

多重周期摂動を伴うハーパーモデルにおける量子拡散 I

Quantum diffusion in quasi-periodically perturbed Harper model I

Hiroaki S. Yamada^{1,*} and Kensuke S. Ikeda²

¹*Yamada Physics Research Laboratory, Aoyama 5-7-14-205, Niigata 950-2002, Japan*

²*College of Science and Engineering, Ritsumeikan University, Noji-higashi 1-1-1, Kusatsu 525-8577, Japan*

(Dated: August 2, 2023)

多色時間摂動を伴った Harper モデルにおける量子波束の拡散の局在・非局在性を調べた。摂動強度を増大すると、局在相、弾道相どちらの場合でも、2色以上では拡散状態へ転移することが確かめられた。局在状態の性質も含めて、これらの拡散状態に関する数値計算データを整理して示すことが本稿の目的である。

Keywords: 量子拡散 (quantum diffusion)、アンダーソン局在 (Anderson localization)、正常拡散 (normal diffusion)、弾道的拡散 (ballistic diffusion)

PACS numbers: 71.23.An, 73.43.Cd, 72.20.Ee

I. INTRODUCTION

一次元系で局在・非局在現象が生じる準周期系は、Anderson モデルなどのランダム系と同様に、物理的にも数学的にも興味深く長年研究されている [1–3]。特に、Harper モデルはその特殊な性質から、ポテンシャル強度 V の変化により、局在状態、広がった状態、臨界状態を実現でき、解析的にも、数値的にも、実験的にも研究が進んでいる [4–10]。 $V > 1$ では全ての固有状態が局在し、 $V < 1$ では全ての状態が広がった状態に転移する。このポテンシャル強度による転移を MIT (metal-insulator transition) とよぶ。

この性質は量子波束のダイナミクスにも反映し、 V の変化により波束の広がり方が、局在 (localized)、拡散 (diffusive)、弾道 (ballistic) と存在し、それらが転移する。このため本稿ではこの転移を BLT (ballistic-localized transition) と呼ぶ [11–16]。さらに、Harper モデルを拡張し、移動度端 (mobility edge) を持つモデルでの局在・非局在転移も現在盛んに研究されている [17–20]。

一次元系ランダム系や準周期系に多重周期的な時間変動を加えた系の波束のダイナミクスにおいても、局在・非局在に関する多様な振る舞いが現れ、研究が進められている。その代表的なものが kicked Anderson モデルや kicked Harper モデルである [21–29] [30–33]。我々はこれまでに Anderson モデルや kicked Anderson モデルに時間的な多重周期摂動を加えた系で、その局在状態が非局在化し、正常拡散の生じる量子相転移現象の詳細を調べてきた [34–37]。さらに、最近、kicked Harper モデルに多重周期摂動を加えた系での局在・拡散転移と弾道・拡散転移の存在を確認した [37]。

この研究では、まだほとんど調べられていない多重周期時間摂動下の Harper モデルの量子拡散ダイナミクスを調べる [38–40]。Harper モデルはポテンシャル強度 V により、3つの状態、局在状態 ($V > 1$)、広がった状態 ($V < 1$)、臨界状態 ($V = 1$) で、それぞれの場合で時間摂動の色数 M や強度 ϵ を変えてその効果をみていく。振動が1色 ($M = 1$) の場合、 ϵ を変えても系の性質

は大きくは変化しないが、 $M \geq 2$ では、ダイナミクスに様々な変化が見られる。局在状態 ($V > 1$) の場合、 ϵ を増大すると局在-subdiffusion ($\epsilon = \epsilon_c$)-正常拡散と転移する。これを LDT (localization-diffusive transition) と記す。一方、広がった状態 ($V < 1$) の場合、 ϵ を増大すると弾道-sperdiffusion ($\epsilon = \epsilon_b$)-正常拡散と転移する。これを BDT (ballistic-diffusive transition) と記す。どちらの転移の臨界強度も M の増大で減少した。また、臨界状態 ($V = 1$) の場合への摂動効果も調べる。この場合は、 ϵ を増大してもしばらくは元々の Harper の臨界状態としての正常拡散を維持する。その後、この正常拡散から摂動による正常拡散へと転移する。これは Harper 固有の現象で DDT (diffusive-diffusive transition) と記す。 $M = 2$ の微妙な点を除いては、定性的傾向は kicked Harper map (KHM) の場合と同じといえる [37]。

Harper モデルを例に、ランダムネスやノイズも無く、しかも kick も無い一次元系で、準周期的時間摂動が印加した場合に容易に量子正常拡散が発生することが示されたことになる。このことについても議論する。

II. MODEL

以下の時間的な多重周期摂動を伴うハミルトニアンで記述される Harper モデル (一次元一電子系) を考える。

$$H(t) = \sum_{n=1}^N |n\rangle V(n) [1 + f_\epsilon(t)] \langle n| + T \sum_n (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|). \quad (1)$$

$\{|n\rangle\}$ は直交基底である。オンサイトポテンシャルは

$$V(n) = 2V \cos(2\pi Qn + \varphi), \quad (2)$$

であり、 Q は無理数で $Q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ にとり、 φ は任意の位相である。 T はトランスファーエネルギーであり、 $T = -1$ とする。無摂動の場合 ($\epsilon = 0$)、Harper モデルは磁場中の二次元結晶格子系における電子を記述するモデルでもあ

*Corresponding author. Email: hyamada[at]uranus.dti.ne.jp

り、Aubry-Andre モデル (AA モデル) や Aubry-Andre-Harper モデル (AAH モデル) と呼ばれることもある。

時間変動 $f_\epsilon(t)$ は

$$f_\epsilon(t) = \frac{\epsilon}{\sqrt{M}} \sum_i^M \cos(\omega_i t + \theta_i), \quad (3)$$

