

宇宙はブラックホールであるという仮説についての一考察

～ニュートン力学と特殊相対性理論からのアプローチ～

山脇正人*

キーワード：ブラックホール、シュワルツシルト半径、事象の地平線、ニュートン力学、特殊相対性理論、赤方偏移、ビッグバン、微細構造定数

概要

宇宙論は現代においても様々なモデルが提案されているが、今回「宇宙は一つの巨大なブラックホールである」と解釈する一説に対して、ニュートン力学と特殊相対性理論を用いて議論した。事象の地平線が観測点のポテンシャルによってシフトすると考えることでブラックホール宇宙モデルが解釈され、そこから観測可能な宇宙の質量は 1.03×10^{53} kg と見積もられた。今回の議論から、遠方の天体の赤方偏移はドップラーシフトによるものではなく、ブラックホール近傍における重力赤方偏移と等価なものであり、なおかつ宇宙のインフレーションは必ずしも天体同士が遠ざかる（空間が膨張する）ものではなく、シュワルツシルト半径が拡大している、という解釈を得た。また、ブラックホール内部の「斥力」を示唆する関係式に至り、その原子物理学などへの展開を試みた。

1. 緒言

近年、ブラックホールの存在を示す観測結果が発表¹されたことで、宇宙物理学への関心が高まっている。また、2022年にはジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡の運用が開始²されており、いま宇宙物理学は黎明期といえる。現代宇宙論ではビッグバンモデル³が最も支持されているといえるが、一方で興味深いモデル⁴も存在する。そのモデルでは、そもそも『我々はブラックホールの中に住んでいる？』と解釈され、『我々から138億光年以上離れた場所は観測できず、宇宙の地平線（私たちに光が届くギリギリの場所）の先にあります。その先には何もないのではなく、観測できないだけで我々と同じような宇宙がずっと広がっているはずです。逆に言えば、138億光年以上離れた観測者にとっては、我々は見えません。まさにこれはブラックホールと同じ状況です。』⁵と解説されている。そこで今回、この仮説（以下、ブラックホール宇宙モデルと称す）に対する考察を行った。今回の議論では、シュワルツシルト・ブラックホール⁶（質量のみ値を持ち、角運動量と電荷を0とする最も単純なモデルのブラックホール）を用いた。

2. ブラックホール

近年、銀河M87近傍から放出される光に、ブラックホールの存在を示す証拠となる赤方偏移が観測されたことが発表¹されている。ブラックホールは図1のように光すら脱出できなくなる重力場を形成すると一般相対性理論から導かれるが、その条件は(1)式のようになる。

* 国立研究開発法人産業技術総合研究所分析計測標準研究部門

e-mail: yamawaki.masato@aist.go.jp

$$r_s = \frac{2GM_{r_s}}{c^2} \quad (1)$$

(r_s : シュワルツシルト半径⁵、 G : 万有引力定数、 M_{r_s} : ブラックホールの質量、 c : 光速)

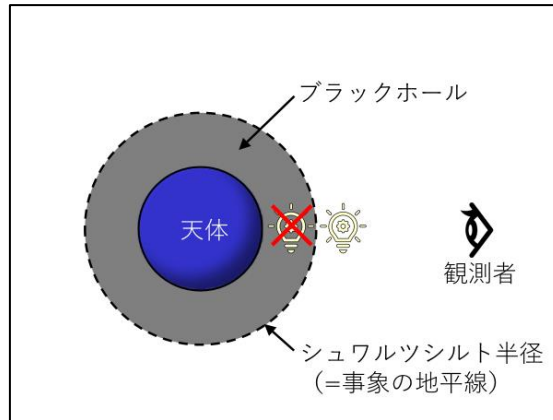


図1 ブラックホール

ある天体の半径がシュワルツシルト半径 r_s 以下になるとき、その天体はブラックホールとなる。ブラックホールは超高密度な天体であるとイメージされることが多い。しかし、(1)式においてブラックホールの質量 M_{r_s} と半径 r_s が比例関係にあることから、例えば質量が2倍になると体積は8倍 (M_{r_s} は r_s の3乗に比例) となり、その密度は1/4倍となる。つまり、ブラックホールは「質量」が大きくなればなるほど、その「密度」は小さくなっていくのである。よって、「巨大」で「低密度」なブラックホールも存在しうることになる。そこで、このようなブラックホールを「巨大低密度ブラックホール」(図2)と呼ぶことにする。

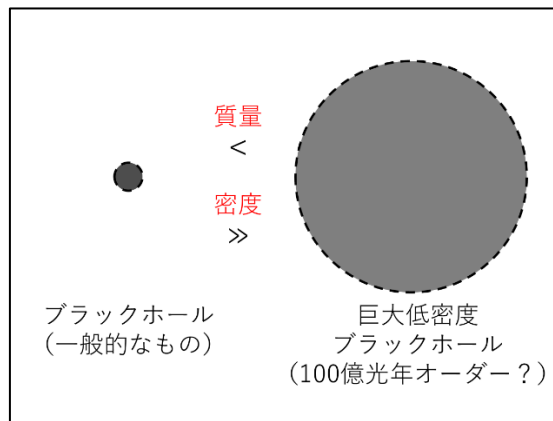


図2 巨大低密度ブラックホール

3. ブラックホール宇宙モデル

ブラックホール宇宙モデルを解釈すると、図3のようなイメージとなる。この仮説に対してシュワルツシルト・ブラックホールを用いて議論した。

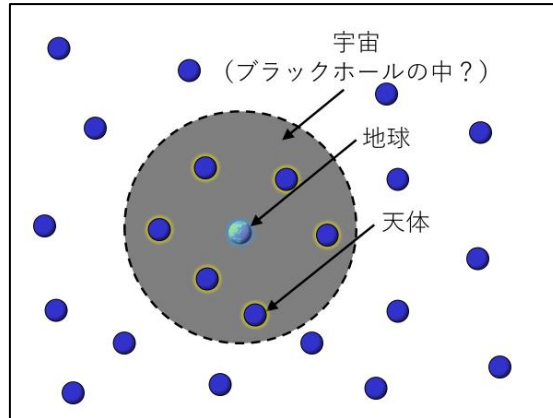


図3 ブラックホール宇宙モデルのイメージ

まず、宇宙を質量 M で半径 R の集合体と考え、(1)式からシュワルツシルト半径 r_s を求める。観測可能な宇宙の全質量 M は 1×10^{53} kg (平均的な天体の質量 2×10^{30} kg、天体数 5×10^{22} 個に相当)⁷、万有引力定数 G は 6.67×10^{-11} m³ kg⁻¹ s⁻²であることから、シュワルツシルト半径 r_s は 1.48×10^{26} mとなる。一方で、観測可能な宇宙の大きさが、138 億光年 (1 光年は約 1×10^{16} m) とすると 1.38×10^{26} mであり、シュワルツシルト半径 r_s と観測可能な宇宙の半径 R がほぼ一致する。よって、『我々はブラックホールの中に住んでいる?』とするブラックホール宇宙モデルは、まんざらでもなく思える。

4. 巨大低密度ブラックホールの存在

ところで、我々の住む宇宙にはブラックホールなどのダークマター・ダークエネルギー⁸が存在し、その質量は観測可能な宇宙の全質量 M の20倍以上とされる。宇宙の全質量を観測可能な宇宙の全質量 M の20倍であるならばシュワルツシルト半径 r_s も20倍であり、観測可能な宇宙の大きさとシュワルツシルト半径は当然一致しないことになるが、一方で次のような矛盾が生じる。平均的な密度を ρ とするブラックホールの全質量 M_{r_s} は

$$M_{r_s} = \frac{4\pi r_s^3}{3} \rho \quad (2)$$

(ρ : ブラックホールの平均的な密度)

である。ここで(1)式に(2)式を代入し、 r_s に対して整理すると

$$r_s = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}} \quad (3)$$

となる。つまり、 ρ も20倍であるならば(3)式から r_s は約0.22倍となり、半径が約33億光年の「巨大低密度ブラックホール」が存在する条件を満たす。また宇宙の密度が均一であるならば、この「巨大低密度ブラックホール」は我々の宇宙のどこにでも存在しうることになる。よって、「巨大低密度ブラックホールが作り上げる事象の地平線」が我々の住む宇宙のあちらこちらで観測されなければならない。

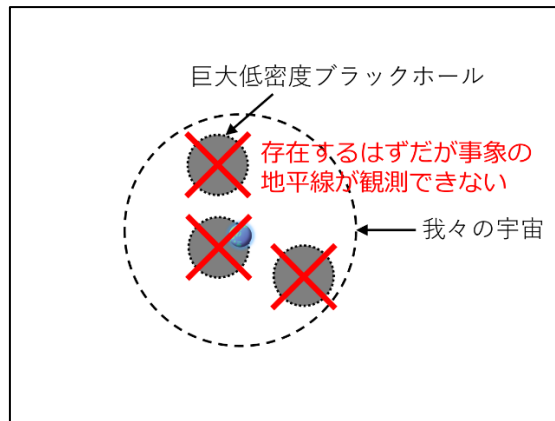


図4 存在するはずの「巨大低密度ブラックホール」はどこへいったのか？

しかしながら、半径約 33 億光年もの超巨大な事象の地平線がどこにも観測されないことから図 4 のような『存在するはずの「巨大低密度ブラックホール」はどこへいったのか？』という疑問が生まれる。そこでこの疑問を解決すべく、図 5 のように「事象の地平線は観測点によってシフトする」と予測して考察をおこなった。

