）には、$r_e = \alpha^2 a_B$（α：微細構造定数）の関係[14]があることが知られている。$r_{s_e}(= ke^2/m_e c^2)$と電子の古典半径r_eは等しいとしているため

$$r_{s\_e}(= r_e) = a_0 \alpha^2 \xrightarrow{\text{両辺を}2/ke^2\text{倍}} \frac{2r_{s\_e}}{ke^2} = \frac{2a_0}{ke^2}\alpha^2$$

$$\xrightarrow{\text{両辺の逆数に}\alpha^2\text{倍}} Q'(r_{s\_e})\alpha^2 = \frac{ke^2}{2a_0}\left(\cong \frac{511\ \mathrm{keV}}{2} \times \alpha^2 \cong -13.6\ \mathrm{eV}\right) \tag{57}$$

となり、水素のイオン化エネルギー（の負）と等しいことから、$Q'(r)\alpha^2 = V'(r)$（V：価電子ポテンシャル）とすると

・$a_B \leq r$のとき

$$V'_{r \geq a_B}(r) = \left(\frac{a_B}{2r^2} - \frac{1}{r}\right) ke^2 \tag{58}$$

・$\vec{a} \leq r \leq a_B$のとき　※$\vec{a}(= a/\alpha^2)$は擬核半径と定義するが、詳細について今後議論したい。

$$V'_{(\vec{a} \leq) r \leq a_B}(r) = \left(\left(\frac{r}{{a_B}^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{a_B} - \frac{1}{a_B}\right) - \frac{1}{2a_B}\right) ke^2 \tag{59}$$

となる。また、$a = \alpha^2 \vec{a}$を用いると

・$r \leq \vec{a} \leq a_B$のとき

$$V'_{r(\leq \vec{a}) \leq a_B}(r) = \left\{\left(\frac{r^4}{4\vec{a}^3 {a_B}^2} - \frac{r^2}{2\vec{a}^3} + \frac{3}{2\vec{a}} + \frac{3\vec{a}}{4{a_B}^2} - \frac{2}{a_B}\right) - \frac{1}{2a_B}\right\} ke^2 \tag{60}$$

・$a_B \leq r \leq \vec{a}$のとき

$$V'_{(\vec{a} \geq) r \geq a_B}(r) = \left(\frac{r^2}{2\vec{a}^3} - \frac{r a_B}{\vec{a}^3} - \frac{1}{2\vec{a}} + \frac{a_B}{\vec{a}^2} + \frac{a_B}{2\vec{a}^2} - \frac{1}{\vec{a}}\right) ke^2 \tag{61}$$

・$r \leq a_B \leq \vec{a}$のとき

$$V'_{r \leq a_B(\leq \vec{a})}(\overline{r}) = \left\{\left(\frac{\overline{r}^4}{4\vec{a}^3 {a_B}^2} - \frac{\overline{r}^2}{2\vec{a}^3} + \frac{{a_B}^2}{4\vec{a}^3}\right) + \left(-\frac{{a_B}^2}{2\vec{a}^3} - \frac{3}{2\vec{a}} + \frac{3a_B}{2\vec{a}^2}\right)\right\} ke^2 \tag{62}$$

となる。ポジトロニウム（電子と陽電子[15]の結合体）[16]の場合、ボーア半径は$2a_B$、イオン化エネルギーは$\frac{1}{2}V'_{r \geq a_B}(a_B)$となることが知られている。　※また、(62)式を用いると超伝導現象におけるクーパー対形成を解釈できる可能性がある（本プレプリント「PDF_ver.6」参照）が今後の議論としたい。

以上から、クーロン力によるポテンシャルエネルギーは図 14 のようになる。

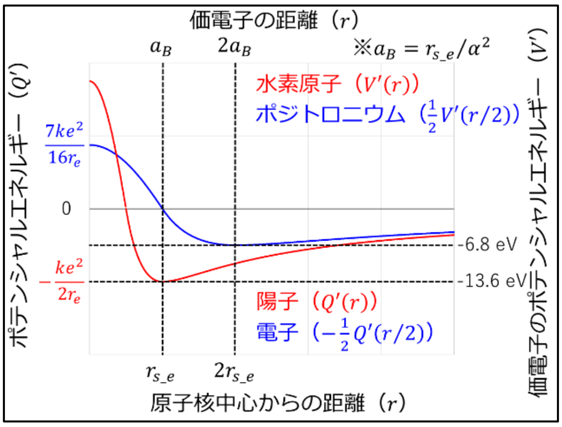

図 14　クーロン力によるポテンシャルエネルギー

6.4.3　検証

6.4.3.1　放射線（β壊変、β^+壊変）

では、得られた式を用いてまず放射線について考えてみよう。例えば、中性子、トリチウム、炭素 14、ニッケル 63 のβ壊変およびフッ素 18 のβ^+壊変における核反応式[17]は

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e + 782\ \mathrm{keV} \qquad (63)$$

$$^3_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + e^- + \bar{\nu}_e + 18.6\ \mathrm{keV} \qquad (64)$$

$$^{14}_6\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_7\mathrm{N} + e^- + \bar{\nu}_e + 156\ \mathrm{keV} \qquad (65)$$

$$^{63}_{28}\mathrm{Ni} \rightarrow {}^{63}_{29}\mathrm{Cu} + e^- + \bar{\nu}_e + 67.0\ \mathrm{keV} \qquad (66)$$

$$^{18}_9\mathrm{F} \rightarrow {}^{18}_8\mathrm{O} + e^+ + \nu_e + 634\ \mathrm{keV} \qquad (67)$$

