外周率「3」に基づく正六角形格子モデル: 真円の内包による「4.5%の構造的ゆらぎ」の導入と非線形システムのロバスト設計

Hexagonal Grid Model based on Perimeter Ratio "3": Introduction of "4.5% Structural Fluctuation" and Robust Design for Nonlinear Systems

著者: 松田　純 (Jun Matsuda)

(所属: 放送大学　大学院文化科学研究科　修士選科生)
Email: 2618000661@campus.ouj.ac.jp

ORCID: 0009-0009-9920-2027
researchmap: Jun Matsuda

概要 (Abstract)

連続的な非線形現象を計算機上でシミュレートする際、空間を無限に細分化し線形的に近似する従来の手法は、計算コストの増大と微小外乱に対する過剰適合(脆弱性)を引き起こす。本稿では、非線形性を線形グリッドで完全に支配する従来のアプローチから脱却し、安定した線形モデルに対して、それを包摂する真円との幾何学的差分を『構造的ゆらぎ』として定義し、アーキテクチャの根幹への実装を提案する。本モデルは、空間分割の基本単位として「外周率3」の正六角形(線形基準)を採用し、これを現実の非線形な実体(真円)の内部に配置する。この際、幾何学的に必然として生じる約4.5%の周長差を、切り捨てるべき誤差ではなく、システムが外部変化を吸収するための「構造的ゆらぎ(Structural Fluctuation)」として再定義した。本モデルにより、有限の演算リソースにおいて、システムは最大4.5%までの非線形な衝撃を自身を圧縮することで吸収し、致命的な破綻を回避する動的ロバストネスを獲得し得ることを論じる。

1. 序論:生物学的着想と精度の限界

動的システム、特に複雑系や多体エージェントのシミュレーションにおいて、要素を真円として扱う連続体モデルは幾何学的厳密性を持つ一方で、円周率(π)の無限性に起因する計算負荷の増大を招く。さらに、高解像度化によって非線形性を強引に制御する手法は、微小ノイズに対する過剰適合(Overfitting)を引き起こし、システム全体の崩壊リスクを高めている。

著者は先行研究(松田ら, 1998; Nagao, Matsuda, et al., 2000)において、多発性嚢胞腎(PKD)モデルにおける生体組織の動態を分析した。密充填される生体細胞は完全な真円ではなく、相互干渉を許容する柔軟な多角形的構造をとる。生命システムは、硬直した構造体ではなく、空間的・力学的な「遊び」を持つことで不確実な環境下での動的安定性を維持し

ている。本研究はこの生物学的知見を計算幾何学へと応用し、線形システムに意図的な「非線形のゆらぎ」を組み込む数理モデルを提案する。

2. 数理モデル：真円と外周率「3」の正六角形

本モデルでは、空間における非線形な対象（連続体）を半径 r の真円 C として定義し、その内部に、計算機システムでの演算に適した線形の基準フレームとして円に内接する正六角形 H を配置する。

正六角形 H の一辺の長さは r であり、その外周長 L_H は $6r$ となる。ここで、対象の直径 $2r$ に対する周長比を「外周率（Perimeter Ratio）」と定義する。正六角形の外周率は次のように定数化される。

$$\text{外周率} = \frac{6r}{2r} = 3$$

無限に続く π ではなく、この「外周率3の正六角形」を計算空間の離散化グリッドとして採用することで、等方性に優れた極めて安定的な計算ベースが創発される。

3. 「4.5%の構造的ゆらぎ」の実装メカニズム

真円 C（外周 $2\pi r$）と、内包される正六角形 H（外周 $6r$）の間には、以下の数理的差異 E が発生する。

$$E = \frac{2\pi r - 6r}{2\pi r} = \frac{\pi - 3}{\pi} \approx 0.04507\ldots$$

従来モデルにおいては、この約4.5%の差分は近似精度の欠如（誤差）と見なされてきた。しかし本研究では、この空間を「線形システムが非線形環境で生き残るために必須となるバッファ（構造的ゆらぎ）」として定義する。

現実環境において予測不能な圧力や外乱（ノイズ）がシステムに加わった際、完全な剛体としての線形グリッドは応力を逃がせず破綻する。本モデルにおいては、付与された 4.5% の余白空間が物理的・計算的なクッションとして機能し、自身が「圧縮（消失）」されることでエネルギーを吸収する。幾何学的定理に基づき、このシステムが破綻せずに許容・吸収できるゆらぎの限界値は「最大4.5%」と数学的に保証される。これにより、システム設計者は明確な安全境界を持ったロバスト制御を設計するための理論的基盤を得る。

4. 計算効率と等方性の担保

計算機科学の観点、特に空間的等方性の確保とサンプリング効率の最適化において、正六角形格子の採用は明確な優位性を持つ。Hamilton & Bilbao (2013) は、正方形格子と比

較して正六角形格子が、波の伝播や物理的干渉のシミュレーションにおいて優れた等方性と、少ないサンプル数での高い計算効率を持つことを実証している。

本提案モデルは、このハニカム構造の線形的な計算効率の高さに「外周率3」の定義を加え、さらに生体由来の「構造的ゆらぎ」を明示的に組み込むアーキテクチャである。不要な微小外乱の計算をゆらぎの圧縮によってアルゴリズム的にスキップさせることで、システムは無駄な計算リソースの浪費を構造的に回避する。

5. 結論

本稿では、無限の非線形性（真円）を有限のグリッドで無理に支配しようとする現代的アプローチから脱却し、真円の内部に外周率3の正六角形を配置し、生じる約4.5%の幾何学的差異を「構造的ゆらぎ」として許容する新しいシステムモデルを提案した。線形のハニカム構造に意図的に非線形の「遊び（バッファ）」を付加することで、システムは微小な外乱を柔軟に吸収し、構造の整合性を維持する。本研究は、生命システムの強靭性を幾何学と情報工学の架け橋として定式化したものであり、複雑系シミュレーションや分散ネットワーク、マルチエージェントシステムの安定化に向けた新たな基盤パラダイムを提供するものである。

参考文献 (References)

1. 松田 純, 笠原 正男, 小木曽 昇, 山口 太美雄, 日下 雅友, 長尾 静子, 高橋 久英. (1998). 「マウス嚢胞腎の病態に対する外因性蛋白質濃度の影響」. 『日本疾患モデル学会記録 (Experimental Animals)』, 14 Suppl., 59. https://doi.org/10.1538/expanim1992.14.59
2. Nagao, S., Matsuda, J., et al. (2000). "Effect of probucol in a murine model of slowly progressive polycystic kidney disease." *American Journal of Kidney Diseases*, 35(2), 221-226. https://doi.org/10.1016/s0272-6386(00)70330-1
3. Hamilton, B., & Bilbao, S. (2013). "Hexagonal vs. rectilinear grids for explicit finite difference schemes for the two-dimensional wave equation." *Proceedings of Meetings on Acoustics*, 19(1), 015120. https://doi.org/10.1121/1.4800308

【生成AIの利用に関する宣言】

本稿の執筆にあたっては、著者独自の理論および構成案に基づき、文章の構造化、専門用語の調整、および学術的トーンの推敲において生成AI（Google Gemini）を使用しました。著者はAIの出力結果を全面的に検証・修正しており、本稿に関する一切の責任は著者が負います。

【謝辞】

本研究の着想にあたり、多発性嚢胞腎（PKD）疾患モデルを用いた研究経験を通じて、理論と実測の「管理可能な乖離」の重要性をご教示いただいた諸先輩方に深く感謝いたします。