多重周期摂動を伴うハーパーモデルにおける量子拡散 II
Quantum diffusion in quasi-periodically perturbed Harper model II

Hiroaki S. Yamada[1, *] and Kensuke S. Ikeda[2]

[1] *Yamada Physics Research Laboratory, Aoyama 5-7-14-205, Niigata 950-2002, Japan*
[2] *College of Science and Engineering, Ritsumeikan University, Noji-higashi 1-1-1, Kusatsu 525-8577, Japan*

(Dated: July 31, 2023)

前稿では多色摂動を伴った Harper モデルにおける量子拡散を調べた。本稿では、このモデルへ 1 パラメータを導入することにより一般化し、量子拡散特性を調べた結果の概略を示す。

Keywords:量子拡散 (quantum diffusion)、アンダーソン局在 (Anderson localization)、
正常拡散 (normal diffusion)、弾道的拡散 (ballistic diffusion)

PACS numbers: 71.23.An,73.43.Cd,72.20.Ee

I. INTRODUCTION AND MODELS

本稿では文献 [1] で扱ったモデルを拡張した、次の多重周期摂動を伴う Harper モデルを取り扱う。

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{n=1}^{N} |n\rangle 2V\cos(2\pi Qn+\varphi)[L+\epsilon f(t)]\langle n| \\ &- \sum_{n}^{N}(|n\rangle\langle n+1|+|n+1\rangle\langle n|). \end{aligned} \tag{1}$$

$Q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ であり、$L=1, \epsilon=0$ が Harper モデルである。以下では文献 [1] を前稿 [I] として引用する。時間変動 $f(t)$ は、前稿 [I] 同様、

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{i}^{M}\cos(\omega_i t+\theta_i), \tag{2}$$

であり、M が振動数 $\{\omega_i\}$ の数 (色数) で ϵ は摂動強度である。振動数は互いに非整合なオーダー 1 のものを取る。

前稿 [I] では $L=1$ の場合を調べ、局在状態 $(V>1)$ の場合における局在-subdiffusion($\epsilon=\epsilon_c$)-正常拡散と転移 LDT(localized-diffusive transition) の存在、広がった状態 $(V<1)$ の場合における弾道拡散-sperdiffusion($\epsilon=\epsilon_b$)-正常拡散と転移 BDT(ballistic-diffusive transition) の存在を示した。さらに、臨界状態 $(V=1)$ の場合は、臨界正常拡散から摂動による正常拡散へと転移、DDT(diffusive-diffusive transition) も存在した。

本稿では、L を連続パラメータとし $L=1$ 以外、$0\leq L<1$ や $L>1$ の場合にも拡張し、ϵ 変化により LDT や BDT について報告する。まず、以下のように文献 [2–5] などに従い、$L=1$ をモデル A として、典型的な場合 $L=0$ をモデル B とする [6]。

$$\begin{cases} L=1 & \text{(model A)} \\ L=0 & \text{(model B).} \end{cases} \tag{3}$$

*Corresponding author. Email: hyamada[at]uranus.dti.ne.jp

モデル A の場合、ϵ の増大で LDT がみられたが、モデル B の場合、ϵ の増大で BDT がみられる。すなわち、どちらの場合も ϵ の増大で正常拡散が出現するが、この正常拡散がどうつながるのか、これを見るためにパラメーター L の値 $0\leq L\leq 1$ における現象を調べればよい。

また、L を 1 を超えて大きくすれば、局在状態 $(V>1)$ と広がった状態 $(V<1)$ どちらの場合でも無摂動状態 $\epsilon=0$ をより強調した現象を見ることができる。例えば、前稿 [I] で紹介したような $L=1$ で局在状態 $(V>1)$ において、LDT が存在しない ϵ の場合においても、L を増大することで LDT を実現できる。さらに、比較的小さな ϵ に固定して、L の変化でも localized-ballistic transition(LBT) が生じる。これは元々の Harper モデルの強度 V による MIT 転移と同じものである。Harper モデルを Anderson モデルに置き換えた場合の結果についても付録 A で考察した。