（n：中性子、p：陽子、e^-：電子、$\bar{\nu}_e$：反電子ニュートリノ、e^+：陽電子、ν_e：電子ニュートリノ）

である。陽子のクーロン力によるシュワルツシルト半径r_{s_e}は$2.8179403205 \times 10^{-15}$ mであるが、Zの原子番号の原子核に対しては

$$Q'_{r(\le a)\le r_{s\_e}}(0)/Z = \left(\frac{3}{2}\left(\frac{Zr_{s\_e}}{a}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{Zr_{s\_e}}\right)-\frac{5}{2}\right)\frac{ke^2}{Zr_{s\_e}} \cong m_e c^2 + E_{\beta^-} \qquad (68)$$

（Z：原子番号、E_{β^-}：β線の最大エネルギー）

となり、原子核内部（$r \le a$）で生まれた電子が「娘核種のクーロン力」により放出（$Q'(0)/Z$が最大エネルギー）されると考える。$Q'(0)$は(54)式が$r = 0$のときである。シュワルツシルト半径r_{s_e}と電気素量eは原子番号Zに比例する。また、β壊変前は「親核種のクーロンポテンシャルが価電子により十分遮蔽されて 0 価である」とみなすと、「β壊変の瞬間に娘核種は+1 価に帯電」しているように見えることからQ'/Zとなる。ちなみに、β^+壊変においても娘核種が−1 価に帯電しているように見えることから、同様に陽電子は放出される。

娘核種の原子核半径はデータベース Livechart[18]から抽出し、0.8783×10^{-15} m（p）、1.9661×10^{-15} m（${}^{3}_{2}\mathrm{He}$）、2.5582×10^{-15} m（${}^{14}_{7}\mathrm{N}$）、3.8823×10^{-15} m（${}^{63}_{29}\mathrm{Cu}$）、2.7726×10^{-15} m（${}^{18}_{8}\mathrm{O}$）を用いた。そして、(68)式を計算すると（Supplement-1_XLSX「クーロンポテンシャル」シート参照）、nは1301 keV（Ref. 15 value 1293 keV）、${}^{3}_{1}\mathrm{H}$は526.7 keV（Ref. 15 value 529.6 keV）、${}^{14}_{6}\mathrm{C}$は668.9 keV（Ref. 15 value 667 keV）、${}^{63}_{28}\mathrm{Ni}$は512.9 keV（Ref. 15 value 578 keV）、${}^{18}_{9}\mathrm{F}$は625.3 keV（Ref. 15 value 1145 keV）となり、β壊変におけるβ線の最大エネルギーと電子の静止質量の和（$E_{\beta^-} + 511$ keV）におおよそ近い値を得ることができた。（一方で、β^+壊変である${}^{18}_{9}\mathrm{F}$は陽電子質量511 keVを加算しない634 keVに近い。）ただし、このβ壊変モデルは全ての核種に適応できるわけではないが、その理由の一つとして親核種が p 軌道などの角運動量を持つ場合、軌道電子による原子核のクーロン遮蔽が十分でないことが要因なのかもしれない。

6.4.3.2　核力（結合エネルギー）

原子番号Zと質量数Aにはおおよそ

$$Z \cong \frac{A}{2 + XA^{2/3}} \qquad (69)$$

の関係があり、安定同位体では$X \cong 0.015$となることが知られている。今回、データベース NuDat3[19]から抽出された「全核種からのおおよそ平均」を優先して$X = 0.012$（図 15（左））とした。また、原子核半径aは文献[20]（半経験的な公式）から

$$a = \left(0.9071 + \frac{1.105}{A^{2/3}} - \frac{0.548}{A^{4/3}}\right) A^{1/3} \qquad (70)$$

を用いた。では、単純に$Q'(0)$が原子核の結合エネルギーの総和であり、質量数Aで除した$Q'(0)/A$が核子あたりの結合エネルギーであると考えてみよう。すると

$$Q'_{r(\le a) \le r_{s\_e}}(0)/A = \left(\frac{3}{2}\left(\frac{Zr_{s\_e}}{a}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{Zr_{s\_e}}\right) - \frac{5}{2}\right)\frac{ke^2}{Ar_{s\_e}}$$

$$\xrightarrow{Z^2/A\text{で括る}} Q'_{r(\le a) \le r_{s\_e}}(0)/A = \left(\frac{Z^2}{A}\right)\left(\frac{A^{2/3}}{Z}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{Zr_{s\_e}}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{a}{Zr_{s\_e}}\right)\right)\frac{ke^2}{A} \qquad (71)$$

と書き換えることができ、(71)式の中にZ^2/Aと$A^{2/3}/Z$の二つの因子がでてくる。自発核分裂の近似的な条件[21]として$Z^2/A \ge 45$が知られていることからZ^2/Aを「反発」の因子と考えると、$A^{2/3}/Z$はおおよそ$A^{1/3} \propto a$であることから表面自由エネルギー（J/m²）の反比例と考えると「収縮」の因子となり、この二つの因子により反発と収縮のバランスをとっていると考えることができるかもしれない。仮に、$A^{2/3}/Z = constant (\cong 20.9)$とするならば

$$Q'_{r(\le a) \le r_{s\_e}}(0)/A = \left(\frac{3}{2}\left(\frac{Zr_{s\_e}}{a}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{Zr_{s\_e}}\right) - \frac{5}{2}\right)\frac{ke^2}{Ar_{s\_e}}$$

$$\xrightarrow{A^{2/3}/Z\text{で括る}} Q'_{r(\le a) \le r_{s\_e}}(0)/A = \frac{A^{2/3}}{Z}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{Zr_{s\_e}}{a}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{Zr_{s\_e}}\right) - \frac{5}{2}\right)\frac{Zke^2}{A^{5/3}r_{s\_e}}$$

$$\xrightarrow{A^{2/3}/Z=constant(\cong 20.9)} Q'_{r(\le a)\le r_{s\_e}}(0)/A \cong 20.9\times\left(\frac{3}{2}\left(\frac{Zr_{s\_e}}{a}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{Zr_{s\_e}}\right)-\frac{5}{2}\right)\frac{Zke^2}{A^{5/3}r_{s\_e}} \qquad (72)$$