であり、 M が振動数の数 (色数) で ϵ は摂動強度である。振動数は互いに非整合なオーダー 1 のものを取る。長時間平均は $\overline{f_\epsilon(t)^2} = \epsilon^2/2$ であり、 $\{\theta_i\}$ は時間変動の位相であるが、 $\{\theta_i = 0\}$ とし、 θ_i の取り方に依らない長時間の現象をみる。見たい現象によっては位相 φ による平均操作がデータを安定させるため有効になることもある。

サイト n_0 に局在した初期波束 $\langle n | \Psi(t=0) \rangle = \delta_{n,n_0}$ に対し、次のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (4)$$

を用いた時刻 t での波動関数 $|\Psi(t)\rangle$ の時間発展を計算する。そして、局在非局在の程度を次の MSD $m_2(t)$ によりモニターする:

$$m_2(t) = \sum_n (n - n_0)^2 \langle |\phi(n, t)|^2 \rangle, \quad (5)$$

ここで $\phi(n, t) = \langle n | \Psi(t) \rangle$ はサイト表示の波動関数 (量子状態) である。

一般に、LDT や BDT などの転移点では、非整数の拡散指数 α で特徴づけられる $m_2(t)$ の振る舞いが期待される。

$$m_2(t) \sim t^\alpha (0 < \alpha < 2) \quad (6)$$

この拡散指数 α の時間依存を、揺らぎを抑えるためにローカルな時間平均をした MSD $m_2(t)$ を用いて計算する。すなわち、

$$\alpha_{ins}(t) = \frac{d \log \overline{m_2(t)}}{d \log t} \quad (7)$$

を数値的に求める。この量はシャープな転移点を決められなくても、転移点の有無やその転移の領域を調べる等、転移の全体的様子を記述するのに役立つ。LDT の例では、転移点 ϵ_c の上側 $\epsilon > \epsilon_c$ では、正常拡散を示し $\alpha_{ins}(t) \rightarrow 1$ となり、その下側 $\epsilon < \epsilon_c$ では局在を示し $\alpha_{ins}(t) \rightarrow 0$ となる。転移点 $\epsilon \simeq \epsilon_c$ 周辺では $\alpha_{ins}(t) \rightarrow \alpha_c (< 1)$ 、と臨界拡散の拡散指数に漸近する。

計算は 2nd order symplectic integrator で、時間刻みとしては安定な $\Delta t = 0.005 \sim 0.02$ を用いた。この計算で用いるパラメータは $\hbar = 1/8$ または $\hbar = 1$ である。摂動強度は主に $\epsilon < 0.5$ とする。システムサイズ $N = 2^{13} - 2^{17}$ とし、定性的な結果は変わらない。

III. SOME PRELIMINARIES

無摂動 ($\epsilon = 0$) の元々の Harper モデルは、以前より物理的にも数学的にもよく研究されている。その結果を簡単にまとめておくことが本節の目的である。定常状態の

固有関数の性質として、Harper モデルのもつ自己双対性 (self-duality) により、 $V > 1$ では全ての固有関数は局在しそのスペクトルは点スペクトル、 $V < 1$ では広がった状態で絶対連続スペクトルに転移する。臨界点の $V = V_c = 1$ では、固有関数は臨界状態でスペクトルは特異連続スペクトルを示す。局在領域 ($V > V_c (= 1.0)$) での固有状態の局在長 $\xi_0(V)$ は、全ての固有エネルギーに対し

$$\xi_0 = \frac{1}{\ln |V|} \quad (8)$$

であたえられ、エネルギーに依らない。この著しい性質は、自己双対性と Thouless 公式により導かれる。

これらの性質を反映し、初期局在波束の量子ダイナミクスは、 $V > 1$ では指数関数的に局在し、 $V < 1$ ではバリスティックな広がり方をし、 $V = 1$ では (正常) 拡散的に広がると示唆されている [11–13]。

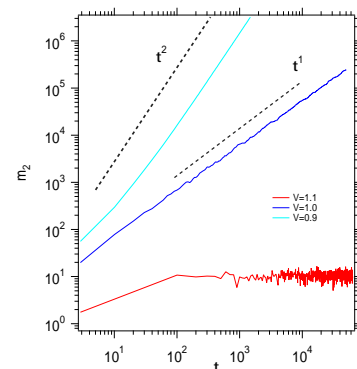


FIG. 1: (Color online) The double logarithmic plots of m_2 as a function of t for some values of the potential strength $V = 1.1, 1.0, 0.9$ in the unperturbed Harper model ($\epsilon = 0$) with $\varphi = 0$. $\hbar = 1$. The black dashed lines have slope 1 and 2.

図 1 は、無摂動の Harper モデルで、ポテンシャル強度を局在側 ($V > 1$) から非局在側 ($V < 1$) へ変化させた場合の MSD である。ゆらぎはあるが、局在の場合の $m_2 \sim t^0$ から臨界の場合の diffusive $m_2 \sim t^1$ を経て、 $m_2 \sim t^2$ の ballistic な広がりへ変わることがわかる。 $V < 1$ では V の値に依らず ballistic である。すなわち、

$$m_2(t) \sim \begin{cases} t^0 (\text{localization}) & V > 1 \\ t^1 (\text{normal diffusion}) & V = V_c = 1 \\ t^2 (\text{ballistic spreading}) & V < 1 \end{cases} \quad (9)$$

図 2 は臨界点近傍 $V \gtrsim 1$ での局在長 $\xi_0 = \sqrt{m_2(t \rightarrow \infty)}$ のポテンシャル強度 V 依存性である。 $\xi_0(V)$ がエネルギーに依らないので、予想通りこの領域では

$$\xi_0 = \frac{1}{\ln |V|} \sim (V - V_c)^{-1} \quad (10)$$

という振る舞いが確認できる。

また、Ballistic 領域 ($V < V_c (= 1.0)$) では、

$$v_g^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_2(t)}{t^2} \quad (11)$$

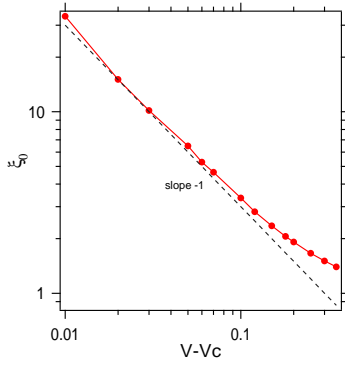


FIG. 2: (Color online) The dynamical localization length ξ_0 as a function of $(V - V_c)$ for $V > V_c$ in the unperturbed Harper model. The dotted lines have slope -1. $\hbar = 1$.