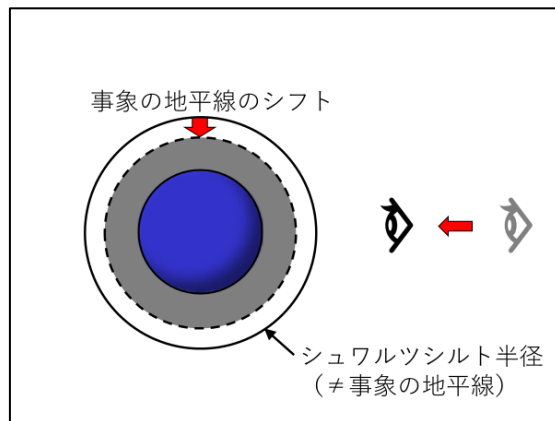


図5 事象の地平線が観測点によってシフトする（シュワルツシルト半径≠事象の地平線）
という予測

5. 事象の地平線のシフト

「事象の地平線のシフト」について議論する上で、「ニュートン力学的考察」と「特殊相対性理論的考察」をおこなった。

5.1 ニュートン力学的考察

本考察の前に、まず天体の重力ポテンシャルについて整理しよう。

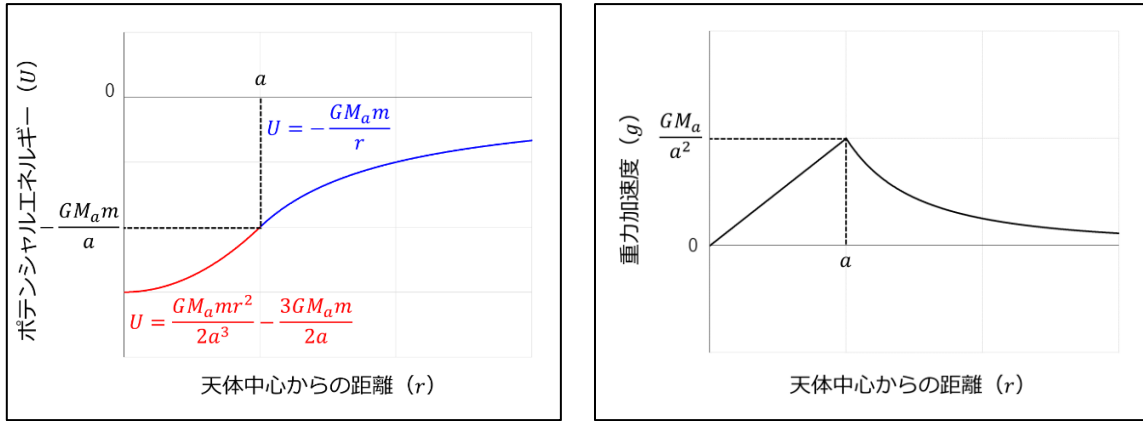


図6 天体のポテンシャルエネルギー（左）と重力加速度（右）

ある天体の半径を a 、質量を M_a 、ある粒子（例えば電子）の質量を m とすると、天体の外側（ $r \geq a$ ）のポテンシャルエネルギー U （図6（左）の青線）は

$$U = -\frac{GM_a m}{r} \quad (4)$$

であり、天体の内側（ $r \leq a$ ）のポテンシャルエネルギー U （図6（左）の赤線）は

$$U = \frac{GM_a m r^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a} \quad (5)$$

である。参考までに、重力加速度は図6（右）のようになり $r = a$ が最大値である。

ちなみに、(4)式において $-U = \frac{1}{2}mc^2$ （運動エネルギーが持ちうる最大値）を代入すると

$$r = \frac{2GM_a}{c^2} \quad (6)$$

となり、偶然にも(1)式（シュワルツシルト半径の関係式）と等価な解が得られることは良く知られる⁵。ただし、 c^2 は真空中の光速であるため、もしも「天体内部について議論」するならば(1)式は

$$r_s = \frac{2GM_{r_s}}{(nc_n)^2} \leftrightarrow c_n^2 = \frac{2GM_{r_s}}{n^2 r_s} \quad (7)$$

（ n ：相対屈折率、 c_n ：媒質中の光速）

として考える必要がある。

さて、天体中心からの距離 r を観測点とする事象の地平線のシフト Δr_s について考えるが、ここでポテンシャルエネルギー U を用いたニュートン力学的考察をおこなう。シフトした事象の地平線のポテンシャルエネルギー $U(r_s - \Delta r_s)$ と観測点 r のポテンシャルエネルギー $U(r)$ 差が、常に $\frac{1}{2}mc_n^2$ （運動エネルギーが持ちうる最大値）を満たすと考える（図7）。

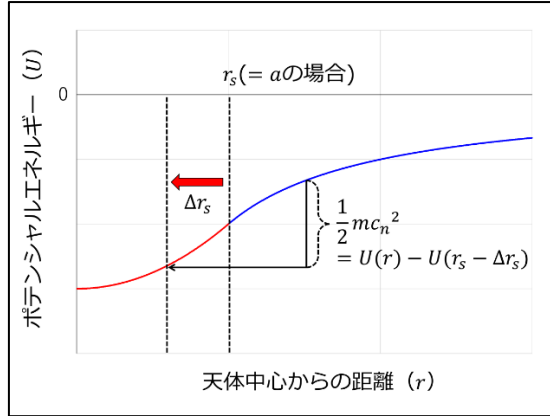


図7 観測点によってシフトする事象の地平線の関係

まず、 $r_s - \Delta r_s \geq a$ の場合（事象の地平線が天体の外側に位置）を考えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mc^2 &= -\frac{GM_{r_s}m}{r} - \left(-\frac{GM_{r_s}m}{(r_s - \Delta r_s)}\right) \\ \rightarrow r_s - \Delta r_s &= \frac{2GM_{r_s}r}{rc^2 + 2GM_{r_s}} \quad (8) \end{aligned}$$

となる。(8)式は $r \rightarrow \infty$ のときに $\Delta r_s \rightarrow 0$ となることから、観測点 r が天体から遠い場合において、(8)式と(1)式（シュワルツシルト半径の関係式）は漸近する。

次に、 $r_s - \Delta r_s \leq a$ の場合（事象の地平線が天体の内側に位置）を考えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mc_n^2 &= -\frac{GM_a m}{r} - \left(\frac{GM_a m (r_s - \Delta r_s)^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a}\right) \\ \rightarrow c_n^2 &= -\frac{2GM_a}{r} - \left(\frac{GM_a (r_s - \Delta r_s)^2}{a^3} - \frac{3GM_a}{a}\right) \\ \rightarrow c_n^2 &= \frac{3GM_a}{a} - \frac{2GM_a}{r} - \frac{GM_a (r_s - \Delta r_s)^2}{a^3} \quad (9) \end{aligned}$$

となる。ただし、この c_n は天体の内側と外側で異なることから、簡略化して考えるために $a = r_s$ とする。このとき $M_a = M_{r_s}$ であることから(9)式は

$$c_n^2 = \frac{3GM_{r_s}}{r_s} - \frac{2GM_{r_s}}{r} - \frac{GM_{r_s}(r_s - \Delta r_s)^2}{r_s^3} \quad (10)$$

となる。仮に(7)式（相対屈折率を考慮したシュワルツシルト半径の関係式）の天体の相対屈折率を $n = \sqrt{2}$ として、(10)式に $c_n^2 = GM_{r_s}/r_s$ を代入すると、 $r \rightarrow r_s (= a)$ のときに $\Delta r_s \rightarrow r_s$ となり、図8のように事象の地平線は一点に収束する（ $r_s - \Delta r_s = 0$ ）。つまり、事象の地平線は近づけば遠のく「逃げ水」のようなものと解釈される。ちなみに、図6（右）のように重力加速度 g を用いて考えると、 $r = a$ で最大値となるために事象の地平線のシフトを考慮しづらい。

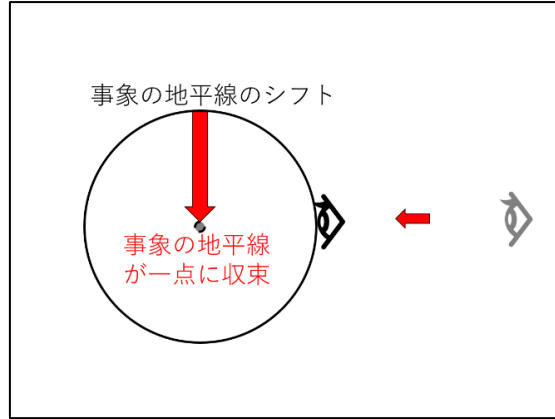


図8 観測点がシュワルツシルト半径に近づくと事象の地平線が一点に収束するという解釈

ここで図4の疑問となる『存在するはずの「巨大低密度ブラックホール」はどこへいったのか?』について考えるため、上記「天体」を半径 a の「集合体」と読み替える。そして、「観測点が集合体の内側に位置 ($r \leq a$)」する場合を考えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mc_n^2 &= \left(\frac{GM_a m r^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a} \right) - \left(\frac{GM_a m (r_s - \Delta r_s)^2}{2a^3} - \frac{3GM_a m}{2a} \right) \\ &\rightarrow c_n^2 = \frac{GM_a}{a^3} (r^2 - (r_s - \Delta r_s)^2) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここで、比例係数 k とする $a = kr_s$ のとき、 $M_a = k^3 M_{r_s}$ であることから(11)式は

$$c_n^2 = \frac{Gk^3 M_{r_s}}{(kr_s)^3} (r^2 - (r_s - \Delta r_s)^2) = \frac{GM_{r_s}}{r_s^3} (r^2 - (r_s - \Delta r_s)^2) \quad (12)$$

(k : 比例係数)

となり、(12)式は k に依存しないことから $k \gg 1$ の場合(「集合体の内側」)についても(11)式と同様に議論することができる。またこれは、「 $a \gg r_s$ のとき、 r_s だけ離れた観測者同士にはお互いが事象の地平線にいるように見える」とも解釈できる。

ここで、図4において「観測者の目の前に巨大低密度ブラックホールが存在する場合 ($r = r_s$)」を考える。(12)式に(7)式 $c_n^2 = 2GM_{r_s}/n^2 r_s$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{2GM_{r_s}}{n^2 r_s} &= \frac{GM_{r_s}}{r_s^3} (r_s^2 - (r_s - \Delta r_s)^2) \\ &\rightarrow \frac{(r_s - \Delta r_s)^2}{r_s^2} = 1 - \frac{2}{n^2} \end{aligned} \quad (13)$$

となり、(13)式から $|n| \geq \sqrt{2}$ でなければならないことがわかる。仮に、「低密度化」したブラックホールが、最小の相対屈折率 $n = \sqrt{2}$ であるとするならば、 $\Delta r_s = r_s$ となる。これは、半径 r_s の集合体表面と観測者が同じ位置にあったとしても、少なくとも観測者から半径 r_s 以内の場所に事象の地平線が観測されることはないことを意味する。よって、図9のように『存在するはずの「巨大低密度ブラックホール」は、事象の地平線がシフトすることで宇宙の果てとして観測される』(つまり、観測者から半径 r_s の地点が事象の地平線となる)と解釈することができる。