となり、偶然にも図 15（右）のように最も安定な同重体の実験値（および Bethe-Weizsäcker の公式[22] E_{B-W}/A）を良く近似することができた。よって、原子核の結合エネルギーはクーロンポテンシャルQ'に表面自由エネルギーが一定となる拘束条件が働くものであることが示唆される。※ただし、(72)式は安定核種に対応しているため、全核種を近似するにはハイゼンベルクの谷を考慮する必要がある。

また、低質量数側（$A < 50$）で(72)式を上回るエネルギーを持っている 7 つの核種（図 15（右）の赤点。${}^{1}_{1}\mathrm{H}$以外は魔法数[23]（2 or 6 or 8）を持っている。魔法数には他にも 20、28、50、82、126 などが知られている）について、本公式とのエネルギー差は 1.39 MeV（${}^{1}_{1}\mathrm{H}$）、3.03 MeV（${}^{4}_{2}\mathrm{He}$）、0.68 MeV（${}^{5}_{2}\mathrm{He}$）、0.43 MeV（${}^{5}_{3}\mathrm{Li}$）、0.79 MeV（${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$）、0.43 MeV（${}^{12}_{6}\mathrm{C}$）、0.18 MeV（${}^{16}_{8}\mathrm{O}$）であり、${}^{4}_{2}\mathrm{He}$が最大のエネルギー差を持っている。このエネルギー差が大きいほど表面の拘束力が強く働いていることになるため、α壊変では${}^{4}_{2}\mathrm{He}$（${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ではなく）の原子核が放出されるのだと考えられる。

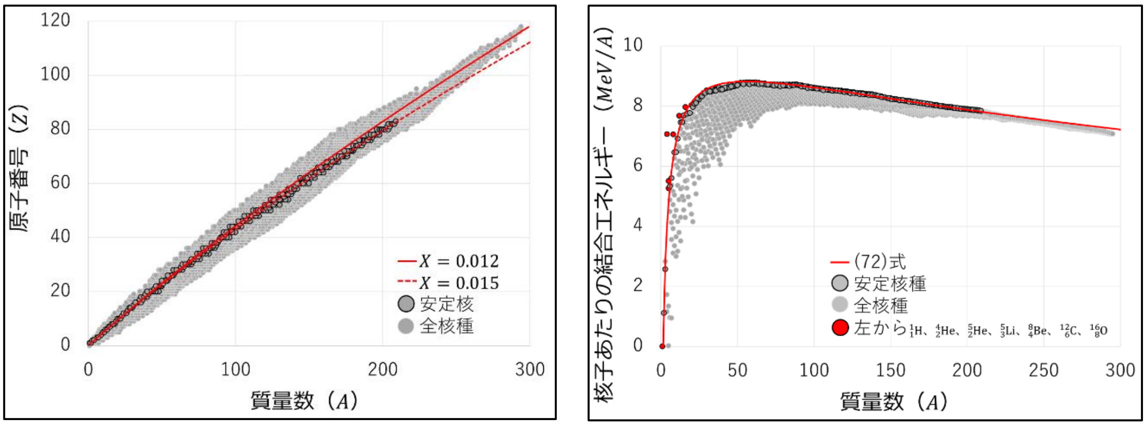

図 15　質量数に対する原子番号（左）と核子あたりの結合エネルギー（右）の関係

6.4.4　新たな仮説の提案

これまでの議論から 3 つの仮説を立ててみよう。　※議論の詳細については今後としたい。

6.4.4.1　核力の起源は電荷

まず、(72)式を用いて${}^{2}_{1}\mathrm{H}$、${}^{4}_{2}\mathrm{He}$、${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$、${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$、${}^{238}_{92}\mathrm{U}$の結合エネルギー（Supplement-2_XLSX「結合エネルギー」シート参照）を計算してみよう。${}^{2}_{1}\mathrm{H}$は 0.146 MeV（実験値は 1.11 MeV）、${}^{4}_{2}\mathrm{He}$は 5.87 MeV（実験値は 7.07 MeV）、${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$は 9.13 MeV（実験値は 8.79 MeV）、${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$は 7.26 MeV（実験値は 7.87 MeV）、${}^{238}_{92}\mathrm{U}$は 6.87 MeV（実験値は 7.57 MeV）となり、実験値と一致しない。この理由の一つとして、今回は(69)式で$X = 0.012$を用いたため安定核の集合から若干外れてしまっているからであると考えられる。例えば、$X = 0.015$のときは$A = 208$に対して$Z \cong 82.3$となるが、$X = 0.012$では$A = 208$に対して$Z \cong 85.9$となり、${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$では原子番号$Z(= 82)$に対し見かけ上増加（$Z'(\cong Z + 3.6)$）していることになる。つまり、$A^{2/3}/Z = constant$が成立するためには「原子番号Zがフレキシブルに変化」しなければならない。そこで

$$m_e c^2 (= 8.1871057768 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}) = \frac{ke^2}{r_e} (= 8.1871057768 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}) \tag{73}$$