前稿 [I] 同様に、初期局在波束 $<n|\Psi(t=0)>=\delta_{n,n_0}$ の量子ダイナミックスを数値計算しその拡散の特性を、平均二乗変位 (MSD) $m_2(t)=\sum_n (n-n_0)^2\left\langle\overline{|\phi(n,t)|^2}\right\rangle$ や拡散指数の時間変動 $\alpha_{ins}(t)=\frac{d\log m_2(t)}{d\log t}$ を用いて評価する。数値計算の他の条件は前稿と同様である。

II. DYNAMICAL PROPERTIES IN THE MODEL B ($L=0$)

この節では、局在が存在しないモデル B($L=0$) でのダイナミックスを調べる。この場合は、ϵV がダイナミックスを特徴づけるパラメータになるのでモデル A の場合と異なり、V に依る場合分けは必要なく、$V=1$ として ϵ 変化を見ていこう。

$\epsilon=0$ なら、ポテンシャル項は無くなるので、周期系であり局在波束は弾道的 (ballistic) な状態で広がる。つまり、

$$m_2(t)\sim t^{\alpha}, \quad \alpha=2 \tag{4}$$

が成立する。

モデル B において、それぞれの M に対する MSD の時間変化を示したものが図 1 である。図 1(a) の $M=1$ の場合、ϵ が比較的小さい場合は正常拡散側に移行するが、ϵ が大きくなると、$t\to\infty$ では $m_2(t)\sim t^2$ に漸近していくことがわかる。これに対し、図 1(b)-(d) に示すように、$M\geq 2$ では立ち上がりは $m_2(t)\sim t^2$ でも $t\to\infty$ では $m_2(t)\sim t^1$ と正

常拡散に漸近する。しなわち、弾道-sperdiffusion($\epsilon = \epsilon_b$)-正常拡散と BDT(ballistic-diffusive transition) の存在を示唆していることになる。これはモデル A における広がった状態 ($V < 1$) の場合と同様である。図 2 に示すように、瞬間的拡散指数の時間変動 $\alpha_{ins}(t)$ も $M = 1$ は常に弾道的な $\alpha = 2$ に向かい、転移は存在しない。一方、$M \geq 2$ では、$m_2 \propto t^2$ から $m_2 \propto t^1$ へ転移 (BDT) があることがわかる。

また、$M \geq 2$ の正常拡散を示す領域で拡散係数 $D = \lim_{t\to\infty} \frac{m_2(t)}{t}$ を見積もったものが図 3 である。D は ϵ の増大で減少することがわかる。

モデル A における、ϵ の増大で拡散状態に転移した後の拡散係数 D の ϵ 依存性も図に重ねて表示してあるが、ϵ に関して減少する領域では、モデル A とモデル B の結果はかなりよく一致していく。$L = 0$ の正常拡散と前稿での $L = 1$ での $\epsilon > \epsilon_b$ での正常拡散にどのようにつながるのであろうか。次節でみることにする。