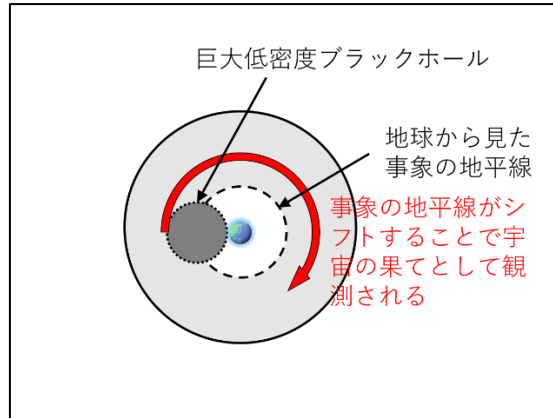


図9 巨大低密度ブラックホールの事象の地平線がシフトすることで宇宙の果てとして観測されるという解釈

5.2 特殊相対性理論的考察

まず本考察の前に、ブラックホールがもたらす時間の遅れについて整理しよう。図10のように赤方偏移は天体の移動や重力加速度により生じ、同時に時間の遅れも生じる。一般相対性理論によれば強い重力場によって時間の遅れや赤方偏移が生じ、事象の地平線上では時間が停止していることになる。⁹

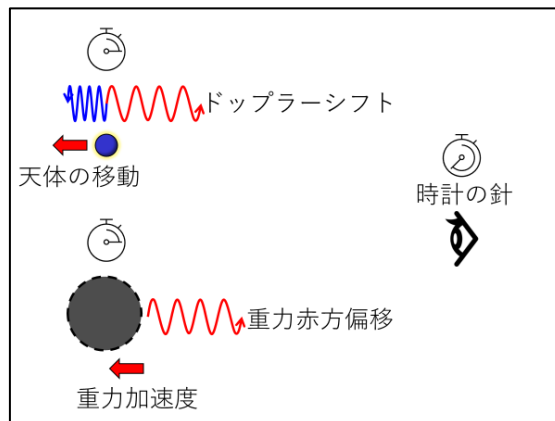


図10 時間の遅れと赤方偏移

時間に対する特殊相対性理論¹⁰の式は

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (14)$$

(t : 静止系の時間、 t' : 慣性系の相対時間、 v : 慣性系の相対速度、 c : 光速)
 であるが、この(14)式は次の(15)式のように変換できる。

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{(\pm mv^2/2)}{(\pm mc_n^2/2)}}} \quad (15)$$

ここで、「等価原理」を用いて運動エネルギーとポテンシャルエネルギー U の関係について議論

する。まず、観測点が天体 a の外側 ($r \geq a$) にあるとき、ポテンシャルエネルギー U と等価な運動エネルギーの関係は

$$U(r) = -\frac{GM_a m}{r} = -\frac{1}{2}mv_r^2 \quad (16)$$

$$U(r_s) = -\frac{GM_a m}{r_s} = -\frac{1}{2}mv_{r_s}^2 = -\frac{1}{2}mc^2 \quad (17)$$

(v_r : 観測点 r の等価速度、 v_{r_s} : 観測点 r_s の等価速度)

となり、(16)式と(17)式を(15)式に代入すると

$$dt = \frac{dt_r}{\sqrt{1 - \left(\frac{GM_a}{r}\right) / \left(\frac{GM_a}{r_s}\right)}} = \frac{dt_r}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \quad (18)$$

(t : 基準点($r \rightarrow \infty$)の時間、 t_r : 観測点 r の相対時間)

となる。つまり、観測点 r が r_s に近づくにしたがって時間の遅れが生じ、 r_s では時間が停止することになる。ちなみに、(18)式は偶然にもシュワルツシルト解⁹と一致する。

次に、観測点が集合体の内側 ($r \ll a$) にあるとき、観測点を基準とするポテンシャルエネルギー U と等価な運動エネルギーの関係は

$$U(r) = \frac{GM_{r_s} m r^2}{2r_s^3} = \frac{1}{2}mv_r^2 \quad (19)$$

$$U(r_s) = \frac{GM_{r_s} m r_s^2}{2r_s^3} = \frac{GM_{r_s} m}{2r_s} = \frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}mc_n^2 \quad (20)$$

(v_r : 観測点から距離 r の等価速度、 v_{r_s} : 観測点から距離 r_s の等価速度)

となり、(19)式と(20)式を(15)式に代入すると

$$dt = \frac{dt_r}{\sqrt{1 - \left(\frac{GM_{r_s} m r^2}{2r_s^3}\right) / \left(\frac{GM_{r_s} m}{2r_s}\right)}} = \frac{dt_r}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_s^2}}} \quad (21)$$

(t : 観測点 (基準点) の時間、 t_r : 観測点から距離 r の相対時間)

となる。つまり、観測者からの距離 r が r_s に近づく (つまり、観測者から遠ざかる) にしたがって時間の遅れが生じることになる。ここで、(14)式と(21)式を比較すると

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{r^2}{r_s^2} \rightarrow v = \frac{r}{r_s}c \quad (22)$$

の関係が得られる。これは偶然にもハッブルの法則¹¹と等価であることから、図11のような解釈ができる。

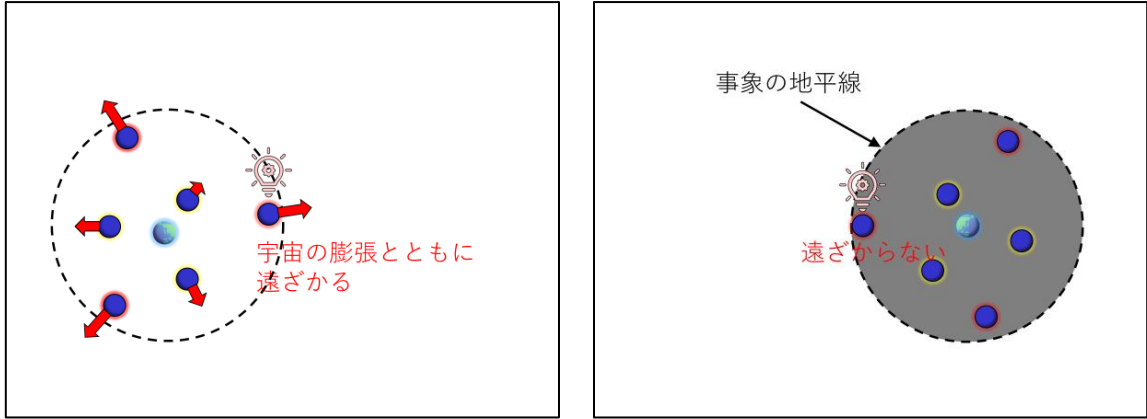


図1.1 ビッグバンモデル (左) とブラックホール宇宙モデル (右)

それでは、(21)式を用いてニュートン力学と特殊相対性理論を比較してみよう。ここでは、「エネルギー保存の法則」を前提として、「質量を基準」に議論する。

まずは、全質量 M_{r_s} 、半径 r_s 、平均的な密度 ρ の「ブラックホール宇宙」について議論する。ニュートン力学的には

$$M_{r_s} = \int_0^{r_s} 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3} \pi \rho r_s^3 \quad (23)$$

である。では、質量に対する特殊相対性理論¹⁰の式は

$$M' = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (24)$$

(M : 静止系の質量、 M' : 慣性系の相対質量、 v : 慣性系の相対速度、 c : 光速) であるが、質量 M と密度 ρ は比例関係 ($M \propto \rho$) にあることから

$$M_r = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} \rho_r = \frac{\frac{4\pi r^3}{3} \rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \rho_r = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (25)$$

(M : 静止系の質量、 M_r : 慣性系の相対質量、 ρ : 静止系の密度、 ρ_r : 慣性系の相対密度) となる。ここで、(25)式を(21)式と同じ手順で変換すると

$$\rho_r = \frac{\rho}{\sqrt{1 - r^2/r_s^2}} \quad (26)$$

(ρ : 観測点 (基準点) の密度、 ρ_r : 観測点から距離 r の相対密度) が得られる。ここで、特殊相対性理論的な空間と比較するために r' を用いると全質量 $M_{r_s'}$ は

$$M_{r_s'} = \int_0^{r_s'} 4\pi r'^2 \rho_r dr' = \int_0^{r_s'} \frac{4\pi r'^2 \rho}{\sqrt{1 - r'^2/r_s'^2}} dr' \quad (27)$$

となる。そして、(27)式を計算¹²すると

$$\int_0^{r_s'} \frac{4\pi r'^2 \rho}{\sqrt{1 - r'^2/r_s'^2}} dr' = \left[2\pi r_s' \rho \left(-r' \sqrt{r_s'^2 - r'^2} + r_s'^2 \sin^{-1} \frac{r'}{r_s'} \right) \right]_0^{r_s'} = \pi^2 \rho r_s'^3 \quad (28)$$

となる。よって、 $M_{r_s} = M_{r_s'}$ のとき

$$\frac{4}{3}\pi\rho r_s^3 = \pi^2\rho r_s'^3 \rightarrow r_s' = \sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}}r_s \cong 0.75r_s \quad (29)$$

となる。つまり、特殊相対性理論を考慮した観測上の宇宙（≒観測可能な宇宙）の半径はニュートン力学的半径の約 0.75 倍に見積もられる。

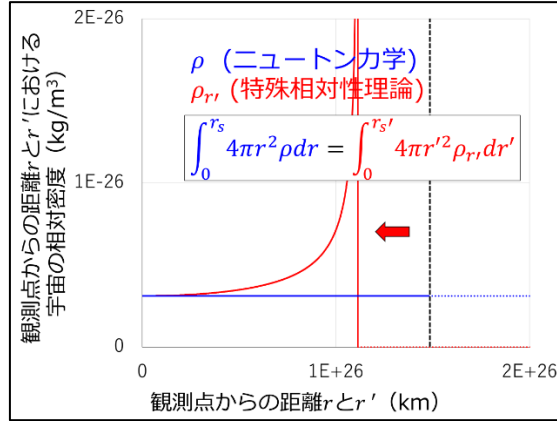


図 1 2 ニュートン力学的な宇宙の半径 r_s と特殊相対性理論を考慮した観測上の宇宙の半径 r_s'

また、図 1 2 の関係性について、長さに対する特殊相対性理論¹⁰の式、および(21)式と同じ手順で変換した関係式は

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow L = \frac{L_r}{\sqrt{1 - r^2/r_s^2}} \quad (30)$$

(L : 静止系 (観測点) の長さ、 L' : 慣性系の相対長さ、 L_r : 観測点から距離 r の相対長さ) となる。この(30)式を用いて考察すると、宇宙の果て近傍では長さが収縮しており、観測点に近づくにしたがって長さが伸びることになる。長さ L と光の波長 λ は比例関係 ($L \propto \lambda$) にあることから、つまりは遠方の天体が赤方偏移することを意味する。これは重力赤方偏移と等価であり、図 11 (右) のブラックホール宇宙モデルでは遠方の天体に重力赤方偏移と等価なものが生じていると解釈される。