（r_e：電子の古典半径（$= 2.8179403205 \times 10^{-15}$ m））

の関係（各数値は 2018 CODATA recommended values[14] を参照）から仮説を立ててみよう。質量がエネルギーに変換されることはよく知られているが、これは電荷がエネルギーに変換されることと同じであることを意味すると同時に、「質量が電荷に変換されうる」のではないだろうか。つまり、拘束力の起源は質量が変換された電荷であり、一方で変換された電荷分だけ質量欠損が生じていると考えることができるかもしれない。この仮説をもとに、図 16（左）の実験値（最大エネルギーをもつ同重体。Livechart から抽出）から単純に近似してみると

$$\Delta mc^2 \cong \frac{20 \times 2Z'_{X=0.012\sim0.018} - Z}{A} m_e c^2 \tag{74}$$

$$Z'_{X=0.012\sim0.018} \cong \frac{A-3}{2 + X(A-3)^{2/3}} \tag{75}$$

（Δmc^2：電子換算（質量欠損）エネルギー、$Z'_{X=0.012\sim0.018}$：見かけ上の原子番号（$X = 0.012\sim0.018$）、Z：実際の原子番号（$X \cong 0.015$））

となり、$X = 0.012$はAが 150 付近まではよく近似できる。一方で、Aが 150 を超えると次第にずれるようになり（${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$を最後に安定核は消滅）、図 16（右）のように次第に$X = 0.018$へシフトしていく（Supplement-2_XLSX「結合エネルギー」シート参照）。核子間で「電荷対」が発現するならばおよそ 20 組の電荷対となる。このように「核力は質量が電荷に変換されたものである」と考えられるのではないだろうか。

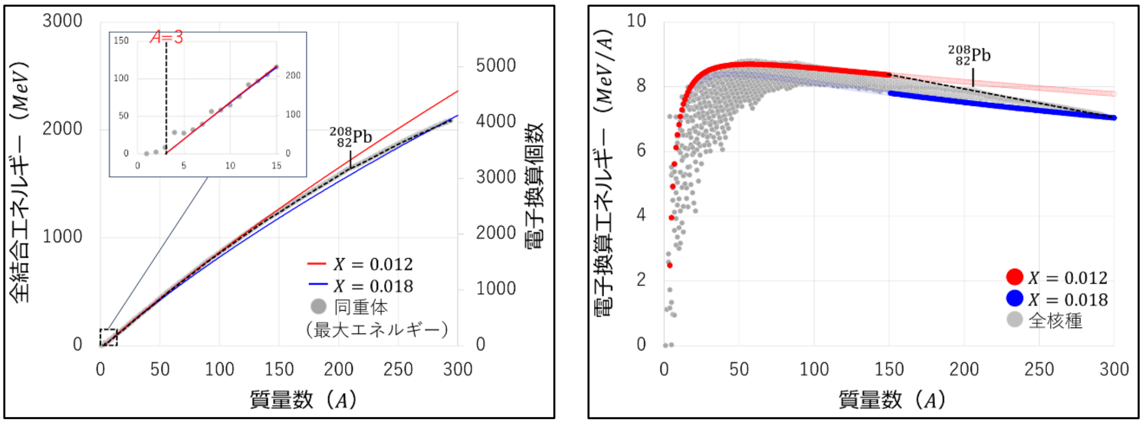

図 16　質量数に対する電子換算個数（左）と電子換算エネルギー（MeV/A）（右）の関係

では、電荷対発現の規則性について単純にモデル化してみよう。「電荷対が発現するのは核子（球体）が接触している点」と考えると、核子の接触点の数（増加分）は$A = 1$で 0、$A = 2$で 1、$A = 3$で 2、$A \geq 4$で 3 となることから、図 16（左）のように(75)式の横軸は 3 だけシフト（$A - 3$）する。つまり、原子核は面心立法格子構造なのかもしれない。

また参考までに、図 17 のように全結合エネルギーが最大となる同重体の微分値（Livechart から抽出した実験値から算出）はAが偶数とAが奇数で上下に分離しており、おおよそ$40 < A < 260$においては完全に「交互」になる。（そもそも$A > 260$では抜けている核種が多数存在）つまり、

電荷対発現にはAが偶数（さらにZとNも共に偶数）と奇数でギャップが生じるが、Aが小さい場合、核子あたりの結合エネルギー（MeV/A）には大きな寄与となることから、このギャップを考慮する必要がある。 ※ちなみに、この規則性は対相関（ペアリング）として一般的に知られている。

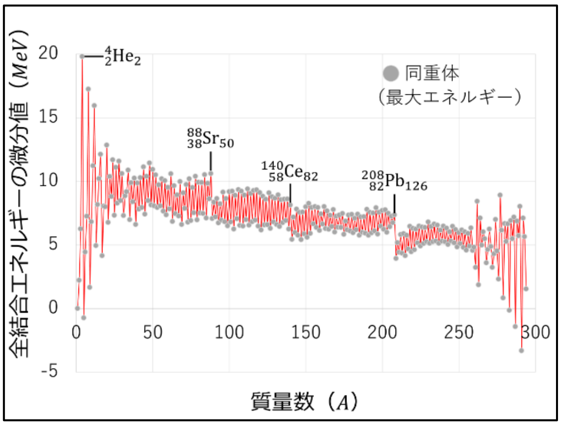

図 17 （参考）最大エネルギーをもつ同重体の質量数に対する全結合エネルギーの微分値の関係

6.4.4. 陽子は電子と陽電子（もしくはどちらか）の集合体

電子同士および陽電子同士は距離が$2r_{s_e}$より近づくと「引力」が働く（図 14 参照）ということは、超高圧・高密度中で電子もしくは陽電子の集合体が生まれることが予想される。さらに、核力の起源が電子もしくは陽電子であるならば、「陽子は電子もしくは陽電子の集合体である」という仮説も得られる。