により群速度 v_g を定義でき、臨界点近傍 $V \lesssim 1$ で

$$v_g \sim (V_c - V)^1 \quad (12)$$

をみます。図3でその様子を確認できる。

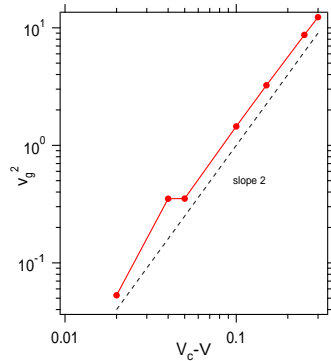


FIG. 3: (Color online) The dependence of the group velocity squared v_g^2 as a function of $(V - V_c)$ for $V > V_c$ in the unperturbed Harper model. The dotted lines have slope 2. $\hbar = 1$.

さらに、臨界点 $V = V_c = 1$ における固有状態のマルチフラクタル性やレベル統計、波束のダイナミクスなどの特徴もよく調べられている [41, 42].

IV. LDT FOR THE LOCALIZED STATES ($V > V_c$)

この節では、ポテンシャル強度 V 、主に $V = 1.3$ と局在領域に固定し、多色摂動のパラメータ M 、 ϵ を変えて dynamics が非局在状態に変化する様子調べる。ここでは、局在に対する摂動効果としての現象を観たいので、基本的には摂動強度は主に $\epsilon < 0.5$ とするが、 ϵ が摂動であることを超えた大きな場合の現象にも言及する。この節以降では、ポテンシャルの位相 φ に関する 10 サンプル平均を取り、また $\hbar = 1/8$ での結果である。

A. Localization for $M = 1$ and $M = 2$

1色摂動 ($M = 1$)、2色摂動 ($M = 2$) の場合の MSD 変化を図4に示す。図4(a),(b)でわかるように、少なくとも、小さい強度 ϵ の摂動が加わった場合は局在が維持される。しかし、摂動強度がさらに増していくと、 $M = 1$ は局在のままだが、 $M = 2$ では正常拡散に変化していることが、図4(c),(d)からわかる。このことは、2色摂動を掛けた Anderson モデル1の場合、 ϵ がいくら大きくともその局在が維持されることと異なるものである。無摂動でも V の値により、非局在状態を内包するような Harper モデル固有のものかもしれないが、本稿ではこれ以上立ち入らない。

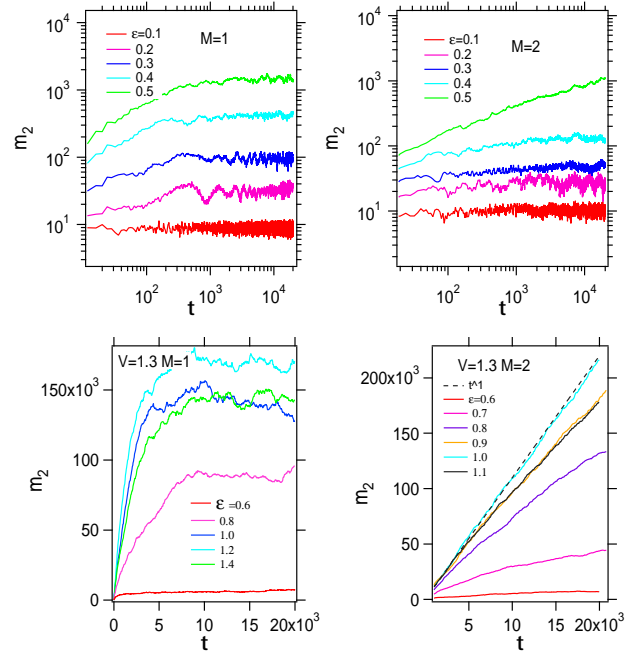


FIG. 4: (Color online) The double logarithmic plots of m_2 as a function of t for some values of the perturbation strength ϵ in the perturbed Harper model of the potential strength $V = 1.3$ with (a) $M = 1$ and (b) $M = 2$. The panels (c) and (d) show the results in the real scale for the relatively large values of ϵ . An average over 10 random phases is taken. $\hbar = 1/8$. The same applies to the following numerical results.

1色摂動と2色摂動の場合での数値的にとらえられた動的局在長 $\xi = \sqrt{m_2(t \rightarrow \infty)}$ の摂動強度依存性を図5に示す。図は局在長 ξ を無摂動での局在長 ξ_0 でスケールしたものを示している。どちらの場合も、 $\epsilon < 0.5$ では指数関数的に増大がみられる。すなわち

$$\xi(V, \epsilon) \simeq \xi_0(V) e^{c\epsilon}. \quad (13)$$

である。 $(c$ は定数。) これは、Anderson モデルや Anderson マップ系でみられたものと類似の傾向である。

ϵ のより大きな領域では1色摂動は局在が続き、局在長は $\epsilon \simeq 1 (= \epsilon^*)$ で最大になり減少に転じる。つまり、拡散量である m_2 は ϵ^* で最大となる。一方、2色摂動の場合は

ϵ^* に至る直前に拡散 $m_2 \propto t^1$ になり、拡散量も最大になる。 $M = 2$ は $M = 1$ と次節に見る $M = 3$ の場合の中間的な振る舞いをみせ、 ϵ の値の大きさを気にしなければ、LDT が起こるといえる。しかし、転移点の臨界強度や拡散指数の不明確さは、 $M \geq 3$ の場合とも異なる。