ところで、ニュートン力学的考察で相対屈折率 n なるものを仮定したが、ここで相対屈折率 n について考えてみよう。長さ L と光の相対屈折率 n は反比例の関係 ($L \propto 1/n$) にあることから

$$n' = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (31)$$

(n : 静止系の相対屈折率、 n' : 慣性系の相対屈折率)

として読み替えることもできる。ここで、観測点が等速運動している場合 (慣性系) を例にすると、(10)式 (事象の地平線が天体内部へシフトすると考える式) において観測点が速度 v で天体周囲を等速円運動するとき

$$c_n^2 = \left(\frac{c}{n'}\right)^2 = \frac{3GM_{r_s}}{r_s} - \frac{2GM_{r_s}}{r} - \frac{GM_{r_s}(r_s - \Delta r_s)^2}{r_s^3} + \frac{1}{2}mv^2 \Big/ \frac{m}{2} \quad (32)$$

(v : 等速円運動する観測点の速度)

となる。ここで等速円運動の関係式は

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_{r_s}m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{GM_{r_s}}{r} \quad (33)$$

であるから、 $r \rightarrow r_s$ のときは $v^2 = c^2/2$ であり、(31)式より $n' = n/\sqrt{2}$ となる。仮に $n = \sqrt{2}$ とすると $n' = 1$ となり、事象の地平線のシフトは(32)式 (慣性系) と(10)式 (静止系) で等しくなる ($\Delta r_s = r_s$)。

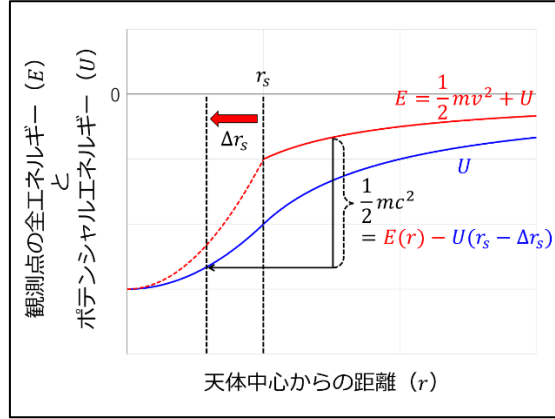


図 1.3 運動エネルギーを考慮した事象の地平線のシフトの一例

また、(31)式を (18)式 (ブラックホール外部の相対時間の式) と同じ手順で変換すると

$$n_{r \geq r_s} = \frac{n}{\sqrt{1 - r_s/r}} \quad (34)$$

(n : 基準点($r \rightarrow \infty$)の相対屈折率、 $n_{r \geq r_s}$: 観測点 $r (\geq r_s)$ の相対屈折率)

となり、観測点 $r \rightarrow r_s$ において相対屈折率 $n_{r \geq r_s} \rightarrow \infty$ となる。ブラックホール周辺の物質からは強い発光が観察される¹³ことが知られているが、この発光は荷電粒子が光速を超えた時に発せられるチェレンコフ光¹⁴と等価なものと考えられるかもしれない。

5.3 ニュートン力学的と特殊相対性理論の一体化

本考察で仮定した相対屈折率 n はそもそも「無次元」であり、万有引力定数 G は相対屈折率 n の自乗に反比例の関係 ($G \propto 1/n^2$) にあることから、相対屈折率 n と万有引力定数 G は一体として取扱うこともできる。そこで(34)式より

$$G = \frac{G_{r \geq r_s}}{1 - r_s/r} \quad (35)$$

(G : 基準点($r \rightarrow \infty$)の万有引力定数、 $G_{r \geq r_s}$: 観測点 $r (\geq r_s)$ の相対万有引力定数)

とすると、重力加速度 α は

$$\alpha_{r \geq r_s} = \frac{G_{r \geq r_s} M_a}{r^2} = (1 - r_s/r)\alpha \quad (36)$$

(α : 基準点($r \rightarrow \infty$)の重力加速度、 $\alpha_{r \geq r_s}$: 観測点 $r (\geq r_s)$ の相対重力加速度) となり、観測点 $r \rightarrow r_s$ において相対重力加速度 $\alpha_{r \geq r_s} \rightarrow 0$ となる。

さらに、ポテンシャルエネルギー U は

$$U_{r \geq r_s} = \int_r^\infty -\alpha_{r \geq r_s} m dr = \int_r^\infty -GM_a m \frac{r - r_s}{r^3} dr = \left[-GM_a m \left(\frac{r_s}{2r^2} - \frac{1}{r} \right) \right]_r^\infty = \left(1 - \frac{r_s}{2r} \right) U \quad (37)$$

(U : 基準点($r \rightarrow \infty$)のポテンシャルエネルギー、 $U_{r \geq r_s}$: 特殊相対性理論的な空間における地点 $r (\geq r_s)$ のポテンシャルエネルギー)

と導かれる。ちなみに、(37)式は $r = r_s$ のときに $U_{r \geq r_s} = U/2$ であることから

$$U_{r \geq r_s}(r_s) = \frac{1}{2} U(r_s) = -\frac{1}{2} m c_n^2 \quad (38)$$

となる。

次に、 $r \leq r_s$ の場合において(35)式と(36)式を (21)式 (ブラックホール内部の相対時間と考える式) と同じ手順で変換すると

$$G = \frac{G_{r \leq r_s}}{1 - r^2/r_s^2} \quad (39)$$

(G : 観測点 (基準点) の万有引力定数、 $G_{r \leq r_s}$: 観測点から距離 $r (\leq r_s)$ の相対万有引力定数)

$$\alpha_{r \leq r_s} = \frac{G_{r \leq r_s} M_a r}{a^3} = (1 - r^2/r_s^2)\alpha \quad (40)$$

(α : 観測点 (基準点) の重力加速度、 $\alpha_{r \leq r_s}$: 観測点から距離 $r (\leq r_s)$ の相対重力加速度) となる。仮に、 $r \leq r_s$ のポテンシャルエネルギー U まで見積もるならば

$$\begin{aligned} U_{r \leq r_s} &= \int_r^{r_s} \alpha_{r \leq r_s} m dr + U_{r \geq r_s}(r_s) = \int_r^{r_s} (1 - r^2/r_s^2) \frac{GM_a m r}{a^3} dr + U_{r \geq r_s}(r_s) \\ &= \left[GM_a m \left(\frac{r^2}{2a^3} - \frac{r^4}{4a^3 r_s^2} \right) \right]_r^{r_s} - \frac{GM_a m}{2r_s} \\ &= \left(\frac{r_s^4}{4a^3 r_s^2} - \frac{r_s^2}{2a^3} + \frac{r_s^2}{2a^3} - \frac{r_s^2}{4a^3} - \frac{1}{2r_s} \right) GM_a m \end{aligned} \quad (41)$$

となる。(40)式は基準点を $r = 0$ としていることから、(41)式の $\alpha_{r \leq r_s}$ にかかる符号は(37)式の $\alpha_{r \geq r_s}$ に対して逆としている) ただし、(41)式は $a = r_s$ のときであるため、まず $a \geq r_s$ のときを考えると

$$\begin{aligned} U_{(a \geq r) r \geq r_s} &= \int_r^a -\alpha_{r \geq r_s} m dr + U_{r \geq r_s}(a) = \int_r^a -(1 - r_s/r) \frac{GM_a m r}{a^3} dr + U_{r \geq r_s}(a) \\ &= \left[-GM_a m \left(\frac{r^2}{2a^3} - \frac{r r_s}{a^3} \right) \right]_r^a - \left(1 - \frac{r_s}{2a} \right) \frac{GM_a m}{a} \\ &= \left(\frac{r^2}{2a^3} - \frac{r r_s}{a^3} - \frac{1}{2a} + \frac{r_s}{a^2} - \frac{1}{a} + \frac{r_s}{2a^2} \right) GM_a m \end{aligned} \quad (42)$$

となり、次に $a \leq r_s$ のときを考えると

$$\begin{aligned}
U_{(a \leq) r \leq r_s} &= \int_r^{r_s} \alpha_{r \leq r_s} m dr + U_{r \geq r_s}(r_s) = \int_r^{r_s} (1 - r^2/r_s^2) \frac{GM_a m}{r^2} dr + U_{r \geq r_s}(r_s) \\
&= \left[GM_{r_s} m \left(-\frac{1}{r} - \frac{r}{r_s^2} \right) \right]_r^{r_s} - \frac{GM_{r_s} m}{2r_s} = \left(\frac{r}{r_s^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_s} - \frac{1}{2r_s} \right) GM_{r_s} m \quad (43)
\end{aligned}$$

となり、(42)式と(43)式は(37)式と(41)式の間を接続する。ちなみに、(43)式は $a \ll r_s$ ($a/r_s \rightarrow 0$) のとき

$$U_{(a \ll) r \leq r_s} = \left(\frac{r}{r_s} \left(\frac{a}{r_s} \right) + \frac{a}{r} - \frac{5}{2} \left(\frac{a}{r_s} \right) \right) \frac{GM_a m}{a} \cong \frac{GM_a m}{r} \quad (44)$$

となることから、 r_s の内側で r に反比例した「斥力」が働くことになる。また、(41)式が $a \geq r_s$ のとき

$$\begin{aligned}
U_{r \leq r_s(\leq a)} &= \int_r^{r_s} \alpha_{r \leq r_s} m dr + U_{(a \geq) r \geq r_s}(r_s) \\
&= \left(\frac{r^4}{4a^3 r_s^2} - \frac{r^2}{2a^3} + \frac{r_s^2}{2a^3} - \frac{r_s^2}{4a^3} + \frac{r_s^2}{2a^3} - \frac{r_s^2}{a^3} - \frac{1}{2a} + \frac{r_s}{a^2} - \frac{1}{a} + \frac{r_s}{2a^2} \right) GM_a m \quad (45)
\end{aligned}$$

となり、 $a \leq r_s$ のとき

$$\begin{aligned}
U_{r(\leq a) \leq r_s} &= \int_r^a \alpha_{r \leq r_s} m dr + U_{(a \leq) r \leq r_s}(a) \\
&= \left(\frac{r^4}{4a^3 r_s^2} - \frac{r^2}{2a^3} + \frac{1}{2a} - \frac{a}{4r_s^2} + \frac{a}{r_s^2} + \frac{1}{a} - \frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_s} - \frac{1}{2r_s} \right) GM_{r_s} m \quad (46)
\end{aligned}$$

と接続することになる。よって、ニュートン力学的と特殊相対性理論を一体化したポテンシャルエネルギーは図14のように示される。例えば、 $a \ll r_s$ ($a/r_s \rightarrow 0$) のとき(46)式は

$$U_{r(\leq a) \ll r_s}(0) = \left(\frac{3}{2} \left(\frac{r_s}{a} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{r_s} \right) - \frac{5}{2} \right) \frac{GM_{r_s} m}{r_s} \rightarrow \infty \quad (47)$$