仮に、$A^{2/3}/Z\left(=\left(2+XA^{2/3}\right)/A^{1/3}\right)$について計算してみると$X=0.012$のとき$A=2152$、$X=0.015$のとき$A=1540$で最小値となり、その平均値は$A=1846$である。これは電子と陽子の質量比約 1836 に近いことからXの値を調整してみると、$X=4/300\,(=0.01333\cdots)$としたときに最小値が$A=1837$となった。ここから非常にラフに考えてみると、1837 個の陽電子の集合体のうち 1 つの陽電子が電荷を維持することにより陽子の電子質量比は 1836(=1837-1)となり、中性子は陽子に電子が取り込まれてさらに電荷も質量に変換されることにより 1839(=1837+2)となる。ただし、これら質量比が正確に整数とならない要因はスピン等にエネルギー分配されるからなのかもしれない。 ※この$X=4/300$には全く根拠がないが、仮に(69)式を$Z\cong 600\times X'^{3/2}A/\left(2+X'A^{2/3}\right)$（その場合は$A^{2/3}/Z\cong 25$になる）と考えると、$X'=4/300$のとき(72)式とほぼ一致する。つまり、本来こちらを用いて議論するべきだったかもしれない。また本題から外れるので説明は控えるが、結合エネルギーにハイゼンベルクの谷を考慮（Supplement-2_XLSX「(72)式補正案」シート参照）する場合には、核図表の陽子や中性子のドリップラインを部分的に近似できるこちらの方が都合がよい。

6.4.4.3 原子核の空洞形成

また、少しだけ原子核の構造について考えてみよう。図 18 にデータベース Livechart から抽出した原子核半径（および(70)式）を示す。ここで

$$a = \lambda A^{1/3} + \mathrm{bias} \qquad (76)$$

として、$\lambda = 0.8783 \times 10^{-15}$ m（陽子半径）、$\mathrm{bias} = 0.35 \times 10^{-15}$ mとすると$A > 50$において実験値（および(70)式）をよく近似できる。つまり、原子核は中心部に0.35×10^{-15} mの「空洞を形成する液滴のようなもの」と考えるべきなのかもしれない。　※そもそも、半径を 1 とする 4 つの球体の中心にはおよそ半径 0.225 の球体が入る空間ができるが、ここから非常にラフに見積もると 0.725(=0.225+0.5)と 1.725(=2+0.225-0.5)の比はおよそ 0.42 であることから$0.8783 \times 10^{-15}\ \mathrm{m} \times 0.42 \cong 0.37 \times 10^{-15}$ mとなり、$\mathrm{bias} = 0.35 \times 10^{-15}$ mに近い。

β壊変（およびβ^+壊変）に対するβ線の最大エネルギーや核子あたりの結合エネルギーが原子核の中心のクーロンポテンシャル（$Q'(0)$）に依存する（6.4.3.1、6.4.3.2 参照）と考えるならば、この議論を深めることで実験値の再現性を高めることができるかもしれない。また、魔法数の寄与については殻模型[24]により説明できるとのことであるが、この仮説と殻模型との関係性については今後の議論としたい。

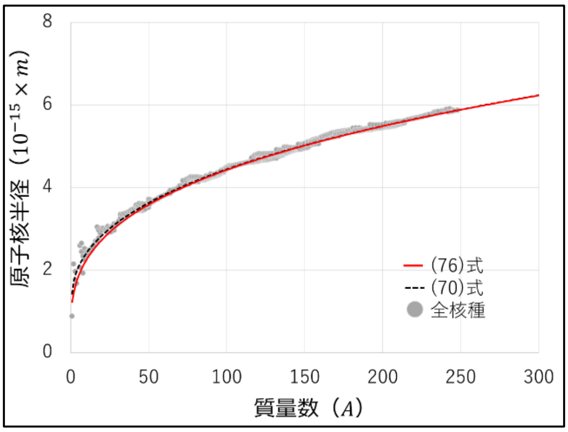

図 18　質量数と原子核半径の関係

7.　ブラックホール宇宙のインフレーション

ブラックホール宇宙のインフレーションについてもニュートン力学と特殊相対性理論から議論してみよう。ブラックホール宇宙モデルではブラックホールの中にブラックホールが存在することになることから、親ブラックホールと子ブラックホールのような各世代のブラックホールについて議論しなければならない。ブラックホールは周囲の天体などを取り込み膨張することができることから、各世代間での質量の交換が考えられる。

7.1 ニュートン力学的考察

まず、(7)式（相対屈折率を考慮したシュワルツシルト半径の関係式）に対して質量の増減を考慮すると、ニュートン力学的に次のような関係式で表現することができる。

$$r_s + \Delta r_s = \frac{2G\left(M_{R_s} + \Delta M + 4\pi r_s^2 \rho_{\Delta r_s} \Delta r_s\right)}{(nc_n)^2} \qquad (77)$$

（ΔM：ブラックホール宇宙が周囲（親ブラックホール）から取り込んだ質量、Δr_s：シュワルツシルト半径の増減、$\rho_{\Delta r_s}$：親ブラックホールの密度）

また、(77)式に(7)式$(nc_n)^2 = 2GM_{R_s}/r_s$を代入し、(2)式（ブラックホール全質量の式）を用いてΔr_sに対して整理すると

$$\Delta r_s = \frac{r_s \Delta M}{M_{R_s} - 4\pi r_s^3 \rho_{\Delta r_s}} = \frac{\Delta M}{4\pi r_s^2 \left(\rho/3 - \rho_{\Delta r_s}\right)} \tag{78}$$