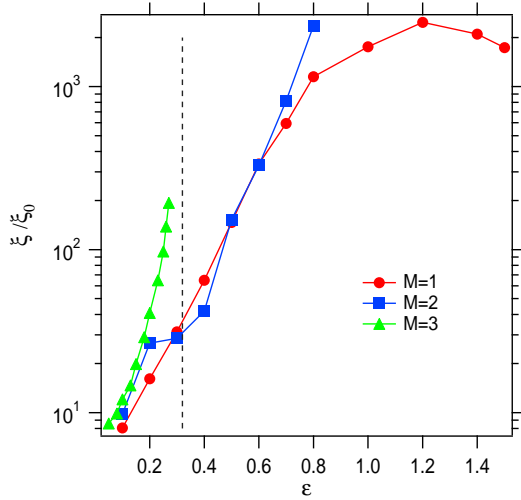


FIG. 5: (Color online) The scaled dynamical localization length ξ/ξ_0 as a function of ϵ for $M = 1, 2, 3$ in the case $V = 1.3$. The dotted line represents critical strength $\epsilon_c = 0.32$ for $M = 3$.

B. LDT for $M \geq 3$

図 6 に 3 色摂動、4 色摂動、5 色摂動の場合の摂動強度 ϵ 増加に対する MSD 時間変動 $m_2(t)$ を示す。 $M = 3$ の場合、 $V = 1.3$ でも $V = 1.5$ でもある値 $\epsilon = \epsilon_c$ で $m_2 \sim t^\alpha, \alpha \simeq 2/3$ の subdiffusion を示し、その後 $\epsilon > \epsilon_c$ に対しては長時間で $m_2 \sim t^1$ の正常拡散になることが図 6(a)(b) からわかる。 $\epsilon < \epsilon_c$ では長時間では局在する。その局在長は図 5 にプロットしてある。この場合は $\epsilon = \epsilon_c \simeq 3.2$ で LDT が生じ局在長は発散する。さらに、 M を増加させ 4 色摂動系や 5 色摂動系でも類似の傾向がみられ、それぞれの場合の subdiffusion は $\alpha \simeq 2/4, \alpha \simeq 2/5$ であることが図 6(c)(d) からわかる。確認のために、図 7 に示した瞬間的拡散指数 α_{ins} の時間変動も ϵ の増大で、 $\alpha \rightarrow 0$ から $\alpha \rightarrow 1$ への転移において上記の LDT の存在を示唆している。

図 8 は転移点の ϵ_c の M 依存性である。おおよそ、

$$\epsilon_c \sim \frac{1}{M-1} \quad (14)$$

であり、Anderson マップ系などの場合と類似である。

図 9 は、 $M = 3, 5$ における $\epsilon > \epsilon_c$ の非局在化した拡散の状態の拡散係数を摂動強度の関数として plot したものである。この場合も拡散係数 D は拡散量に対応し、

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_2}{t} \quad (15)$$

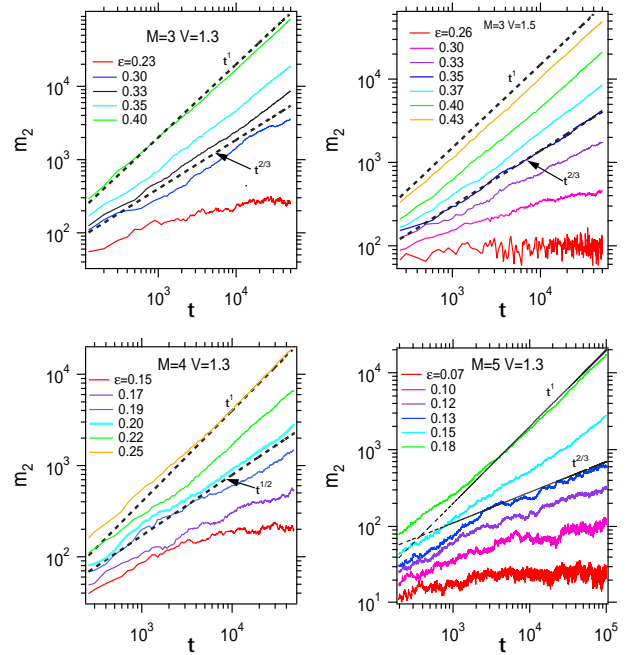


FIG. 6: (Color online) The double logarithmic plots of m_2 as a function of t for some values of the perturbation strength ϵ in the perturbed Harper model $V = 1.3$, with (a) $M = 3, V = 1.3$ (b) $M = 3, V = 1.5$ (c) $M = 4, V = 1.3$ (d) $M = 5, V = 1.3$. The dashed lines indicate $m_2 \propto t^1$ and $m_2 \propto t^{2/M}$ in each case.

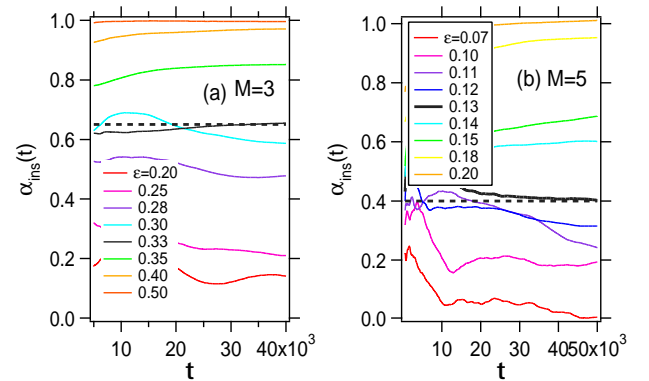


FIG. 7: (Color online) The time-dependence of $\alpha_{ins}(t)$ for various strength ϵ in the perturbed Harper model of $V = 1.3$ with (a) $M = 3$ and (b) $M = 5$. The dotted lines indicate $\alpha_{ins}(t) = 2/M$.