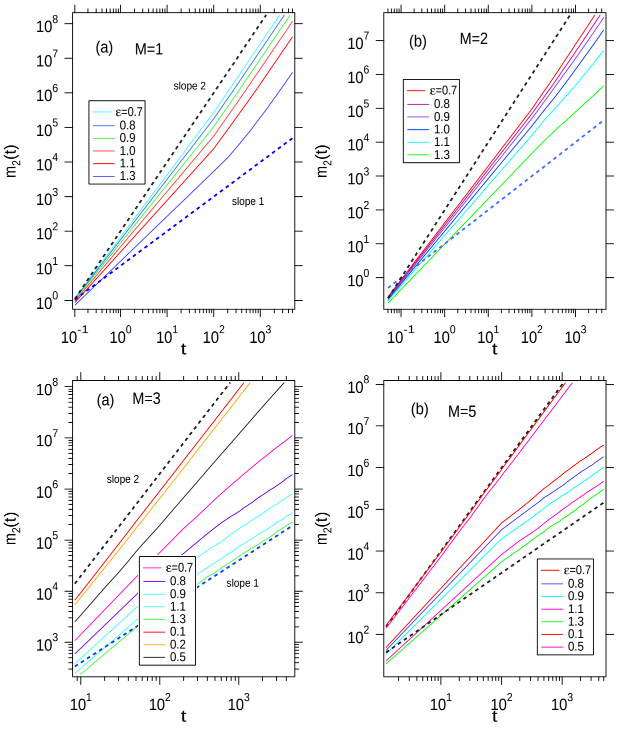

FIG. 1: (Color online) The double-logarithmic plots of $m_2(t)$ as a function of t for various strength $\epsilon = 0.7, 0.8, 0.9, 1.1, 1.3$ from top to bottom, in the model B of $V = 1$ with (a)$M = 1$, (b)$M = 2$, (c)$M = 3$ and (d)$M = 5$. $\hbar = 1/8$. The dashed lines indicate normal diffusion $m_2 \sim t^1$ and ballistic spreading $m_2 \sim t^2$.

III. COMPARISON OF MODEL A AND MODEL B

前稿 [I] で調べたモデル A($L = 1$) と前節で調べたモデル B($L = 0$) を含めて、連続変化するパラメータ L に対するダイナミックスや転移を調べる。Localized states の局在相を L 相、Diffusive states の拡散相を D 相、Ballistic states の弾道相を B 相とする。ここでは $M = 3$ として、V と ϵ により場合分けをして考えることにする。

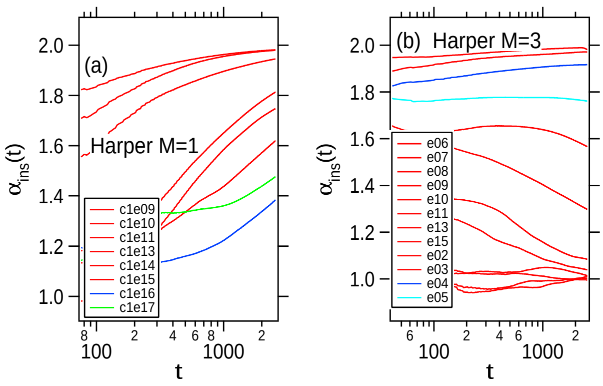

FIG. 2: (Color online) The time-dependence of $\alpha_{ins}(t)$ for various strength ϵ in the model B of $V = 1$ with (a)$M = 1$ and (b)$M = 3$. $\hbar = 1/8$. The values of ϵ used are $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1.0$ from top to bottom in the panle (a), and $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.0$ from top to bottom in the panle (b), respectively. The dotted lines indicate $\alpha = 1$ and $\alpha = 2$.

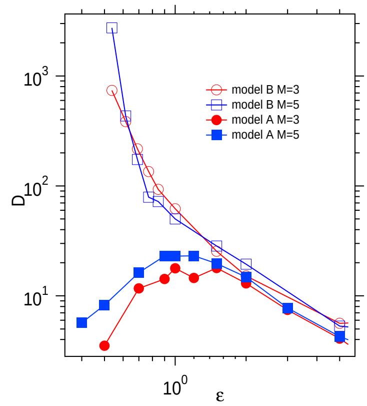

FIG. 3: (Color online) Diffusion coefficient D as a function of ϵ in the model A and model B of $V = 1.3$. Note that the both axes are in logarithmic scale.

A. large ϵ region ($\epsilon > \epsilon_c, V > V_c$)

$V > V_c$ で ϵ が大きい場合、モデル A において $\epsilon > \epsilon_c$ で正常拡散への LDT が起こるので、モデル B での正常拡散の領域の拡散係数との関係を比べることができる。図 4(a) は $V = 1.3$, $\epsilon = 1.0 (> \epsilon_c)$ として MSD を L を $L = 1$ から $L = 0$ まで変えてみたものである。($\epsilon_c \simeq 0.32$ である。) この場合、摂動無しでも摂動を加えても正常拡散が生じる。正常拡散自体は乱されない。一見、L の増大で拡散が抑えられていくように見えるが、この間の拡散量の変化は L に関して単調ではない。これを拡散係数 D の L 変化で確かめよう。図 4(b) にみられるように $L = 0$ 付近で