となる。例えば、ブラックホールが誕生した直後（初期のブラックホール宇宙）は$\rho/3 \gg \rho_{\Delta r_s}$であるため、周囲の物質を取り込むことで膨張するとともに密度が低下する。一方で、ブラックホールが成長（「巨大低密度ブラックホール」化）して$\rho/3 < \rho_{\Delta r_s}$となると、(78)式の$\Delta M$は負である必要があり、周囲の物質を取り込むことでは膨張することができなくなる。そこで巨大低密度ブラックホールに成長した宇宙の更なる膨張については次のように解釈される。そもそも子ブラックホールの質量は特殊相対性理論的に見積もることができないため、子ブラックホールの誕生そのものがM_{R_s}の減少（ΔMが負）である。

7.2 特殊相対性理論的考察

次に、特殊相対性理論的に議論する。まず、ニュートン力学的には

$$M_{R_s} = \int_0^{R_s} 4\pi r^2 \rho \mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi\rho {R_s}^3 \tag{79}$$

（R_s：ブラックホール宇宙の半径）

である。r_sからR_sまでを積分したブラックホール宇宙の質量をM'_{R_s}とすると

$$M'_{R_s} = \int_{r_s}^{R_s} 4\pi r^2 \rho' \mathrm{d}r = \int_{r_s}^{R_s} \frac{4\pi r^2 \rho}{\sqrt{1 - r_s/r}} \mathrm{d}r \tag{80}$$

（r_s：子ブラックホールの半径）

となる。ただし、ρ'は（25)式（特殊相対性理論的密度の式）を（18)式（ブラックホール外部の相対時間の式）を用いて変換している。ここで$r_s/r = s$として計算[13]すると

$$M'_{R_s} = -4\pi\rho \int_{\frac{r_s}{R_s}}^{1} \frac{{r_s}^2}{s^2\sqrt{1-s}}\left(-\frac{r_s}{s^2}\mathrm{d}s\right) = 4\pi\rho {r_s}^3 \int_{\frac{r_s}{R_s}}^{1} \frac{1}{s^4\sqrt{1-s}}\mathrm{d}s$$

$$= 4\pi\rho {r_s}^3 \left[-\frac{1}{3s^3}\sqrt{1-s} - \frac{5}{12s^2}\sqrt{1-s} - \frac{5}{8s}\sqrt{1-s} - \frac{5}{8}\tanh^{-1}\sqrt{1-s}\right]_{\frac{r_s}{R_s}}^{1}$$

$$= 4\pi\rho {r_s}^3 \left(\frac{{R_s}^3}{3{r_s}^3}\sqrt{1 - r_s/R_s} + \frac{5{R_s}^2}{12{r_s}^2}\sqrt{1 - r_s/R_s} + \frac{5R_s}{8r_s}\sqrt{1 - r_s/R_s} + \frac{5}{8}\tanh^{-1}\sqrt{1 - r_s/R_s}\right) \tag{81}$$

となる。さらに、変動したブラックホール宇宙の半径を$R_s + \Delta R_s$として、$M'_{R_s+\Delta R_s} = M_{R_s}$となる場合について考えると

$$M'_{R_s+\Delta R_s} = M_{R_s} \ \rightarrow \ \int_{r_s}^{R_s+\Delta R_s} 4\pi r^2 \rho' \mathrm{d}r = \int_0^{R_s} 4\pi r^2 \rho \mathrm{d}r \tag{82}$$

（$R_s + \Delta R_s$：変動したブラックホール宇宙の半径、r_s：子ブラックホールの半径）

となり、これを計算すると$R_s + \Delta R_s$とr_sの関係は図 19（右）のようになる。

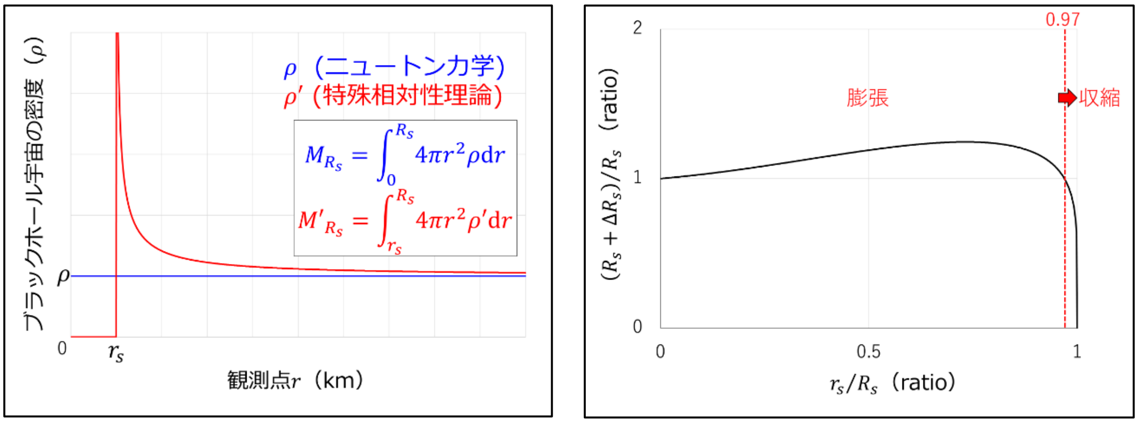

図 19　ブラックホール宇宙の密度（左）と子ブラックホールの半径に対する変動したブラックホール宇宙の半径の関係（右）

図 19（右）は$(R_s + \Delta R_s)/R_s > 1$のとき「子ブラックホール」の成長とともに「ブラックホール宇宙」が膨張していること示している。一方で、$r_s/R_s > 0.97$となるとブラックホール宇宙は収縮する。つまり、「ブラックホール宇宙」は「子ブラックホール」の誕生・成長すると「親ブラックホール」から質量を獲得して膨張することができる。一方で、「子ブラックホール」がおよそ90%（$\cong 0.97^3$）以上にまで成長すると、今度は「子ブラックホール」に質量を奪われて「ブラックホール宇宙」は消滅する。（「子ブラックホール」と重なり合う）