を数値的に評価して決めたものである。 ϵ の増加とともに D は増大し、 $\epsilon \simeq \epsilon^* (= O(1))$ で最大になりその後減少に転じることがわかる。 $(\epsilon^* \simeq 1.2 \text{ である。})$

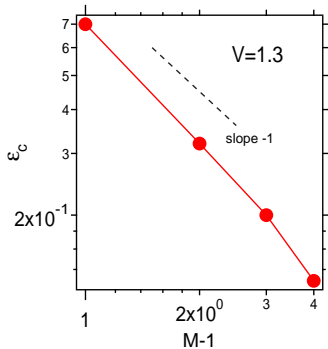


FIG. 8: (Color online) The critical value ϵ_c of LDT in the perturbed Harper model of $V = 1.3$. Note that the both axes are in logarithmic scale.

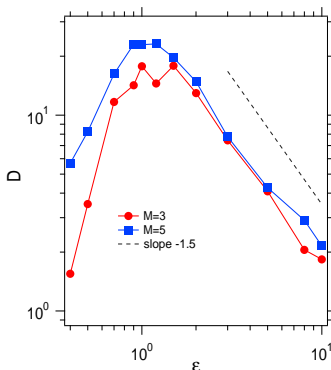


FIG. 9: (Color online) Diffusion coefficient D as a function of $\epsilon (> \epsilon_c)$ in the perturbed Harper model of $V = 1.3$. Note that the both axes are in logarithmic scale.

V. BDT FOR THE EXTENDED STATES ($V < V_c$)

3節でみたように、Harper モデルは self-duality により、 $V > V_c$ の性質と $V < V_c$ の性質での密接な対応が存在する。実際に、Harper モデルの時間離散版である kicked Harper モデル (KHM) においては、多色摂動により局在から拡散への転移と同時に、ballistic propagation から正常拡散への転移 (BDT) も観られている。Harper モデルでのこの現象を確認することがこの節の目的である。

図 10 は、Harper モデルの extended states ($V = 0.7 (< V_c)$) をベースにして多色摂動を伴った場合の波束の広がり方である。 $M = 1$ の 1 色摂動では強度を上げてても ballistic spreading は破れず、 $M \geq 2$ 以降では ϵ の増大で ballistic-diffusive transition (BDT) がみられる。ただ、数値的に正確な転移点 ϵ_b を得ることはたやすくはない。 $M = 3$ が決められる限界のようにみえる。実際、この時間スケールでは ballistic propagation から拡散へ変化する過程で、様々な拡散指数 $1 < \alpha < 2$ の super-diffusion が混在するのにも見える。これを示すために、拡散指数の時間変化 $\alpha_{ins}(t)$ を図 11(b) に表示した。この場合、 $M = 3, V = 0.7$ で $\alpha \simeq 1.64$ で $\epsilon_b \simeq 0.5$ であることがわかる。

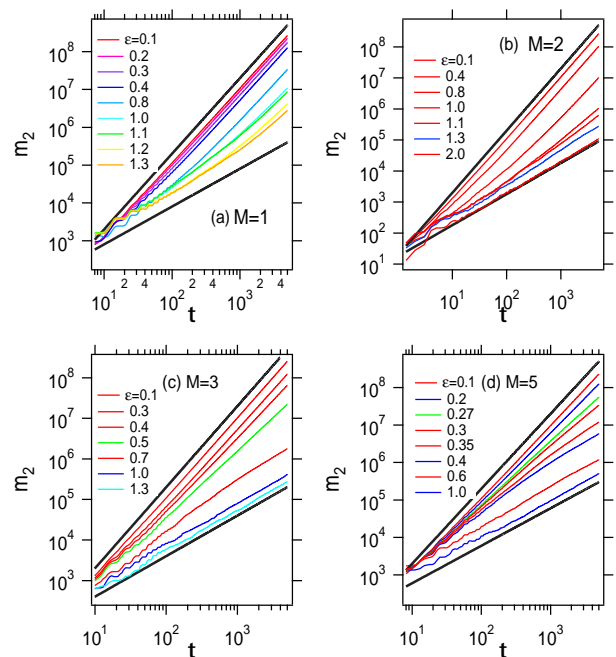


FIG. 10: (Color online) The double-logarithmic plots of $m_2(t)$ as a function of t for various strength ϵ in the perturbed Harper model of $V = 0.7$ with (a) $M = 1$, (b) $M = 2$, (c) $M = 3$ and (d) $M = 5$. The solid black lines indicate normal diffusion $m_2 \propto t^1$ and ballistic spreading $m_2 \propto t^2$. Note that the axes are in the logarithmic plot.

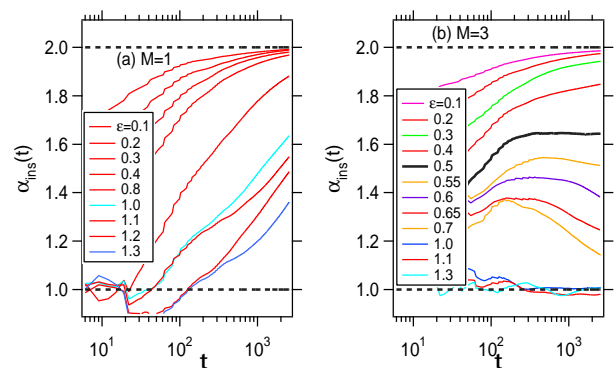


FIG. 11: (Color online) The time-dependence of $\alpha_{ins}(t)$ for various strength ϵ in the perturbed Harper model of $V = 0.7$ with (a) $M = 1$ and (b) $M = 3$. The dashed lines indicate normal diffusion $\alpha_{ins}(t) = 1$ and ballistic spreading $\alpha_{ins}(t) = 2$.