は複雑な振る舞いをするが、$L > 0.3$ では単調に減少して $L = 1$ での拡散係数につながることがわかる。さらに、L を 1 を超えて大きくしていくと、拡散係数がさらに小さくなり、$L = L_c(> 1)$ のどこかで局在へ転移するのである。

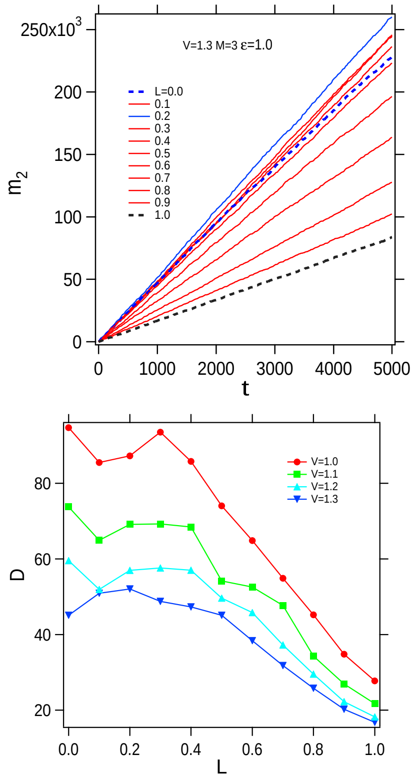

FIG. 4: (Color online) (a)The real plots of m_2 as a function of t for some values of the parameter L: $L = 0.0, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ in the perturbed Harper model ($V = 1.3$,$\epsilon = 1.0$). $\hbar = 1/8$. (b)Diffusion coefficient D as a function of L in the model A of $V = 1.0, 1.1, 1.2, 1.3$.

B. small ϵ region ($\epsilon < \epsilon_c$, $V > V_c$)

$\epsilon < \epsilon_c$ で ϵ が小さく局在が強調される場合、$0 < L_c < 1$ の L の小さな領域で LBT(localized-ballistic transition) がみられるであろうか。図 5(a) に ($V = 1.3$,$\epsilon = 0.1$) の結果を示した。L の増大で $0 < L_c < 1$ で、Ballistic→ 正常拡散 ($L = L_c \simeq 0.7$)→ 局在と転移がみられる。つまり転移点 $L = L_c$ で $m_2(t) \sim t^1$ と振る舞う。

さらに $V < V_c$ で ϵ が小さい場合 (つまり、ballistic 拡散が基本) を図 5(b) に示した。L を大きくしていくと $L_c > 1$ で ballistic から局在に転移する。つまり $L_c > 1$ で LBT がある。

結局、少なくともある L_c で BLT がみられる $\epsilon > 0$ の有限領域がある。特に、$V > V_c$ のとき $0 < L_c < 1$ であり、$V < V_c$ のとき $L_c > 1$ である。

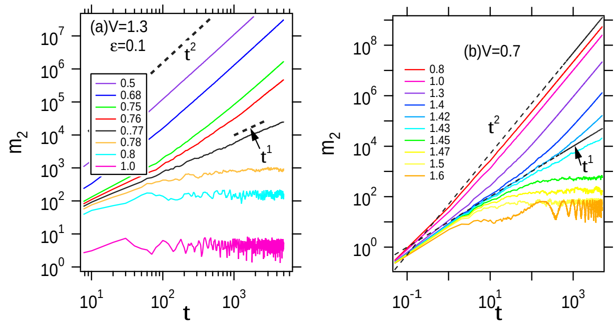

FIG. 5: (Color online) The double logarithmic plots of m_2 as a function of t for some values of the parameter L in the perturbed Harper model of $M = 3$. (a)$V = 1.3$, $\epsilon = 0.1$ ($L_c \simeq 0.7$). (b)$V = 0.7$, $\epsilon = 0.1$ ($L_c \simeq 1.42$). $\hbar = 1/8$. The solid lines have slope 1 and 2.

