

# すべり台の動摩擦係数の実測研究

村田次郎\* 立教大学理学部, 171-8501 東京都豊島区西池袋 3-34-1  
塩田将基<sup>1</sup> 立教大学理学部, 171-8501 東京都豊島区西池袋 3-34-1

「重い人ほどすべり台を速く滑るのは何故か」という疑問を動機とした, すべり台の摩擦に関する大学生の探究学習の実践例を報告する。一様重力場中の落下加速度は質量によらず一定であり, これは動摩擦がはたらく状況でも同じであると学習するが, これと生活経験が矛盾する事から生じる疑問である。物体が滑る加速度を実測し, 空気抵抗の寄与, 動摩擦係数の質量依存性, 速度依存性を調べた。ローラー式すべり台では動摩擦係数が一定ではない事が示された一方, 金属板式すべり台では一定値からずれる有意な結果は得られなかった。

キーワード 動摩擦係数, すべり台

## 1. はじめに

高校物理で扱う学習内容は玉石混交である。例えば慣性の大きさを示す「慣性質量」 $m_I$  と, 重力への感受性を示す荷量としての「重力質量」 $m_G$  を等しいものと見なす, 等価原理は暗黙の内に持ち込まれる。これは自由落下の一様性

$$m_I a = m_G g \rightarrow a = g \quad (1)$$

という形で  $10^{-13}$  以下という超高精度で実験的に確認されており, 原理と呼ぶに相応しいものである [1]。筆者は大学における重力の研究者として近距離での万有引力の法則の検証実験などを行ってきた者である [2,3]。

一方, 本稿で考える摩擦の取り扱いがこれが身の回りで馴染み深い現象であるにも拘らず, その実験的根拠は甚だ心もとないものである事は意外と認識されていない。実際, 生徒・学生が将来的に工業的な応用等を行う場面では, 学習した内容をそのまま信じていると大きな間違いを犯す事に繋がる可能性もある。

高校物理や大学初年次の力学でも, 摩擦は(静電気力に関するものとは別の)「クーロンの法則」に従うものとして学習する。

(摩擦に関するアモントン-クーロンの法則) :

1. 摩擦力は摩擦面にはたらく垂直荷重  $N$  に比例し, みかけの接触面積  $S$  に依らない。
  2. 速度  $v$  に依らない。
  3. 静止摩擦力  $\mu_0 N$  は動摩擦力  $\mu N$  よりも大きい。
- そして, 動摩擦力は物体の速度の逆方向を向くと見なす。

ところがこの学習内容を頭に入れた上で身の回りの現象を観察すると, しばしば混乱する事がある。高校物理で学習する内容で, 直観的なイメージを論理的な物理学が打ち破る代表格が前述の自由落下の一様性であり, 歴史的な真偽はさておきピサの斜塔の実験で有名なものである。これは「重い物の方が速く落ちるはず」というイメージを否定する科学の叡智の代表格である。

さて, この自由落下の一様性の根拠が等価原理なのであるが, この一様性は自由落下だけではなく摩擦のある斜面を滑る物体の場合にも成り立つ事はすぐにわかる。水平方向から角度  $\theta$  で傾いた粗い斜面を動く質量  $m$  の物体の運動方程式は, 動摩擦係数を  $\mu$ , 斜面下方向の位置を  $x$  として

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta \quad (2)$$

となるが, 摩擦項を含めて質量  $m$  が全ての項で相殺するからである。これは, 動摩擦係数  $\mu$  に質量依存性がないという仮定の直接的な帰結である。

さて, これを徹底的に学習した生徒・学生は身の回りの現象を見てしばしば困惑する事となる。この「力学の常識」と矛盾する現象の一例がすべり台である。実際, 多くの場合すべり台では「重い人ほど速い」のである。科学の力で否定したはずのイメージが眼前に出現してしまい, こんなはずはない, と悩む事になる。

## 2. 研究の方法

本稿では大学の物理学科の学部4年次の学生が卒業研究として行ったものの一部を紹介している。卒業研究の目的は自然科学としての研究動機の整理、観測方法の検討と技術開発、統計的データ処理、モデルの検証という一連の過程を体験する事である。

インターネットでこのすべり台の疑問を検索すると、重い人ほど速く滑る原因を空気抵抗に帰する説明が多く見られる。これは、空気抵抗は大きさと物体の速度だけに依存し、質量に依存しない事から定性的には自由落下の一様性を破る候補になり得るものとして確かに容易に想起されるものではある。アポロ15号の宇宙飛行士が月面でハンマーと羽根を落下させるデモンストレーションをした事を思い出すまでもなく、中学での学習内容の一つでもあり、空気抵抗は中学・高校できちんと勉強した人ほど飛び付きやすいアイデアかもしれない。