8.　ブラックホール宇宙モデル

8.1　インフレーションのストーリー

以上の考察から、図 20 のように(78)式は子ブラックホールの誕生（$\Delta M < 0$）により巨大低密度ブラックホール宇宙も膨張できるようになる。ちなみに、$\rho = \rho_{\Delta r_s}$では (3)式（シュワルツシルト半径と密度の関係式）よりr_sも一致することからからブラックホール宇宙とその外側の時空間（親ブラックホール宇宙）は重なり合う。例えば、仮に加速器などで超小型のブラックホールが誕生したとすると、周囲から質量を取り込むことですぐに低密度化してしまい、我々の宇宙と重なり合うことになる。

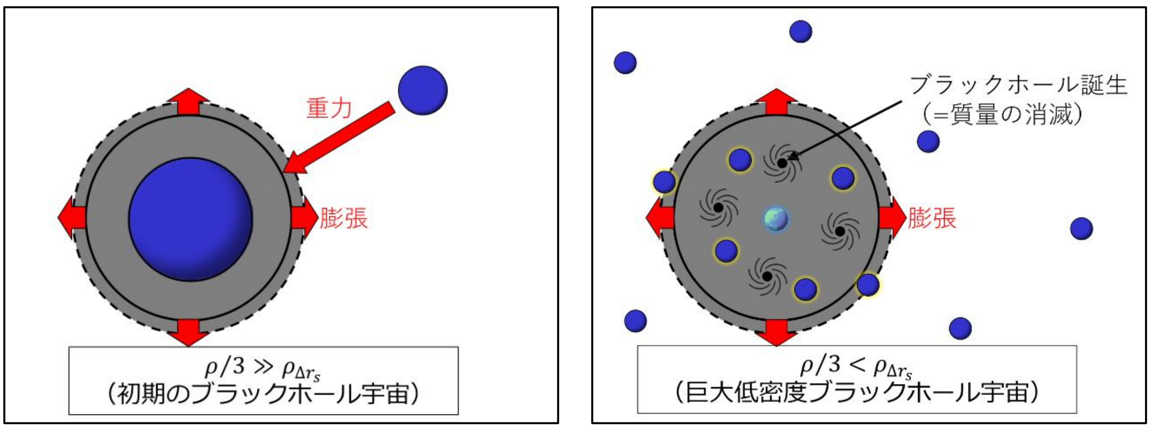

図 20 初期ブラックホール宇宙のインフレーション（左）と成長したブラックホール宇宙（巨大低密度化）のインフレーション（右）

8.2　インフレーションと時間のストーリー

また、(78)式から導かれる考察について一例を紹介する。(78)式に対する単位時間当たりの変化（Δt）について考えると

$$\frac{\Delta r_s}{\Delta t}=\frac{1}{4\pi r_s^2\left(\rho/3-\rho_{\Delta r_s}\right)}\frac{\Delta M}{\Delta t} \qquad (83)$$

となり、宇宙が光速で膨張していることを考えると$\Delta r_s/\Delta t=c$であることから(83)式を整理すると

$$\Delta M=4\pi r_s^2 c\left(\rho/3-\rho_{\Delta r_s}\right)\Delta t \qquad (84)$$

となる。(84)式より、初期のブラックホール宇宙（$\rho/3\gg\rho_{\Delta r_s}$）は周囲の天体を取り込み膨張するとともに時間が経過し、巨大低密度化したブラックホール宇宙（$\rho/3<\rho_{\Delta r_s}$）は子ブラックホールが誕生（$\Delta M<0$）して膨張するとともに時間が経過（$\Delta t>0$）する（図 21）。すなわち、もしも「宇宙の膨張が無ければブラックホール宇宙の時間も進まない」と考えられる。一方で、ブラックホールが周囲の天体を取り込み膨張している瞬間には時間が経過していることになる。

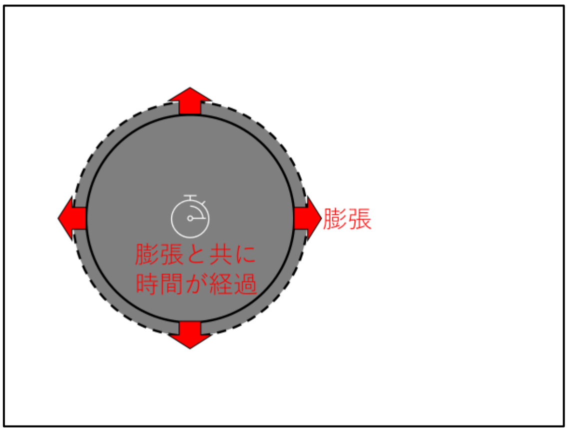

図 21　ブラックホール宇宙は膨張と共に時間が経過する？

8.3　インフレーションはじまりのストーリー

ビッグバン初期には超高圧・高密度で電子と陽電子が存在していたと考えられているが、電子と陽電子には「強い斥力」が働いて互いに弾き飛ばされる一方で、電子同士・陽電子同士は融合して陽子と反陽子が生まれる。圧力・密度低下後には残った陽子と電子が原子を形成する。つまり、マクロ的に考えると「粒子」で構成された銀河と「反粒子」で構成された銀河に分離している可能性も考えられ、我々の銀河は「陽電子過多（陽子が 1837 個の陽電子と仮定するならば)」の「粒子」で構成された銀河に属していることになる。