C. 考察

この節で観てきた波束の拡散ダイナミックスのパラメータ L 依存性は一般のモデル A の性質を基に見直すことができる。そのため、potential 部分を次の形に変えてみる。

$$2VL\cos(2\pi Qn)\left[1 + \frac{\epsilon}{L}f(t)\right]. \qquad (5)$$

すなわち、この形ならば、(V, L, ϵ) をどうどのように取ろうが、前稿 [1] で観た LDT や BDT との対応が明確である。ただし、ここでは $L \neq 0$ とする。式 (5) で $VL \to V^{'}$, $\epsilon/L \to \epsilon^{'}$ とみると、Harper モデルに多色時間摂動を加えたモデル A と同じ性質を持つことがすぐにわかる。すなわち、色数 M に対する性質は L に依らず前稿と同じである。

もし、$M \geq 3$、$L \neq 0$ で、$L = 1$ も含めて L を自由に動かせばどこかの ϵ やどこかの L で必ず転移は起こる。その転移は $(VL)_c = 1$ を満たすであろう。実際に、図 6 にみられるように、$M = 3$ でいくつかの V と ϵ での L 転移での転移点は

$$L_c \sim \frac{1}{V} \qquad (6)$$

を満たす。

この L_c での転移の特徴は元々の無摂動 Harper モデルの $V = V_c$ での転移 (BLT あるいは MIT と表現する) と同じものであろうか。これを調べるため、前稿 [1] の $\epsilon = 0$, $V < V_c$ でもみた弾道状態での群速度 v_g を計算したものが図 7 である。v_g^2 を $(L_c - L)$ について plots した結果、

$$v_g \sim (L_c - L)^1 \qquad (7)$$

であることがみられる。すなわち、本節でみた BLT は元々の Harper モデルの BLT($v_g \sim (V_c - V)^1$) 同じタイプの転移であろう。この転移は $f(t)$ に関係なくある程度の ϵ までは成立するという、前稿での結果も支持するものである。

D. intermidiate ϵ region

やや中間の ϵ 領域で、パラメータ L の変化で B 相 →D 相 →L 相と 2 段階の転移を示すであろうか。図 8(a) は

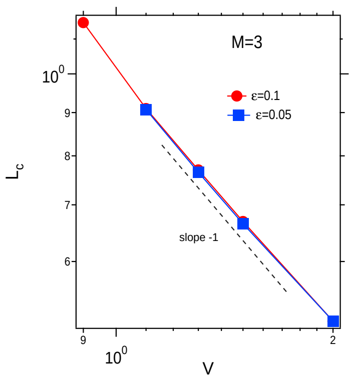

FIG. 6: (Color online) The dependence of the transition point L_c on the potential strength V for some cases $\epsilon = 0.05, 0.1$, in the perturbed Harper model of $M = 3$. The dotted lines have slope -1.

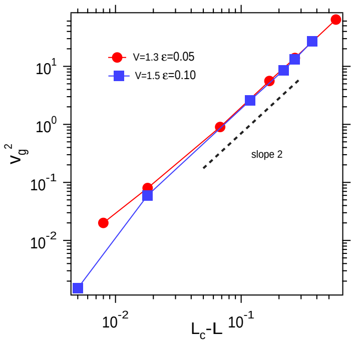

FIG. 7: (Color online) The dependence of the squared group verocity v_g^2 as a function of $(L_c - L)$ in the perturbed Harper model of $M = 3$. The dotted lines have slope 2.

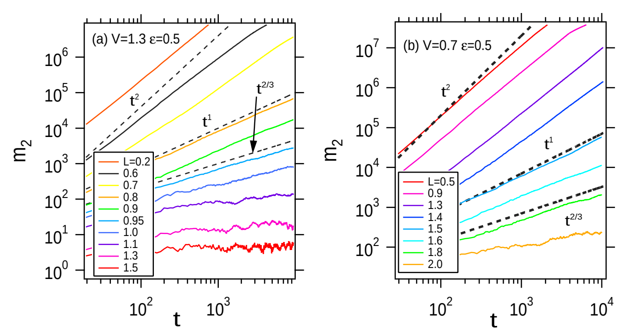

FIG. 8: (Color online) The double logarithmic plots of m_2 as a function of t for some values of the parameter L in the perturbed Harper model of $M = 3$. (a)$V = 1.3$, $\epsilon = 0.28$. (b)$V = 0.7$, $\epsilon = 0.5$. The solid lines have slope 2/3, 1, and 2.