しかし、空気抵抗の大きさを定量的にレイノルズ数等の実際の数値を当てはめて評価するまでもなく、すべり台の直接体験があれば空気抵抗の寄与が重力や摩擦に比べて無視できるほど小さい事は明らかなものではある。この段階において既に、定性的にはあり得そうなモデルも定量的に検証しなければ自然科学として実験検証に堪える仮説たり得ない事を学ぶ事が出来る。

そこで本研究では空気抵抗力を定量的に評価して上記の直観を確認した後に、動摩擦係数が質量や速度に依存しない定数であるという扱い自身に疑いをもち、これを実測する事ですべり台の謎を解く事を試みた。

動摩擦係数の測定方法としては実際に物体を水平面内で一定の速度で滑らせ、その際に物体を引っ張るのに必要な力をバネばかり等で直接測定する方法が一般的だろう。しかし、この方法は安定した測定条件を整える事が難しく、測定精度に問題が残る。そこで、本研究では物体が運動方程式に従って運動する様子をビデオ撮影し、画像から位置を時間の関数として記録する方法を採用した。直接の測定量は位置であり、ここから数値微分操作により速度と加速度を算出する事が出来る。得られた加速度の時間変化と運動方程式を比べる事で、動摩擦係数を得る事が出来る、という原理である。

## 3. 測定

測定は児童遊園に設置された実際のすべり台を用いて行った。測定項目は運動の質量依存性、速度依存性、空気抵抗の寄与の評価、そして底面積依存性である。測定条件を整える為、基本的には段ボール箱を用いた同じ落下物体で測定した。直方体の段ボール箱の大きさは(19.4 cm × 33.5 cm × 31.2 cm)である。空気抵抗依存性を見る際には垂直軸回りに90度回転させて面積の異なる面を前面とした。また、底面積依存性を見る際には接地する面を変えた。その際、空気抵抗が変わらない様、前面の面積は変わらない様にした。また、測定条件は変わってしまうものの、質量が極端に大きいデータ点として学生本人が重りを抱えて滑るデータも取得した。物体にLED照明を取り付け、その位置を物体の位置として代表させスマートフォンを用いて動画撮影した。解析時に照明の同定が容易となる様、日没後に測定を行った。

長い距離を滑るすべり台は現在、軸受の使用により金属板式に比べて圧倒的に滑りやすいローラー式が一般的である。そこで、まずこれ(直線部分7.5 m、角度13度、直径18 mmの軸受付アルミ棒・25 mm間隔)を用いた測定を行った。次いで金属板式の昔ながらのすべり台(直線部分2.4 m、角度32度、ステンレス平板)でも同様の測定を行った。測定項目はともに表1の通りである。データ(G)が学生本人の滑ったデータである。

番号	質量 [kg]	底面積 [cm <sup>2</sup> ]	前面積 [cm <sup>2</sup> ]
A	1.0	650	605
B	2.2	650	605
C	4.2	650	605
D	6.2	650	605
E	4.2	650	1045
F	4.2	1045	605
G	95.5	-	-

表1 測定一覧(ローラー式及び金属板式)

データ解析は、まずは得られた映像をコマ送りしながら物体の位置(LED照明の位置)を目視で確認し、位置を読み取る方法で原理を確認しながら行った。この方法で(G)に対して位置を0.4秒おきに読み取った。動画データをコマ送りし、静止画上でピクセルを目視で読み取る作業である。この作業で原理を理解した上で、画像の輝度の重心を計算する画像解析のプログラムを用いて、他のデータを自動解析させた。動画は毎秒15フレーム

で取得した事から、各静止画フレームについて、LED照明の位置を輝度情報から認識させてその正確な位置を求めるプログラムを応用した。当該のプログラムは前述の等価原理の検証や、近距離における逆二乗則の検証などの研究に用いる為に筆者が開発した画像処理型変位計と呼んでいる技術である [2]。非常に高い精度を達成する事が出来るが、本研究で求められる程度の精度であれば、最近利用可能になってきた AI を用いたモーションキャプチャーのソフトウェア等を利用する方が導入は容易で教育現場では現実的とは思われる。教育現場で使われる手法は [4] に詳しい。

尚、スマートフォンに元々搭載されている各種のセンサーの記録を取る事の出来る、phyphox [5] などのアプリケーションは極めて利用価値が高いが、摩擦を伴う加速度の測定では振動が激しい為、加速度センサーでは精度が出ない事を確認済みであり本研究では用いていない。

加速度は速度の微分であり、速度は位置の微分である。位置を測定量とした場合、データ解析で微分、すなわち位置の変化分を引き算で求める事になるが、一般に減算操作は相対誤差を拡大させる事はよく知られている。まして加速度は2次微分であるから、位置測定で加速度を精度よく求めるには、位置の精度も十分に高くなければならない。本研究で用いたビデオ式の位置計測はうってつけの方法である。