となるが、これは無から膨大なエネルギーが解放されたとするビッグバンの起源と定性的に一致する。また、超新星爆発¹⁵を引き起こすエネルギー状態にも近い。

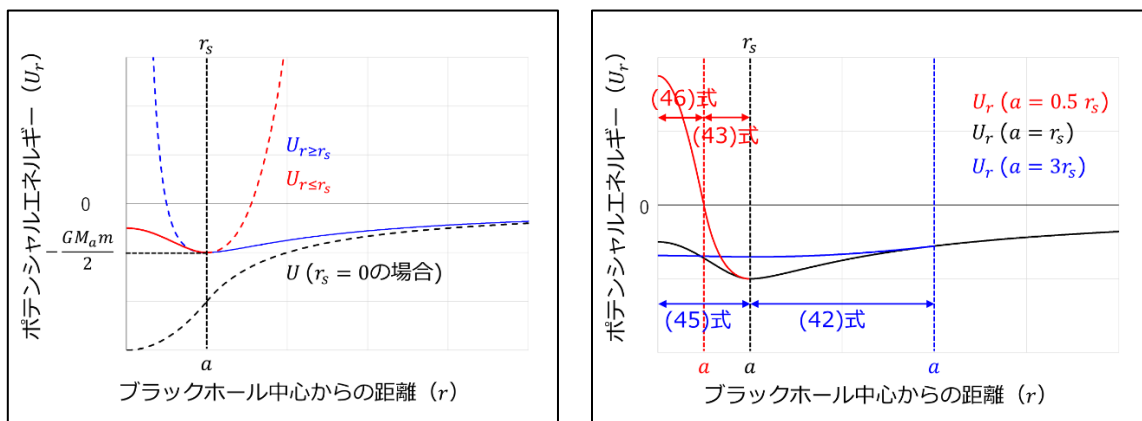


図14 ニュートン力学的と特殊相対性理論を一体化したポテンシャルエネルギー

5.4 原子・核物理学などへの応用

図14は実験的に確認されている核力のさまざまな性質と定性的に一致していることから、本

解釈は原子・核物理などへ応用できる可能性がある。そこでまず、プランク単位系¹⁶を用いるとクーロン定数と万有引力定数には

$$m_{PL}^2 G = q_{PL}^2 k \rightarrow G = \left(\frac{e}{m_{PL}} \right)^2 \frac{k}{\alpha} \quad (48)$$

(m_{PL} : プランク質量、 q_{PL} : プランク電荷、 α : 微細構造定数、 k : クーロン定数) の関係がある。図14(右)の赤線から、電子同士に「 r_s の内側で微弱な引力」が存在することになる。ここで、この「引力」に支配的な要因となる(43)式 $U_{(a \leq) r \leq r_s}$ に注目してみよう。仮に、質量と電荷が等価(質量 \cong 電荷)であり、以下の式が成り立つと仮定する。

$$V'_{(a \leq) r \leq r_{s,e}} = - \left(\frac{r}{r_{s,e}^2} + \frac{1}{r} - \frac{5}{2r_{s,e}} \right) k e^2 \quad (49)$$

($r_{s,e}$: クーロンポテンシャル的な電子のシュワルツシルト半径)

(43)式 $U_{(a \leq) r \leq r_s}$ の第1項($G m_e^2 r / r_s^2$)は r が大きいときに寄与が大きく、第2項($G m_e^2 / r$)は r が小さいときに寄与が大きいため、(43)式と(49)式に何らかの関係があるかもしれない。そこで、もしも(43)式の第2項と(49)式の第1項に微細構造定数 α を乗じたものが等しいと仮定すると

$$-\frac{G m_e^2}{r} = -\frac{k e^2 r}{r_{s,e}^2} \alpha \rightarrow G = \left(\frac{e r}{r_{s,e} m_e} \right)^2 k \alpha \quad (50)$$

となる。仮に、 r にプランク長 r_{PL} ($\cong 1.62 \times 10^{-35}$)を代入してみると $r_{s,e} \cong 2.82 \times 10^{-15}$ となり、 $r_{s,e}$ は電子の古典半径 r_e と等しくなる。よって、クーロンポテンシャル的な電子のシュワルツシルト半径は

$$r_{s,e}(= r_e) = \frac{k e^2}{m_e c^2} \quad (51)$$

(r_e : 電子の古典半径)

であると定義しよう。そして、(48)式と(50)式から

$$G = \left(\frac{e}{m_{PL}} \right)^2 \frac{k}{\alpha} = \left(\frac{e r_{PL}}{r_{s,e} m_e} \right)^2 k \alpha \rightarrow \frac{e^2}{m_{PL}^2 \alpha} = \frac{e^2 r_{PL}^2 \alpha}{r_{s,e}^2 m_e^2} \quad (52)$$

となる。プランク単位系において $m_{PL} = \sqrt{\hbar c / G}$ 、 $r_{PL} = \sqrt{\hbar G / c^3}$ であることから、(52)式から

$$\alpha = \frac{r_e m_e c}{\hbar} (= 7.2973525693 \times 10^{-3}) \quad (53)$$

(\hbar : デイラック定数)

が得られる。(53)式(おそらく公知であるが)は偶然にも微細構造定数 $\alpha = k e^2 / \hbar c (= 7.2973525693 \times 10^{-3})$ と一致する。(計算値は2018 CODATA recommended values¹⁶を使用。 $r_e = 2.8179403262 \times 10^{-15}$ m、 $m_e = 9.1093837015 \times 10^{-31}$ kg、 $c = 299,792,458$ m/s(定義値)、 $\hbar (= h / 2\pi) = 6.62607015 \times 10^{-34} / 2\pi$ J·s(定義値))さらに、(53)式で得られた微細構造定数から

$$\alpha = \frac{k e^2}{\hbar c} = \frac{r_e m_e c}{\hbar} \rightarrow m_e c^2 = \frac{k e^2}{r_e} (= 8.1871057768 \times 10^{-14} \text{ J}) \quad (54)$$

となり、 $E = m_e c^2 (= 8.1871057768 \times 10^{-14} \text{ J})$ と一致する。(計算値は2018 CODATA recommended values¹⁶を使用。 $k (= 1 / 4\pi \epsilon_0) = 8.98755179226 \text{ V}^2 / \text{N} (= \text{J} \cdot \text{m} / \text{C}^2)$ 、

$e=1.602176634 \times 10^{-19}$ C(定義値) よって、

$$E = \frac{ke^2}{r_e} \quad (55)$$

(E : 全エネルギー)

が成り立つことになる。これは、電荷がエネルギーに変換されることを意味する一方で、電荷が質量に変換されうることも示唆される。

ここで、電子同士のポテンシャルエネルギーについて一旦整理すると $r_s = (2Gm_e/r_e c^2)r_{s,e}$ 、 $Gm_e^2 = (Gm_e/r_e c^2)ke^2$ となることから(43)式 $U_{(a \leq)r \leq r_s}$ は

$$V_{(a \leq)r \leq r_{s,e}} = - \left(\left(\frac{r_e c^2}{2Gm_e} \right)^2 \frac{r}{r_{s,e}^2} + \frac{1}{r} - \left(\frac{r_e c^2}{2Gm_e} \right) \frac{5}{2r_{s,e}} \right) \frac{Gm_e}{r_e c^2} ke^2 \quad (56)$$

となる。ここで、 $\bar{r} = (r_e c^2 / 2Gm_e)r$ とすると(56)式および(37)式 $U_{r \geq r_s}$ ・ (46)式 $U_{r(\leq a) \leq r_s}$ は

$$V_{\bar{r} \geq r_{s,e}} = \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{r_{s,e}}{2\bar{r}^2} \right) \frac{ke^2}{2} \quad (57)$$

$$V_{(a \leq)\bar{r} \leq r_{s,e}} = - \left(\frac{\bar{r}}{r_{s,e}^2} + \frac{1}{\bar{r}} - \frac{5}{2r_{s,e}} \right) \frac{ke^2}{2} \quad (58)$$

$$V_{\bar{r}(\leq a) \leq r_{s,e}} = - \left(\left(\frac{2Gm_e}{r_e c^2} \right)^3 \frac{\bar{r}^4}{4a^3 r_{s,e}^2} - \left(\frac{2Gm_e}{r_e c^2} \right)^3 \frac{\bar{r}^2}{2a^3} + \left(\frac{2Gm_e}{r_e c^2} \right) \frac{3}{2a} + \left(\frac{r_e c^2}{2Gm_e} \right) \frac{3a}{4r_{s,e}^2} - \frac{5}{2r_{s,e}} \right) \frac{ke^2}{2} \quad (59)$$

となる。さらに、 $\bar{a} = (r_e c^2 / 2Gm_e)a$ とすると(59)式は

$$V_{\bar{r}(\leq a) \leq r_{s,e}} = - \left(\frac{\bar{r}^4}{4\bar{a}^3 r_{s,e}^2} - \frac{\bar{r}^2}{2\bar{a}^3} + \frac{3}{2\bar{a}} + \frac{3\bar{a}}{4r_{s,e}^2} - \frac{5}{2r_{s,e}} \right) \frac{ke^2}{2} \quad (60)$$

となる。しかしながら、(58)式は(49)式 $V'_{(a \leq)r \leq r_{s,e}}$ の 1/2 倍となっている。これは反跳エネルギー¹⁴の影響をおそらく意味していることから、陽子の場合は単純に2倍 ($2V_{\bar{r}}$) であると考えられる。

また、ボーア半径 ($a_0 = \hbar^2 / m_e ke^2$) を用いた微細構造定数 $\alpha = \hbar / m_e ca_0$ と(53)式 (微細構造定数) から

$$\alpha = \frac{\hbar}{m_e ca_0} = \frac{r_e m_e c}{\hbar}$$

$$\rightarrow \hbar = m_e c \sqrt{r_e a_0} \quad (\rightarrow h = 2\pi m_e c \sqrt{r_e a_0} (= 6.6260701500 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})) \quad (61)$$

(a_0 : ボーア半径 (= $5.29177210903 \times 10^{-11}$ m))

となり、(61)式を(53)式 (微細構造定数) に代入すると

$$\alpha = \frac{r_e m_e c}{m_e c \sqrt{r_e a_0}} \rightarrow \alpha = \sqrt{r_e / a_0} (= 7.2973525693 \times 10^{-3}) \quad (62)$$