8.4　観測可能な宇宙の質量の見積もり

最後に、『我々はブラックホールの中に住んでいる？』とするブラックホール宇宙モデルの議論に帰り、観測可能な宇宙の半径Rから観測可能宇宙の全質量Mの値を求めてみよう。(37)式（ニュートン力学的なシュワルツシルト半径）にならって、M_{r_s}を観測可能な宇宙の全質量M、r_sを観測可能な宇宙の半径Rとすると

$$r_s = \frac{GM_{r_s}}{c^2} \rightarrow M = \frac{Rc^2}{G} \qquad (85)$$

となる。よって、宇宙の半径を 138 億光年とするならば、観測上の宇宙の全質量（≅観測可能な宇宙の全質量）は、1.86×10^{53} kg と見積もられる。

9.　結言

今回「宇宙は一つのブラックホール」と解釈する一説について考察し、事象の地平線のシフトを考慮することでブラックホール宇宙モデルを理解することができた。本ブラックホール宇宙モデルは、1960 年代多くの科学者から支持されていた定常宇宙モデル[25]だけでなく、現代宇宙論で最も支持されているビッグバンモデルにも通じるものがある。ただし、本ブラックホール宇宙モデルとビッグバンモデルとの決定的な違いとしては、そのインフレーションにあり、ビッグバンモデルは空間が膨張する（天体同士が遠ざかる）に対し、本ブラックホール宇宙モデルはシュワルツシルト半径が膨張する（必ずしも天体同士は遠ざからない）という点にあり、このことは観測可能な宇宙の外側にも宇宙が続いている可能性を示唆するものであるが、これらを実験的・観測的に実証することは非常に困難であろう。しかしながら、今回得られたような関係式を原子や原子核へと展開して定量性を高めていくことができれば、ブラックホール宇宙という仮説に対する現実味が高まっていくのではないだろうか。

付記

本原稿は、個人的な考察をまとめたものである。

参考文献

[1] The Event Horizon Telescope Collaboration et al., The Astrophysical Journal Letters, 875:L1 (2019), https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7

[2] NASA, https://webb.nasa.gov/

[3] R. A. Alpher, H. Bethe and G. Gamow, Physical Review, 73, 803-804 (1948), https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.803

[4] Nikodem J. Popławski, General Relativity and Gravitation, 53, 18 (2021), https://doi.org/10.1007/s10714-021-02790-7

[5] Charles H. Lineweaver and Vihan M. Patel, American Journal of Physics, 91, 819–825 (2023), https://doi.org/10.1119/5.0150209

[6] 須藤靖（2022）、宇宙は数式でできている、朝日新聞出版、ISBN 978-4-02-295160-1
※https://dot.asahi.com/dot/2022022500042.html?page=1 も参考

[7] A. Sneppen, Scientific Reports, 11, 14247 (2021), https://doi.org/10.1038/s41598-021-93595-w

[8] Paul Davies (2007), The Goldilocks Enigma, First Mariner Books, Houghton Mifflin Harcourt, ISBN 978-0618592265

[9] ESA,

https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Planck/Planck_reveals_an_almost_perfect_Universe

[10] K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 7, 189-196 (1916) ※シュバルツシルト半径 | 天文学辞典 (astro-dic.jp)も参考

[11] A. Einstein, Annalen der Physik, 322, 10, 891-921 (1905), https://doi.org/10.1002%2Fandp.19053221004

[12] E. Hubble, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 15, 3, 168-173 (1929), https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168

[13] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik and A. Jeffrey (2007), Table of Integrals, Series, and Products, 7th ed. Cambridge, MA, USA: Academic Press, ISBN978-0-12-373637-6 ※無理関数の原始関数の一覧 - Wikipedia も参考

[14] 2018 CODATA recommended values ※物理定数 - Wikipedia、プランク単位系 - Wikipedia も参考

[15] C. D. Anderson, Physical Review, 43, 491-494 (1933), https://doi.org/10.1103/PhysRev.43.491 ※陽電子 - Wikipedia も参考

[16] St. Mohorovičić, Astronomische Nachrichten, 253, 4, 93-108 (1934), https://doi.org/10.1002/asna.19342530402 ※ポジトロニウム - Wikipedia も参考

[17] 日本アイソトープ協会（2021）、放射線取扱の基礎、丸善出版、ISBN 4890732837

[18] International Atomic Energy Agency、Livechart データベースから抽出された情報, Livechart - Table of Nuclides - Nuclear structure and decay data

[19] National Nuclear Data Center、NuDat データベースから抽出された情報, NuDat 3

[20] I. Angeli, K.P. Marinova, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 99, 69–95 (2013), https://doi.org/10.1016/j.adt.2011.12.006

[21] 長倉三郎 ほか（1998）、理化学辞典第 5 版、岩波書店、1998, ISBN 9784000800907 ※自発核分裂 - Wikipedia も参考

[22] C. F. v. Weizsäcker, Zeitschrift für Physik, 96, 431–458 (1935), https://doi.org/10.1007/BF01337700 ※ベーテ・ヴァイツゼッカーの公式 - Wikipedia も参考

[23] 社団法人日本原子力学会（2020）、原子炉物理（シリーズ：現代核科学の基礎）、出版、ISBN-978-4-89047-174-4 ※Chap_All_20200317.pdf

[24] E. Gapon, D. Iwanenko, Naturwissenschaften, 20, 792–793 (1932), https://doi.org/10.1007/BF01494007 ※殻模型 - Wikipedia も参考

[25] F. Hoyle, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 108, 5, 372-382 (1948), https://doi.org/10.1093/mnras/108.5.372