$V = 1.3(> V_c)$、図 8(b) は $V = 0.7(< V_c)$ の結果である。どちらの場合も、$L = 0$ の付近 B 相から始めて、L を大きくしていくと、B 相 ($m_2 \sim t^2$) から D 相 ($m_2 \sim t^1$) と転移し、さらにパラメータ L の増加で転移点 ($m_2 \sim t^{2/3}$) を経て、L 相 ($m_2 \sim t^0$) と局在至る変化がみてとれる。これらの場合の ($\epsilon - L$) 空間の相図のイメージを図 9 として整理した。おおよその数値がわかるようにシンボルでデータ点をいくつか記入してある。

IV. SUMMARY AND DISCUSSION

前稿 [I] では、ランダムネスもキックもない 1 次元準周期系である Harper モデルを用い、少数自由度の結合とみなせるような準周期的時間摂動が結合した系 (モデル A) に様々な設定で正常拡散が発生ことを確認した。本稿では、そのモデルに対し、さらに連続な 1 パラメータ L を導入拡張し、モデル B($L = 0$) との拡散的状態の繋がりなどを調べた。

摂動強度 ϵ が大きい場合は、モデル A の拡散係数の性質はモデル B でのものに一致する。また、Harper での局在非局在転移 (MIT) と類似の局在-拡散-弾道転移 (LBT) の存在も L の変化で確認した。この拡張モデルは、$L \neq 0$ では式 (5) で $VL \rightarrow V'$, $\epsilon/L \rightarrow \epsilon'$ とすれば、モデル A と同じである。そこで、前稿 [I] での (V, ϵ) 空間におけるものを含めて、改めて $(LV, \epsilon/L)$ 空間で、局在相 (L 相)、拡散相 (D 相)、弾道相 (B 相) の相図を表現したものが図 11 である。ϵ_c 曲線の存在や、ϵ_b 曲線の存在が見てとれる。本文で用いた Harper モデルでも、付録でみた Anderson モデルの場合でも、多色摂動の色数 M が $M = 4, 5, ...$ と増加すると、正常拡散領域が殆どの空間を埋めていくことがよくわかる。

Appendix A: Anderson モデルによる (L, ϵ) 空間の相図

Anderson モデルは、局在状態のみで、拡散状態や弾道状態が元々存在しないことが、Harper モデルと異なる。本文で用いた Harper モデルを Anderson モデルに換えた系における局在･非局在現象は良く調べられている [2–4]。摂動の色数 M や強度 ϵ により、$M \geq 3$ で臨界強度 ϵ_c 存在し、$\epsilon > \epsilon_c$ において拡散状態に転移することがわかっている。

ランダムネスの強度 W を固定して、Anderson モデルにした系で拡張パラメーター L を導入した場合、(L, ϵ) 空間で、局在 (L)、拡散 (D) に関する相図のイメージは図 11 である。$\epsilon > \epsilon_c$ か $\epsilon < \epsilon_c$ により L の変化による転移点 L_c は、$L_c > 1$ か $0 < L_c < 1$ に対応する。$M = 4, 5, ...$ では臨界曲線の立ち上がりが急峻になり、L 相は狭く D 相が全体を占めるように変化していくであろう。また、本文の考察でもわかるように $M = 2$ において、L の値に依らず局在であると推察できる。