が得られる。そこで、(62)式を以下のように変換して計算すると

$$\alpha = \sqrt{r_e/a_0} \rightarrow r_e = a_0 \alpha^2 \rightarrow \frac{4r_e}{ke^2} = \frac{4a_0}{ke^2} \alpha^2 \rightarrow \overline{V_{\bar{r}}}(a_0) = -V_{\bar{r}}(r_e) \alpha^2 (\cong -6.8 \text{ eV}) \quad (63)$$

($\overline{V_{\bar{r}}}$: 価電子のポテンシャルエネルギー ($4V_{\bar{r}}(r_e) \cong 511 \text{ keV}$))

となる。(57)式・(58)式・(60)式から価電子のポテンシャルエネルギー $-\overline{V_{\bar{r}}}$ は、 $\bar{r} = (r_e c^2 / 2\alpha^2 G m_e) r$ 、 $\bar{a} = (r_e c^2 / 2\alpha^2 G m_e) a$ として整理すると

$$\overline{V_{\bar{r} \geq a_0}} = -V_{\bar{r} \geq r_{s,e}} \alpha^2 = -\left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{r_{s,e}}{2\alpha^2 \bar{r}^2}\right) \frac{ke^2}{2\alpha^2} \alpha^2 = -\left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{a_0}{2\bar{r}^2}\right) \frac{ke^2}{2} \quad (64)$$

$$\overline{V_{(\bar{a} \leq \bar{r}) \leq a_0}} = -V_{(a \leq r) \leq r_{s,e}} \alpha^2 = \left(\frac{\bar{r}}{a_0^2} + \frac{1}{\bar{r}} - \frac{5}{2a_0}\right) \frac{ke^2}{2} \quad (65)$$

$$\overline{V_{\bar{r}(\leq \bar{a}) \leq a_0}} = -V_{\bar{r}(\leq \bar{a}) \leq r_{s,e}} \alpha^2 = \left(\frac{\bar{r}^4}{4\bar{a}^3 a_0^2} - \frac{\bar{r}^2}{2\bar{a}^3} + \frac{3}{2\bar{a}} + \frac{3\bar{a}}{4a_0^2} - \frac{5}{2a_0}\right) \frac{ke^2}{2} \quad (66)$$

となり (ただし、 $r_e = r_{s,e}$ より $r_{s,e}/\alpha^2 = a_0$)、 $\bar{r} = a_0$ のとき $-ke^2/4a_0 \cong -6.8 \text{ eV}$ となる。これは、ポジトロニウム (電子と陽電子¹⁷の結合体) ¹⁸のイオン化エネルギー ($\cong 6.8 \text{ eV}$) の絶対値と等しい。そこで、陽子の場合も単純に2倍 ($2\overline{V_{\bar{r}}}$) であると考え、 $2\overline{V_{\bar{r}}} \cong -13.6 \text{ eV}$ となり、水素のイオン化エネルギー ($\cong 13.6 \text{ eV}$) の絶対値と等しくなる。ただし、ポジトロニウムのボーア半径¹⁹は $2r_e/\alpha^2$ であることから $2a_0$ となるため、(64)式・(65)式・(66)式の a_0 は $2a_0$ に置換されることが考えられる。よって、(煩雑になってしまったが) これらを考慮するとクーロン力によるポテンシャルエネルギーは図15のように示される。

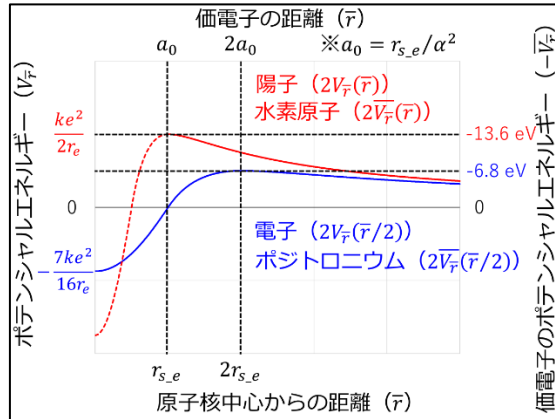
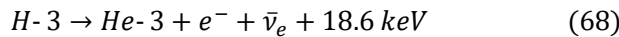
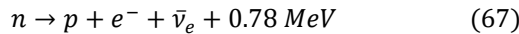


図15 クーロン力によるポテンシャルエネルギー

では、本解釈を用いて放射線物理について考えてみよう。例えば、中性子とトリチウムの β 壊変における核反応式¹⁴は



(n : 中性子、 p : 陽子、 e^- : 電子、 $\bar{\nu}_e$: 反電子ニュートリノ)

である。陽子のクーロンポテンシャル的なシュワルツシルト半径を $r_{s,p}$ とすると、陽子 (と ${}^3\text{H}$) と ${}^3\text{He}$ の $r_{s,p}$ は $2.8179403205 \times 10^{-15} \text{ m}$ と $5.6358806410 \times 10^{-15} \text{ m}$ となる。陽子と ${}^3\text{He}$ の原子核

半径は $0.8751 \times 10^{-15} \text{ m}$ および約 $1.87 \times 10^{-15} (\cong 1.3 \times 10^{-15} \times \sqrt[3]{3}) \text{ m}$ として、(60)式 $V_{\bar{r}(\leq a) \leq r_{s,e}}$ を用いて $-2V_{\bar{r}}(0)$ を計算すると、陽子は約 1.31 MeV 、 ${}^3\text{He}$ は約 1160 keV 、 ${}^3\text{H}$ は約 132 keV となる。 ${}^3\text{He}$ は崩壊前（トリチウム）の一つの価電子で遮蔽されてポテンシャルエネルギーは半分になると仮定すると約 $514 \text{ keV} (\cong (1160 \text{ keV} - 132 \text{ keV})/2)$ となる。一方で、 β 壊変による全放出エネルギーは中性子で約 $1.29 \text{ MeV} (\cong 0.511 \text{ MeV} + 0.78 \text{ MeV})$ 、トリチウムで約 $530 \text{ keV} (\cong 511 \text{ keV} + 18.6 \text{ keV})$ となり、ラフな見積りながらも(60)式 $V_{\bar{r}(\leq a) \leq r_{s,e}}$ は核反応エネルギーと近い値を得ることができる。

また図 15 より、電子同士に「 $2a_0$ の内側で微弱な引力」が存在することが予想される。そこで、超伝導²⁰との関連性についても非常にラフに見積もってみよう。超伝導は固体中での現象であることから $\bar{a} > 2a_0$ の条件を考える必要があると予想されるが、万有引力から得られた(42)式 $U_{(a \geq) r \geq r_s}$ と(45)式 $U_{r \leq r_s (\leq a)}$ も同様にクーロン力に変換できると仮定して $\bar{a} = 10^{-9} \text{ m}$ 、 $2a_0 = 10^{-10} \text{ m}$ とすると、 $2\bar{V}_{\bar{r}}(0) - 2\bar{V}_{\bar{r}}(2a_0) \cong 1.36 \times 10^{-2} \text{ eV}$ となる。100 Kにおける電子の熱エネルギー $\frac{3}{2}k_B T \cong 1.29 \times 10^{-2} \text{ eV}$ (k_B はボルツマン定数、 T はケルビン)となり、方向性はまんざらでもなく思えるがこの議論については今後としたい。

次に、陽子について考えてみよう。もしも2個の電子同士が結合した場合に $r_{s,e}$ が単純に2倍($r_{s,e2}$ とする)となると仮定すると、 $r_e/r_{s,e} > r_e/r_{s,e2}$ となり $\bar{r} = 0$ のクーロンポテンシャルは拡大($-V_{\bar{r}(\leq a) \leq r_{s,e2}}(0) > -V_{\bar{r}(\leq a) \leq r_{s,e}}(0)$)する。では、 i 個の電子が結合した場合に $a/r_{s,ei} \rightarrow 0$ となり(44)式 $U_{(a \ll) r \leq r_s}$ のように「斥力」と同等な「引力」が形成されることになる。もしも、陽子を1836個の電子の結合体と考えるならば $2r_{s,e1836} \cong 1.03 \times 10^{-11} \text{ m}$ となり、 $2r_{s,e1836}$ の内側で「引力」が働くことになる。しかしながら、 $r_{s,e1836}$ は少なくともボーア半径 $a_0 (\cong 5.29 \times 10^{-11} \text{ m})$ より小さいことから、価電子にはやはり「斥力」が働いていることになる。よって、陽子は電子の結合体ではなく「陽電子の結合体である」との仮説が得られる。一方で、陽子の電荷は電子の電荷の絶対値と等しいことから $r_{s,p} = r_{s,e1836}$ でなければならない。単純に、 i 個の陽電子の結合体について、(51)式（今回定義した $r_{s,e}$ ）から考えると

$$r_{s,ei} = \frac{ike^2}{m_e c^2} \quad (69)$$

となり、その半径を a_i とすると $a_i = a^3 \sqrt{i}$ となる。一方で、陽子の半径 $a_p (\cong 0.875 \times 10^{-15} \text{ m})$ は陽電子の古典半径 r_e （電子と同じ）のおよそ1/3である。そこで、(55)式（全エネルギー）について「電荷が消滅して質量に変換される」と解釈すると

$$r_{s,ei}' = \frac{ke^2}{m_e c^2} \quad (70)$$

となり、 $r_{s,ei}'$ は結合しても変化は無いとも解釈できる。これを「融合体」と考え、(53)式（微細構造定数）において仮に $r_e = a$ と置くと m_e と a は反比例の関係($m_e \propto 1/a$)にあることから、 i 個の陽電子の「融合体」の半径は $a_i = a/i$ となる。そこで、陽子の半径から i について単純に計算すると

$$\frac{a_p}{r_e} = \frac{1}{i} \sqrt[3]{\frac{1836}{i}} \rightarrow i \cong 15.7(\text{個}) \quad (71)$$

となり、「陽子は約 16 個の陽電子の「融合体」が約 115 個で構成される結合体である」との仮説が得られる。しかしながら、 $r_{s,p} = r_{s,e}$ であるためには電子の「融合体」が加わることでクーロンポテンシャルを打ち消さなければならない。すると、陽電子の融合体 58 個と電子の融合体 57 個という組み合わせとなる。もちろん、組み合わせとしては無数に存在し、このように単純にはならないことは明らかであるが、本解釈はクォークを取り扱う素粒子物理学へ展開できるかを今後検討していきたい。

以上、数字遊び的になってしまった感は否めないが最後に一つ紹介すると、上記 ((56)式など) で現れる無次元数 $r_e c^2 / 2Gm_e (\cong 2.08 \times 10^{42})$ に $r_e / \pi (\cong a_p)$ と微細構造定数 α をかけると 1.37×10^{26} m となり、観測可能な宇宙の半径 1.38×10^{26} m とほぼ一致する。