VI. DIFFUSIVE PROPERTY AT THE CRITICAL STATE ($V = V_c = 1$)

この節では、 $V = 1 = V_c$ として Harper モデルの臨界状態への多色摂動効果による効果を調べる。3節でもみたように、 $V > V_c$ や $V < V_c$ の場合と大きく異なるのは、 $V = V_c = 1$ では、 $\epsilon \simeq 0$ であっても拡散が実現す

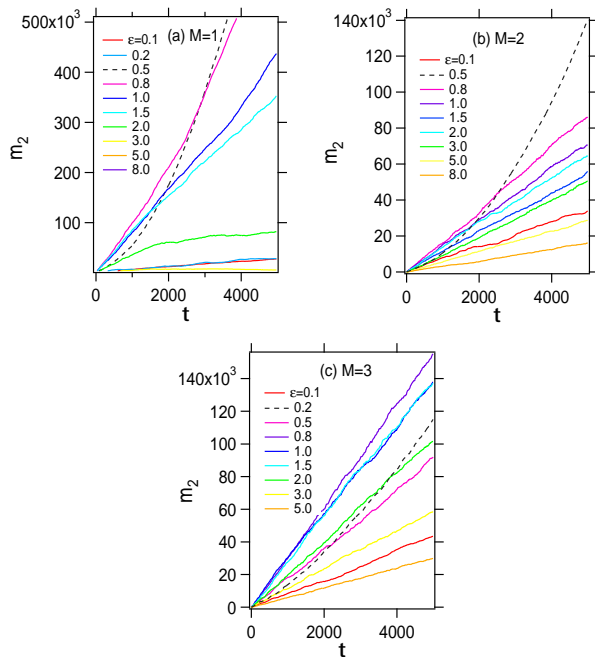


FIG. 12: (Color online) The plots of m_2 as a function of t for some values of the perturbation strength ϵ in the perturbed Harper model of the critical potential strength $V = V_c = 1.0$ with (a) $M = 1$, (b) $M = 2$ and (c) $M = 3$. Note that the both axes are in real scale.

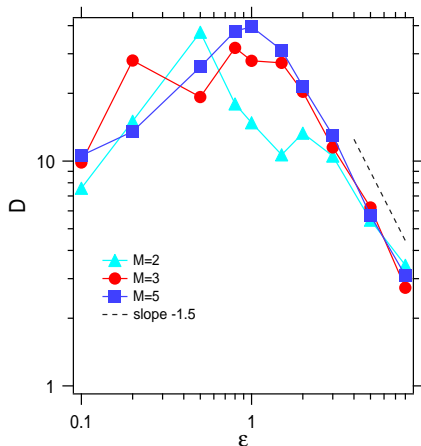


FIG. 13: (Color online) Diffusion coefficient D as a function of ϵ for $M = 2, 3, 5$ in the perturbed Harper model with the critical strength $V = 1.0$. Note that the both axes are in logarithmic scale.

る。この拡散的振る舞いが摂動でどう変化するのであろうか。図 12 に示すように、摂動強度を変えていった場合の MSD も、おおむね正常拡散を示す。これを DDT(diffusive-diffusive transition) と呼ぶ。このときの拡散係数の変化を ϵ に対して表示したものが図 13 である。 $\epsilon \simeq 0$ から増大し、 $\epsilon = \epsilon^* (\simeq 1.2)$ でピークに達し、その後減少していく。この傾向は $V < V_c$ の局在から出発して LDT 後の非局在

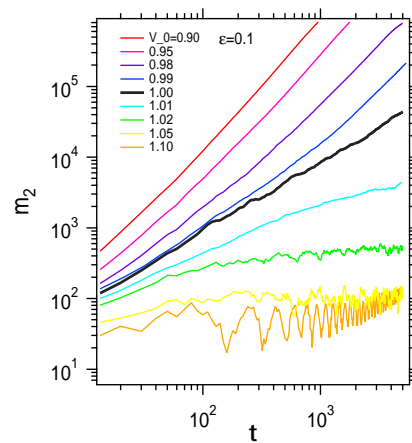


FIG. 14: (Color online) The double-logarithmic plots of $m_2(t)$ as a function of t for various potential strength V in the perturbed Harper model of $M = 3$ with the strength $\epsilon = 0.1$

化した拡散状態の場合 ($\epsilon > \epsilon_c$) でも同様である。ただし、 $V = V_c$ の場合は、ピークの ϵ^* 周辺での D の揺らぎが大きい。これは図 12 にも示されているように、正常拡散状態のもののみならず、共鳴により ballistic に近い振る舞いがあることに対応する。これは M が小さい場合に顕著に表れる。

また、図 14 に示すように、 $\epsilon = 0.1$ と有限の摂動強度でも $V = 1$ が局在と ballistic な広がり方の転移をもたらすポテンシャル強度は $V_c = 1$ である。つまりある強度までは元々 Harper モデルでの構造が残ると思われる。実際 $\epsilon < 0.15$ では、 $\epsilon = 0$ の場合とほぼ同様の $V = 1$ で BLT 転移がおこる。

前節までの結果、局在から正常拡散への LDT の転移強度 ϵ_c 、ballistic から正常拡散への BDT の転移強度 ϵ_b を含めて、 (V, ϵ) 面で大雑把に、局在 (L)、拡散 (D)、弾道 (B) 的広がりを分けた相図が図 15 である。 $V = 1$ は青の四角形のシンボル ($\epsilon \simeq 0.15$) まで BLT が生じる様な元々の Harper での正常拡散的振る舞いが維持され、それ以降は LDT で生じる正常拡散的なものとなる可能性がある。

VII. SUMMARY AND DISCUSSION

Harper モデルでの初期局在波束の量子拡散ダイナミクスに多重周期時間摂動がどう影響するかを調べた。Harper モデルはポテンシャル強度 V により、3つの状態、局在状態 ($V > 1$)、広がった状態 ($V < 1$)、臨界状態 ($V = 1$) があり、それぞれの場合で時間摂動の色数 M や強度 ϵ を変えその効果を見た。 $M \geq 2$ では局在側から拡散への LDT や extended 側から拡散への BDT が存在を確認できた。さらに、臨界状態へ摂動を加えた場合の DDT も存在するが、その ϵ 依存性は共鳴を含み ballistic 状態も含まれる。この傾向は M が小さいほど顕著である。LDT と BDT の場合はどちらの転移の臨界強度も M の増大で減少した。