上記の相図の根拠となるデータの一部は図 12 に与え、その転移点 L_c は相図に表示してある。　$M = 3$ について結果が図 12(a)(b) である。局在から程遠い状態から始めて、L をかなり大きくすると局在がみられる。(a) の $M = 3$ で $\epsilon = 0.5$ の場合は、$L = 1$ で $0.5 > \epsilon_c$ なので、L を大きくしていくと $L = 1$ の $m_2 \sim t^1$ や $L_c \simeq 2.2$ の $m_2 \sim t^{2/3}$ を経て局在がみられる。図 12(b) は、$\epsilon < \epsilon_c$ の例であり、たしかに $L_c \simeq 0.7(< 1)$ となる。$M = 2$ については、図 12(c) から、$M = 2$ では基本的に局在がみられ、L を小さ

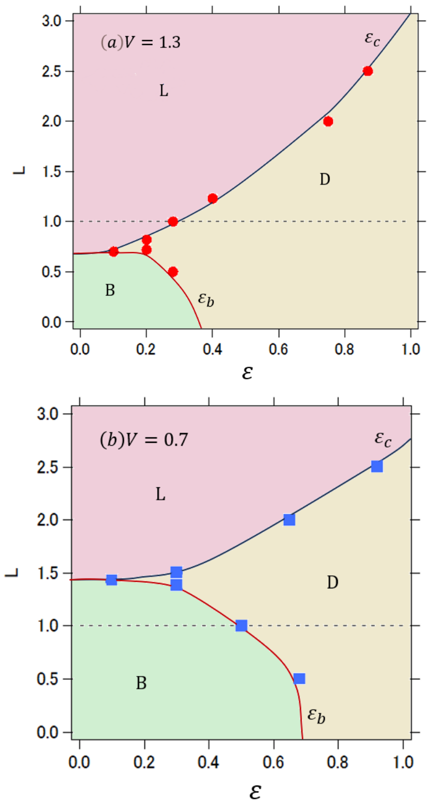

FIG. 9: (Color online) The schematic phase diagram in the (L, ϵ) plane for $M = 3$ in the perturbed Harper model of (a)$V = 1.3$ and (b)$V = 0.7$. The wavepackets are localized in the region L, are diffusive in the region D, and are ballistic in the region B. Some numerical results of ϵ_c and ϵ_b are plotted in the diagram by red circles.

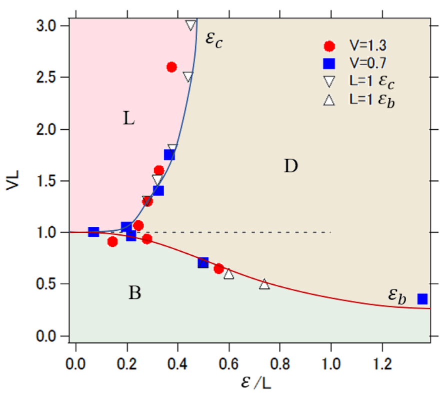

FIG. 10: (Color online) The schematic phase diagram in the $(VL, \epsilon/L)$ plane for the perturbed Harper model of $M = 3$. The wavepackets are localized in the region L, are diffusive in the region D, and are ballistic in the region B. Some numerical results of ϵ_c and ϵ_b are plotted in the diagram by some symbols.

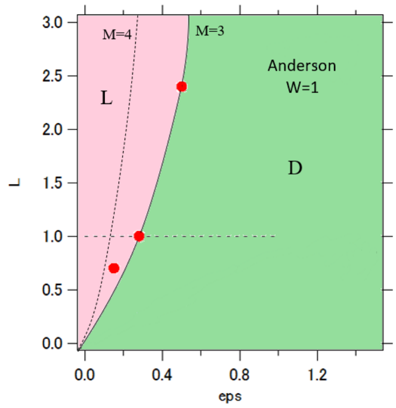

FIG. 11: (Color online) The schematic phase diagram in the (L, ϵ) plane for the perturbed Harper model of $M = 3$. The wavepackets are localized in the region L and are diffusive in the region D. Some numerical results of ϵ_c for $M = 3$ and $M = 2$ are plotted in the diagram by red circles and blue boxes, respectively.