6. ブラックホール宇宙のインフレーション

次に、ブラックホールのインフレーションについてニュートン力学と特殊相対性理論から議論する。ブラックホールは周囲の天体などを取り込み膨張することができることから、ブラックホール宇宙モデルでは親ブラックホールや子ブラックホールのような各世代のブラックホール間の質量の交換について議論する必要がある。

6.1 ニュートン力学的考察

まず、(7)式 (相対屈折率を考慮したシュワルツシルト半径の関係式) に対して質量の増減を考慮すると、ニュートン力学的に次のような関係式で表現することができる。

$$r_s + \Delta r_s = \frac{2G(M_{R_s} + \Delta M + 4\pi r_s^2 \rho_{\Delta r_s} \Delta r_s)}{(nc_n)^2} \quad (72)$$

(ΔM : ブラックホール宇宙が周囲 (親ブラックホール) から取り込んだ質量、 Δr_s : シュワルツシルト半径の増減、 $\rho_{\Delta r_s}$: 親ブラックホールの密度)

また、(72)式に(7)式 $(nc_n)^2 = 2GM_{R_s}/r_s$ を代入し、(2)式 (ブラックホール全質量の式) を用いて Δr_s に対して整理すると

$$\Delta r_s = \frac{r_s \Delta M}{M_{R_s} - 4\pi r_s^3 \rho_{\Delta r_s}} = \frac{\Delta M}{4\pi r_s^2 (\rho/3 - \rho_{\Delta r_s})} \quad (73)$$

となる。例えば、ブラックホールが誕生した直後 (初期のブラックホール宇宙) は $\rho/3 \gg \rho_{\Delta r_s}$ であるため、周囲の物質を取り込むことで膨張するとともに密度が低下する。一方で、ブラックホールが成長 (「巨大低密度ブラックホール」化) して $\rho/3 < \rho_{\Delta r_s}$ となると、(73)式の ΔM は負である必要があり、周囲の物質を取り込むことでは膨張することができなくなる。そこで巨大低密度ブラックホールまで成長した宇宙の膨張については次のように解釈される。図 16 の状況について考えるならば、子ブラックホールの質量は特殊相対性理論的に見積もることができない。そのため、ニュートン力学的に子ブラックホールの質量はブラックホール宇宙の質量から除外されるべきである。つまり、「ブラックホールの誕生は質量の消滅に等しい」と解釈される。

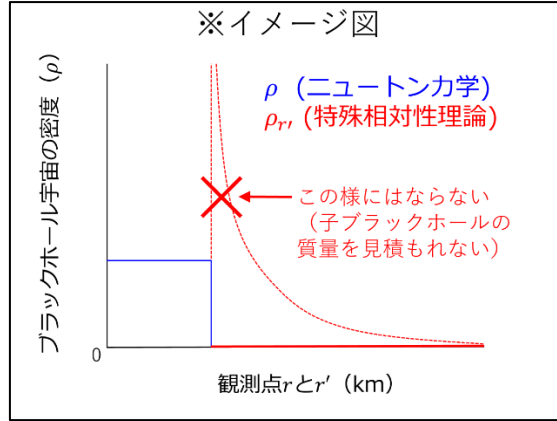


図 1 6 (18)式 (ブラックホール外部の相対時間の式) を用いたブラックホール質量の見積り

6.2 特殊相対性理論的考察

次に、特殊相対性理論的に議論する。まず、ニュートン力学的には

$$M_{R_s} = \int_0^{R_s} 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3} \pi \rho R_s^3 \quad (74)$$

(R_s : ブラックホール宇宙の半径)

である。仮に、 r_s から R_s までを積分したブラックホール宇宙の質量を \overline{M}_{R_s} とすると

$$\overline{M}_{R_s} = \int_{r_s}^{R_s} 4\pi r^2 \rho_r dr = \int_{r_s}^{R_s} \frac{4\pi r^2 \rho}{\sqrt{1 - r_s/r}} dr \quad (75)$$

(r_s : 子ブラックホールの半径)

となる。ただし、 ρ_r は (25)式 (特殊相対性理論的密度の式) を (18)式 (ブラックホール外部の相対時間の式) を用いて変換している。ここで $r_s/r = s$ として計算¹²すると

$$\begin{aligned} \overline{M}_{R_s} &= -4\pi \rho \int_{\frac{r_s}{R_s}}^1 \frac{r_s^2}{s^2 \sqrt{1-s}} \left(-\frac{r_s}{s^2} ds \right) = 4\pi \rho r_s^3 \int_{\frac{r_s}{R_s}}^1 \frac{1}{s^4 \sqrt{1-s}} ds \\ &= 4\pi \rho r_s^3 \left[-\frac{1}{3s^3} \sqrt{1-s} - \frac{5}{12s^2} \sqrt{1-s} - \frac{5}{8s} \sqrt{1-s} - \frac{5}{8} \tanh^{-1} \sqrt{1-s} \right]_{\frac{r_s}{R_s}}^1 \\ &= 4\pi \rho r_s^3 \left(\frac{R_s^3}{3r_s^3} \sqrt{1 - r_s/R_s} + \frac{5R_s^2}{12r_s^2} \sqrt{1 - r_s/R_s} + \frac{5R_s}{8r_s} \sqrt{1 - r_s/R_s} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{8} \tanh^{-1} \sqrt{1 - r_s/R_s} \right) \quad (76) \end{aligned}$$

となる。子ブラックホールとブラックホール宇宙の半径比を r_s/R_s として、(74)式と(76)式の関係について図 1 7 に示す。

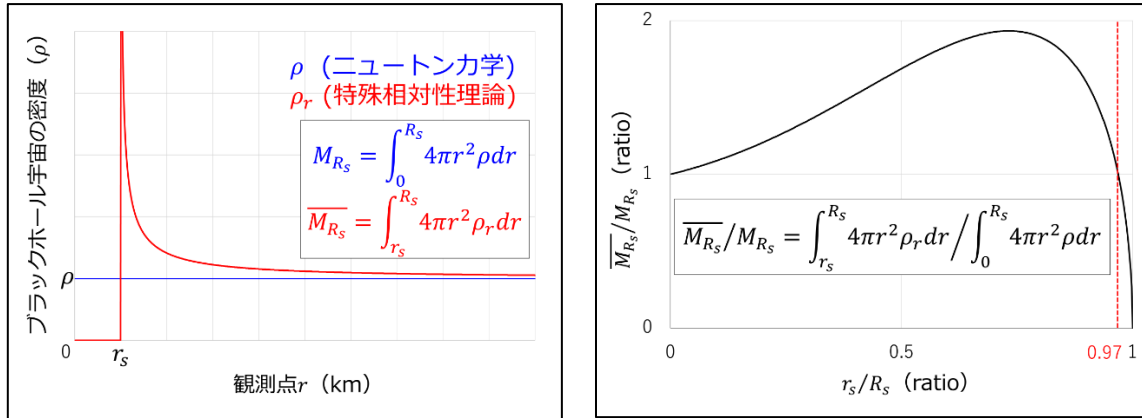


図 1 7 ブラックホール宇宙の密度 (左) と子ブラックホールとブラックホール宇宙の半径比 (r_s/R_s) と質量比 ($\overline{M}_{R_s}/M_{R_s}$) の関係 (右)

図 1 7 (右) より、 r_s/R_s は 0 から 0.97 の範囲において $\overline{M}_{R_s} \geq M_{R_s}$ であるが、これは r_s の拡大に伴いブラックホール宇宙の半径も拡大することを意味する。そこで、変動したブラックホール宇宙の半径を $R_s + \Delta R_s$ として、 $\overline{M}_{R_s + \Delta R_s} = M_{R_s}$ となる場合について考えると

$$\overline{M}_{R_s + \Delta R_s} = M_{R_s} \rightarrow \int_{r_s}^{R_s + \Delta R_s} 4\pi r^2 \rho_r dr = \int_0^{R_s} 4\pi r^2 \rho dr \quad (77)$$

($R_s + \Delta R_s$: 変動したブラックホール宇宙の半径、 r_s : 子ブラックホールの半径) について考えると、 $R_s + \Delta R_s$ と r_s の関係は図 1 8 のようになる。

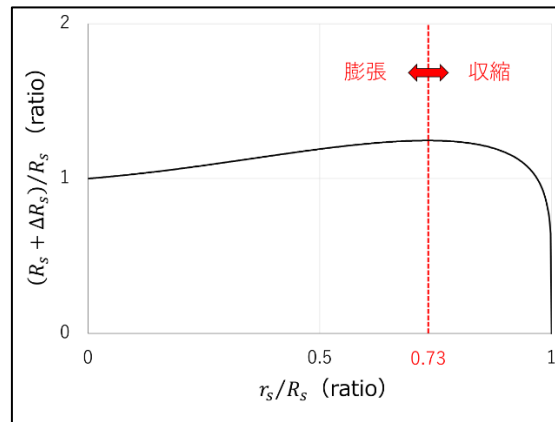


図 1 8 子ブラックホールの半径に対する変動したブラックホール宇宙の半径の関係

図 1 8 より、 r_s/R_s が $0 \rightarrow 0.73$ では $(R_s + \Delta R_s)/R_s$ は単調増加 (膨張) し、 r_s/R_s が $0.73 \rightarrow 1$ では $(R_s + \Delta R_s)/R_s$ は単調減少 (収縮) している。これを「エネルギー保存の法則」を前提に「各世代のブラックホール間の質量の交換」について考えると、単調増加 (膨張) するとき「ブラックホール宇宙」は「親ブラックホール」から質量を獲得しており、単調減少 (膨張) するときには「ブラックホール宇宙」は「子ブラックホール」に質量を奪われて最終的に消滅する、つまり「子ブラックホールと重なり合う」と解釈される。

6.3 インフレーションモデル

以上の議論から、「ブラックホールの誕生は質量の消滅に等しい」こととなり、図19のように(73)式はブラックホールの誕生 ($\Delta M < 0$) により巨大低密度ブラックホール宇宙が成長できるようになる。ちなみに、 $\rho = \rho_{\Delta r_s}$ では(3)式(シュワルツシルト半径と密度の関係式)より r_s も一致することからブラックホール宇宙とその外側の時空間(親ブラックホール宇宙)は重なり合う。例えば、仮に加速器などで超小型のブラックホールが誕生したとすると、周囲から質量を取り込むことですぐに低密度化してしまい、我々の宇宙と重なり合うことになる。