$M = 2$ の微妙な点を除いては、定性的傾向は kicked Harper map(KHM) の場合と同じといえる。表 I には、本研究や KHM の結果、さらに 1D Anderson map や Anderson

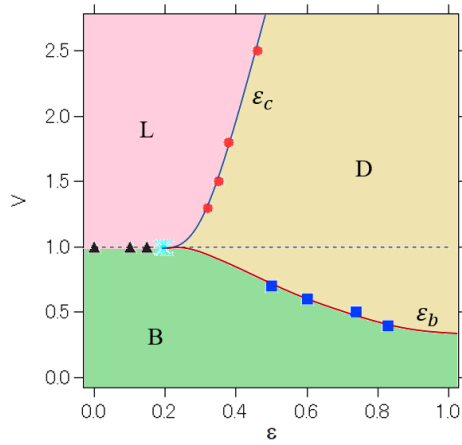


FIG. 15: (Color online) The schematic phase diagram in the (V, ϵ) plane for $M = 3$ in the perturbed Harper model. The wavepackets are localized in the region L , are diffusive in the region D , and are ballistic in the region B . Some numerical results of ϵ_c and ϵ_b are plotted in the diagram by red circles and blue boxes, respectively. The legends by black triangles denote the normal diffusion caused by critical states in the unperturbed Harper model with $V = 1.0$.

モデル1の場合も含め局在非局在転移 [43–45] についても記入したものである。

結局、randomness も kick もない 1 次元準周期系で、少数自由度の結合とみなせるような準周期的時間摂動が印加した場合、2 色以上では摂動強度が増加すれば容易に量子正常拡散が発生することが示された。ただし、これらのタイプの正常拡散への転移においても、モデルが 1 次元系であることや時間摂動が特殊な形の線形振動子との結合に対応するものであることには注意がいる。一般の自由度、例えば非線形振動子などの結合では異なる結果になる可能性がある。まだ、平均二乗変位のみならず空間分布関数の

特異性との関連も明確にすべきである。

TABLE I: M -dependence of the DLT and BDT in the Harper model. For $4 \leq M < \infty$ the result is same as the case of $M = 3$. Those in the kicked Harper model (KHM), kicked Anderson and Anderson models are also entered for reference. The lower lines is a result of the d -dimensional disordered systems. Loc: exponential localization, Diff:normal diffusion, Balli:ballistic propagation

M	0	1	2	3	4
Harper model($V > 1$)	Loc	Loc	LDT	LDT	LDT
Harper model($V = 1$)	Diff	Diff	Diff	Diff	Diff
Harper model($V < 1$)	Balli	Balli	BDT	BDT	BDT
KHM ($V \gg 1$) [37]	Loc	Loc	LDT	LDT	LDT
KHM ($V \ll 1$) [37]	Balli	Balli	BDT	BDT	BDT
Anderson model [35]	Loc	Loc	Loc	LDT	LDT
Kicked Anderson model [34]	Loc	Loc	LDT	LDT	LDT
Kicked rotor [34]	Loc	Loc	LDT	LDT	LDT
d	$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$
d -D Anderson model	Loc	Loc	LDT	LDT	LDT

Acknowledgments

This work is partly supported by Japanese people's tax via JPSJ KAKENHI 15H03701, and the authors would like to acknowledge them. They are also very grateful to Dr. T.Tsuji and Koike memorial house for using the facilities during this study.

●著者の貢献: 山田弘明: 研究構想、計算の実行、文章の執筆

池田研介: 研究構想

●利益相反: 本原稿にかかわる開示すべき利益相反関連事項はない。(The authors declare that they have no conflict of interest.)

- [1] P.G. Harper, Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field, Proc. Phys. Soc. London A **68**, 874(1955).
- [2] D.R. Hofstadter, Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, Phys. Rev. B **14**, 2239 (1976).
- [3] S. Aubry and G. André, Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices, Ann. Isr. Phys. Soc. **3**, 18 (1980).
- [4] J. Biddle, B. Wang, D. J. Priour Jr., and S. Das Sarma, Localization in one-dimensional incommensurate lattices beyond the Aubry-André model, Phys. Rev. A **80**, 021603(R)(2009).
- [5] L. Morales-Molina, E. Doerner, C. Danieli, and S. Flach, Resonant extended states in driven quasiperiodic lattices: Aubry-André localization by design, Phys. Rev. A **90**, 043630(2014).
- [6] C.Danieli, K.Rayanov, B.Pavlov, G.Martin, S.Flach, Approximating Metal-Insulator Transitions, Int. J. Mod. Phys. B **29**, 1550036(2015).
- [7] S.Ganeshan, J.H. Pixley, and S.D. Sarma, Nearest Neighbor Tight Binding Models with an Exact Mobility Edge in One Dimension, Phys. Rev. Lett. **114**, 146601(2015).
- [8] Jan Major, Giovanna Morigi, and Jakub Zakrzewski, Single-particle localization in dynamical potentials, Phys. Rev. A **98**, 053633(2018).
- [9] G.A. Domnguez-Castro, R. Paredes, The AubryAndré model as a hobbyhorse for understanding the localization phenomenon, Eur. J. Phys. **40**, 045403(2019).
- [10] F. A. An *et al.*, Interactions and Mobility Edges: Observing the Generalized Aubry-André Model, Phys. Rev. Lett. **126**, 040603(2021).
- [11] H. Hiramoto and S. Abe, Dynamics of an Electron in Quasiperiodic Systems. II. Harper's Model, J. Phys. Soc. Jpn. **57**, 1365 (1988).
- [12] T. Geisel, R. Ketzmerick, and G. Petschel, New class of level statistics in quantum systems with unbounded diffusion, Phys. Rev. Lett. **66**,1651 (1991).