くして $m_2 \sim t^{2/3}$ などの subdiffusion は現れず、もこの領域では局在は破れない。さらに L を非常に小さくすると $m_2 \sim t^1$ に漸近し、拡散指数が 1 の正常拡散と区別できないレベルに至る。

kicked Anderson モデルや kicked Harper モデルでも拡張パラメーター L を導入し転移や相図を表示することができる [7, 8]。

●著者の貢献:
山田弘明：研究構想、計算の実行、文章の執筆
池田研介：研究構想
●利益相反: 本原稿にかかわる開示すべき利益相反関連事項はない。(The authors declare that they have no conflict of interest.)

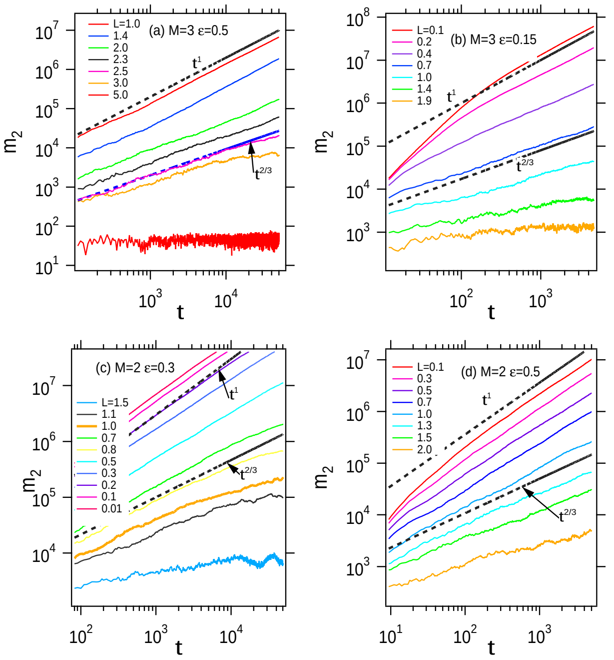

FIG. 12: (Color online) The double logarithmic plots of m_2 as a function of t for some values of the parameter L in the perturbed Anderson model of the strength $W = 1$. (a)$M = 3$, $\epsilon = 0.5$, and $L_c \simeq 0.24$ (b)$M = 3$, $\epsilon = 0.15$, and $L_c \simeq 0.7$ (c)$M = 2$, $\epsilon = 0.3$, and $L_c \simeq 0.23$ (d)$M = 2$, $\epsilon = 0.5$ and $L_c \simeq 0.4$. $\hbar = 1/8$. The dashed lines have slope 1 and 2/3.

[1] H.Yamada and K.S. Ikeda, 多重周期摂動を伴うハーパーモデルにおける量子拡散 I. 前稿 [I] として引用。

[2] H.Yamada and K.S. Ikeda, Dynamical delocalization in one-dimensional disordered systems with oscillatory perturbation, Phys. Rev. E **59**, 5214(1999).

[3] H.Yamada and K.S. Ikeda, Anderson localized state as a predissipative state: Irreversible emission of thermalized quanta from a dynamically delocalized state, Phys. Rev. E **65**, 046211(2002).

[4] H.S.Yamada and K.S.Ikeda, Presence and absence of delocalization-localization transition in coherently perturbed disordered lattices, Phys.Rev.E **103**, L040202(2021).

[5] H.S.Yamada and K.S.Ikeda, Localization and delocalization properties in quasi-periodically-driven one-dimensional disordered systems, Phys.Rev.E **105**, 054201(2022).

[6] ポテンシャルをどう設定してもモデル B の場合は局在状態は生じないが、$\epsilon = 0$ での周期系に coherent 摂動が加わり、1 電子問題の散乱がどう変化するかという点で、より現実的といえるかもしれない。

[7] H.S.Yamada, and K.S. Ikeda, Critical phenomena of dynamical delocalization in quantum maps: Standard map and Anderson map, Phys.Rev.E **101**, 032210(2020).

[8] H.S.Yamada and K.S.Ikeda, Localized-Diffusive and Ballistic-Diffusive Transitions in Kicked Incommensurate lattices, Phys.Rev.E **107**, L062201(2023).