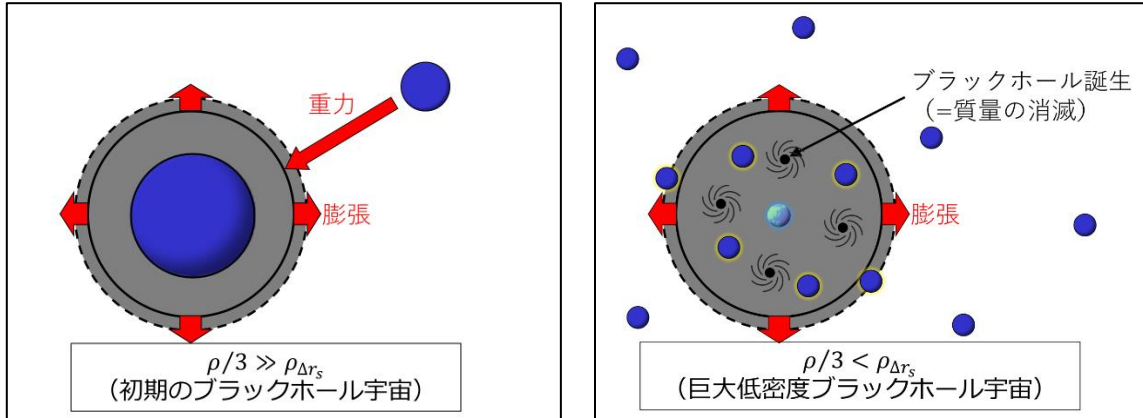


図19 初期ブラックホール宇宙のインフレーション(左)と成長したブラックホール宇宙(巨大低密度化)のインフレーション(右)についての解釈

次に、(73)式から導かれる解釈についての一例を紹介する。(73)式に対する単位時間当たりの変化(Δt)について考えると

$$\frac{\Delta r_s}{\Delta t} = \frac{1}{4\pi r_s^2(\rho/3 - \rho_{\Delta r_s})} \frac{\Delta M}{\Delta t} \quad (78)$$

となり、宇宙が光速で膨張していることを考えると $\Delta r_s/\Delta t = c$ であることから(78)式を整理すると

$$\Delta M = 4\pi r_s^2 c(\rho/3 - \rho_{\Delta r_s})\Delta t \quad (79)$$

となる。(79)式より、初期のブラックホール宇宙($\rho/3 \gg \rho_{\Delta r_s}$)は周囲の天体を取り込み膨張するとともに時間が経過し、巨大低密度化したブラックホール宇宙($\rho/3 < \rho_{\Delta r_s}$)は子ブラックホールが誕生($\Delta M < 0$)して膨張するとともに時間が経過($\Delta t > 0$)する(図19)。すなわち、もしも「宇宙の膨張が無ければブラックホール宇宙の時間も進まない」と解釈される。一方で、ブラックホール宇宙が膨張する際には時間も経過することになるため、(41)式 $U_{r \leq r_s}$ のようにブラックホール内部($r \leq r_s$)のポテンシャルを見積もることは有意なことである。図14(右)の赤線のような状態ではエネルギーの解放が起こりうると考えられるが、これは無から膨大なエネルギーが解放されたとされるビッグバンの起源を示唆している。

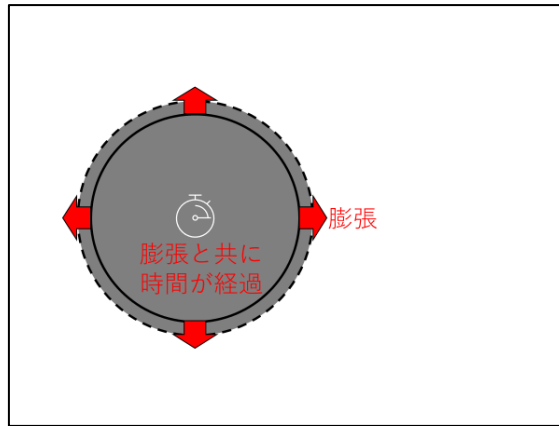


図20 ブラックホール宇宙は膨張と共に時間が経過するという解釈

最後に、『我々はブラックホールの中に住んでいる?』とするブラックホール宇宙モデルの議論に帰る。「ブラックホールの誕生は質量の消滅に等しい」と考えると、観測可能な宇宙の全質量 M から導かれたシュワルツシルト半径 r_s と観測可能な宇宙の半径 R が同等であることから、『我々の宇宙は一つのブラックホールである』とも解釈できる。

また、観測可能な宇宙の半径 R から観測可能宇宙の全質量 M の値を求めてみる。まず、 $U_{r \geq r_s}(r_s) = U_{r \leq r_s}(r_s)$ であることから、これを(38)式 ($U_{r \geq r_s}(r_s)$ と $U(r_s)$ の関係式) に代入すると

$$U_{r \leq r_s}(r_s) = \frac{U(r_s)}{2} \quad (80)$$

となり、さらに(80)式を(17)式 $U(r_s)$ に代入すると

$$\frac{U(r_s)}{2} = -\frac{GM_a m}{2r_s} = -\frac{1}{4}mc^2 \quad (81)$$

となる。ここで、我々が観測可能な天体は半径 r_s 以内であることから $M_a = M_{r_s}$ となる。よって、 M_{r_s} を観測可能な宇宙の全質量 M 、 r_s を観測可能な宇宙の半径 R とすると

$$r_s = \frac{2GM_{r_s}}{c^2} \rightarrow M = \frac{Rc^2}{2G} \quad (82)$$

が得られ、(82)式は(1)式 (シュワルツシルト半径の関係式) と一致する。宇宙の半径を 138 億光年とするならば、観測上の宇宙の全質量 (≒観測可能な宇宙の全質量) は、(82)式より 1.03×10^{53} kg と見積もられる。

7. 結言

今回「宇宙は一つのブラックホール」と解釈する一説について考察し、事象の地平線のシフトを考慮することでブラックホール宇宙モデルが解釈された。今回の議論から解釈されたブラックホール宇宙モデルは、1960年代多くの科学者から支持されていた定常宇宙モデル²¹に似たイメージを持たれるかもしれないが、その始まりは超新星爆発などによるブラックホールの誕生に帰することから、ビッグバンモデルにも似る。本ブラックホール宇宙モデルとビッグバンモデルとの決定的な違いとしては、そのインフレーションにあり、ビッグバンモデルは空間が膨張する(天体同士が遠ざかる)に対し、本ブラックホール宇宙モデルはシュワルツシルト半径が膨張する

(必ずしも天体同士は遠ざからない) という点にある。

ニュートン力学的考察から得られる脱出可能半径と一般相対性理論の解であるシュワルツシルト半径 r_s は偶然にも一致することは良く知られている。ただし決定的な違いとして、ニュートン力学ではシュワルツシルト半径から一時的に有限の距離まで飛び出すことが可能(最終的に戻ってくる)であることに対し、一般相対性理論ではシュワルツシルト半径から外には一瞬たりとも出ることができない、という点にある。この点において、今回の議論にあたって考慮した「観測点により事象の地平線がシフトする」という予測は、いわゆる「観測者効果」のような問題を生じさせてしまうことになる。しかしながら、電子の二重スリット実験²²などを鑑みると、現代物理学において「観測者効果」は無視することができず、「観測点により事象の地平線がシフトする」という予測も一概に否定することはできないであろう。

付記

本原稿は、個人的な考察をまとめたものである。

参考文献

-
- ¹ The Event Horizon Telescope Collaboration et al., The Astrophysical Journal Letters, 875:L1 (2019), <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>
 - ² NASA, <https://webb.nasa.gov/>
 - ³ R. A. Alpher, H. Bethe and G. Gamow, Physical Review, 73, 803-804 (1948), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.803>
 - ⁴ Nikodem J. Popławski, General Relativity and Gravitation, 53, 18 (2021), <https://doi.org/10.1007/s10714-021-02790-7>
 - ⁵ 須藤靖 (2022)、宇宙は数式でできている、朝日新聞出版、ISBN 978-4-02-295160-1
※<https://dot.asahi.com/dot/2022022500042.html?page=1> も参考
 - ⁶ A. Sneppen, Scientific Reports, 11, 14247 (2021), <https://doi.org/10.1038/s41598-021-93595-w>
 - ⁷ Paul Davies (2007), The Goldilocks Enigma, First Mariner Books, Houghton Mifflin Harcourt, ISBN 978-0618592265
 - ⁸ ESA, https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Planck/Planck_reveals_an_almost_perfect_Universe
 - ⁹ K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 7, 189-196 (1916) ※[シュバルツシルト半径 | 天文学辞典 \(astro-dic.jp\)](https://astro-dic.jp/) も参考
 - ¹⁰ A. Einstein, Annalen der Physik, 322, 10, 891-921 (1905), <https://doi.org/10.1002%2Fandp.19053221004>
 - ¹¹ E. Hubble, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 15, 3, 168-173 (1929), <https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>
 - ¹² I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik and A. Jeffrey (2007), Table of Integrals, Series, and Products, 7th ed.

-
- Cambridge, MA, USA: Academic Press, ISBN978-0-12-373637-6 ※[無理関数の原始関数の一覧 - Wikipedia](#) も参考
- ¹³ 大須賀健 (2011)、ゼロからわかるブラックホール、講談社、ISBN 978-4-06-257728-1
- ¹⁴ 日本アイソトープ協会 (2021)、放射線取扱の基礎、丸善出版、ISBN 4890732837
- ¹⁵ H. A. Bethe, Reviews of Modern Physics, 62, 801-866 (1990),
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.62.801>
- ¹⁶ 2018 CODATA recommended values ※[プランク単位系 - Wikipedia](#)、[物理定数 - Wikipedia](#) も参考
- ¹⁷ C. D. Anderson, Physical Review, 43, 491-494 (1933), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.43.491>
- ¹⁸ St. Mohorovičić, Astronomische Nachrichten, 253, 4, 93-108 (1934),
<https://doi.org/10.1002/asna.19342530402>
- ¹⁹ 日本アイソトープ協会 (1993)、陽電子計測の科学、日本アイソトープ協会、ISBN 978-4890730698
※[Ortho-1.pdf \(kek.jp\)](#) も参考
- ²⁰ J. G. Bednorz, K. A. Müller, Zeitschrift für Physik B Condensed Matter, 64, 189-193 (1986),
<https://doi.org/10.1007/BF01303701> ※[Akimitsu Laboratory Homepage \(okayama-u.ac.jp\)](#) も参考
- ²¹ F. Hoyle, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 108, 5, 372-382 (1948),
<https://doi.org/10.1093/mnras/108.5.372>
- ²² C. Jönsson, Zeitschrift für Physik, 161, 454-474 (1961), <https://doi.org/10.1007/BF01342460>