- [13] M. Wilkinson and E.J. Austin, Spectral dimension and dynamics for Harper's equation, *Phys. Rev. B* **50**, 1420(1994) .
- [14] G. S. Ng and T. Kottos, Wavepacket dynamics of the nonlinear Harper model, *Phys. Rev. B* **75**, 205120(2007).
- [15] M. Larcher, F. Dalfovo, and M. Modugno, Effects of interaction on the diffusion of atomic matter waves in one-dimensional quasiperiodic potentials, *Phys. Rev. A* **80**, 053606(2009).
- [16] S. Sarkar, S. Paul, C. Vishwakarma, S. Kumar, G. Verma, M. Sainath, U. D. Rapol, and M. S. Santhanam, Nonexponential Decoherence and Subdiffusion in Atom-Optics Kicked Rotor, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 174101 (2017).
- [17] M. L. Sun, G. Wang, N. B. Li and T. Nakayama, Localization-delocalization transition in self-dual quasiperiodic lattices, *Europhys. Lett.* **110**, 57003(2015).
- [18] Y. Wang, *et al.*, One-Dimensional Quasiperiodic Mosaic Lattice with Exact Mobility Edges, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 196604(2020).
- [19] Xiaoming Cai, Localization transitions and winding numbers for non-Hermitian Aubry-André-Harper models with off-diagonal modulations, *Phys. Rev. B* **106**, 214207(2022).
- [20] T. Liu, Xu Xia, S. Longhi, L. Sanchez-Palencia, Anomalous mobility edges in one-dimensional quasiperiodic models, *SciPost Phys.* **12**, 027(2022).
- [21] R. Artuso, G. Casati, F. Borgonovi, L. Rebuzzini and I. Guarneri, Fractal and dynamical properties of the kicked harper model, *International Journal of Modern Physics B* **8**, 207-235 (1994).
- [22] T. Prosen, I. I Satija, N. R. Shah, Dimer Decimation and Intricately Nested Localized-Ballistic Phases of Kicked Harper, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 066601(2001).
- [23] A. R. Kolovsky and H. J. Korsch, Quantum diffusion in a biased kicked Harper system, *Phys. Rev. E* **68**, 046202(2003).
- [24] B. Lévi and B. Georgeot, Quantum computation of a complex system: The kicked Harper model, *Phys. Rev. E* **70**, 056218(2004).
- [25] Andrey R. Kolovsky and Giorgio Mantica, A. R. Kolovsky and G. Mantica, The driven Harper model, *Phys. Rev. B* **86**, 054306(2012).
- [26] H. Wang, D.Y. H. Ho, W. Lawton, J. Wang, and J. Gong, Kicked-Harper model versus on-resonance double-kicked rotor model: From spectral difference to topological equivalence, *Phys. Rev. E* **88**, 052920(2013).
- [27] P. Qin, C. Yin, and S. Chen, Dynamical Anderson transition in one-dimensional periodically kicked incommensurate lattices, *Phys. Rev. B* **90**, 054303 (2014).
- [28] T. Cadez, R. Mondaini, and P. D. Sacramento, Dynamical localization and the effects of aperiodicity in Floquet systems, *Phys. Rev. B* **96**, 144301 (2017).
- [29] V. Ravindranath and M. S. Santhanam, Dynamical transitions in aperiodically kicked tight-binding models, *Phys. Rev. B* **103**, 134303(2021).
- [30] A. Lakshminarayanan and V. Subrahmanyam, Entanglement sharing in one-particle states, *Phys. Rev. A* **67**, 052304(2003).
- [31] T. Mishra, *et al.*, Phase transition in a Aubry-André system with rapidly oscillating magnetic field, *Phys. Rev. A* **94**, 053612(2016).
- [32] S. Ray, A. Ghosh, and S. Sinha, Drive-induced delocalization in the Aubry-André model, *Phys. Rev. E* **97**, 010101(R)(2018).
- [33] T. Shimasaki, *et al.*, Anomalous localization and multifractality in a kicked quasicrystal, arXiv:2203.09442v2.
- [34] H.S. Yamada, and K.S. Ikeda, Critical phenomena of dynamical delocalization in quantum maps: Standard map and Anderson map, *Phys. Rev. E* **101**, 032210(2020).
- [35] H.S. Yamada and K.S. Ikeda, Presence and absence of delocalization-localization transition in coherently perturbed disordered lattices, *Phys. Rev. E* **103**, L040202(2021).
- [36] H.S. Yamada and K.S. Ikeda, Localization and delocalization properties in quasi-periodically-driven one-dimensional disordered systems, *Phys. Rev. E* **105**, 054201(2022).
- [37] H.S. Yamada and K.S. Ikeda, Localized-Diffusive and Ballistic-Diffusive Transitions in Kicked Incommensurate lattices, *Phys. Rev. E* **107**, L062201(2023).
- [38] A. Soffer, and W. Wang, Anderson Localization for Time Periodic Random Schrodinger Operators, *Commun. Part. Diff. Eq.* **28**, 333(2003).
- [39] J. Bourgain, and W. Wang, Anderson Localization for Time Quasi-Periodic Random Schrodinger and Wave Equations, *Commun. Math. Phys.* **248**, 429 (2004).
- [40] H. Hatami, C. Danieli, J. D. Bodyfelt, S. Flach, Quasiperiodic driving of Anderson localized waves in one dimension, *Phys. Rev. E* **93**, 062205 (2016).
- [41] S. N. Evangelou and J.-L. Pichard, Critical Quantum Chaos and the One-Dimensional Harper Model, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1643(2000).
- [42] G. Vattay, S. Kauffman, S. Niiranen, Quantum Biology on the Edge of Quantum Chaos, *PLoS ONE* **9**(3): e89017(2014).
- [43] E. Abrahams (Editor), *50 Years of Anderson Localization*, (World Scientific 2010).
- [44] S. Notarnicola, *et al.*, From localization to anomalous diffusion in the dynamics of coupled kicked rotors, *Phys. Rev. E* **97**, 022202 (2018).
- [45] E. Tarquini, G. Biroli, and M. Tarzia, Critical properties of the Anderson localization transition and the high-dimensional limit, *Phys. Rev. B* **95**, 094204(2017).