#### 4. 結果 (ローラー式すべり台)

測定結果を詳しく解析するまでもなく、ローラー式すべり台では滑らせた物体がすぐに終端速度に達する事を測定中に眼前で確認出来た。また、その終端速度は質量に極めて敏感であり、この「重い物ほど終端速度が大きい」という事を疑いようもなく確認する事が出来た。

ここで「子どもより大人の方が速い」という様な経験則は、「大きい人」なのか「重い人なのか」の条件が混合している。表1の様に、同じ箱の内部にペットボトルの重りを入れて同じ大きさで質量だけが異なる物体で比較したのはこれを区別する為である。

測定中、終端速度に達しているという事実だけから、「動摩擦係数には速度依存性がなければならない。」  
「それは速度の増加関数でなければならない。」  
という事をその場で議論して納得する事が出来た。

更には、重いものほど終端速度が大きい結果から、「動摩擦係数には質量依存性がある。」

「それは質量の減少関数でなければならない。」

事も見出す事が出来た。本研究において、最も実りの多い学びが得られた時間であったと思われる。

得られた結果を前節の通りに画像解析し、時間の関数として位置の変化を示したのが図1である。5種類の質量パターン (A - D, G) に対しての結果を重ね描きしてある。尚、位置の不確かさは物体が停止した状態での繰り返し精度から評価しており、図中では誤差棒は視認できない大きさとなっている。

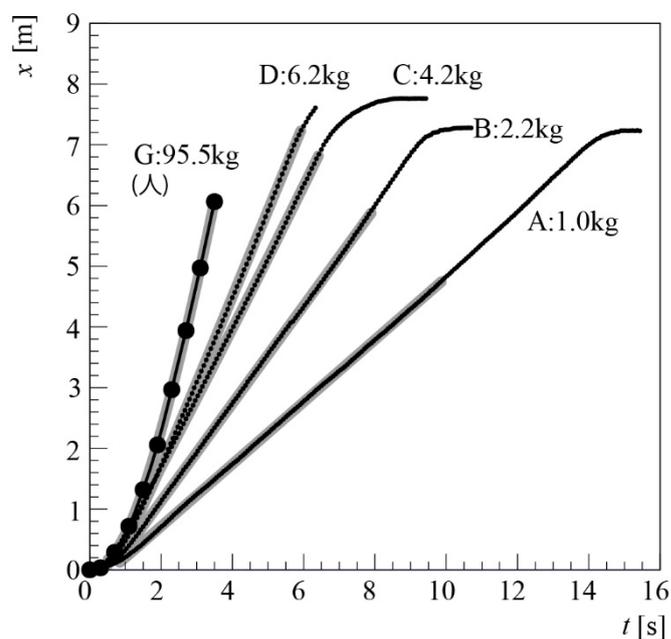


図1 位置の時間変化 (ローラー式) 質量依存性

まず等加速度運動であれば放物線形となるはずが、部分的に直線性を示している事がわかる。すなわち、滑り始めこそ加速が見られるが、(G) の場合を除いていずれもすぐに傾きが一定、つまり終端速度での等速運動に移行している事が確認出来る。質量依存性について見てみると、質量が小さいほど早く、短い距離を滑るだけで等速運動に移行している傾向がある様に見える。(G) の結果に対しては、この効果で終端速度に達する前に末端まで滑り降りてしまったものと解釈出来る。

終端速度自身を見ると、質量が小さいほど傾きが小さい、つまり終端速度が小さい事が明瞭に確認出来る。終端速度とは加速に伴って増加する抵抗力と一定である重力とがつり合う際速度であり、通常は空気抵抗を想定

して用いられる用語である。空気抵抗によって終端速度に達するのは人体ではスキーやフリーフォール等の非常に高速な、空気抵抗が大きくなる場合でありわずか秒速1 m程度のすべり台では目立たない事は明白である。これは人体の密度が高いからで、逆に、はたらく重力が小さい軽い物体の場合には相対的に空気抵抗の寄与が大きくなるため、羽根や小さな虫などは空気抵抗でゆっくり落下する様子が観測される訳である。

この結果から、重い人ほどすべり台を速く滑るという経験則は「重い人ほど終端速度が大きくなる効果」が支配的であると推定するのが妥当だろう。ここで終端速度をもたらす原因は無論、空気抵抗ではなく動摩擦である。

ついで、(C) と同じ 4.2 kg の質量に対し、段ボール箱の置き方を変えて空気抵抗が比例するはずの前面の面積を変えた場合 (E)、そして底部の面積を変えた場合 (F) を (C) と比較した。結果は図2の通りである。

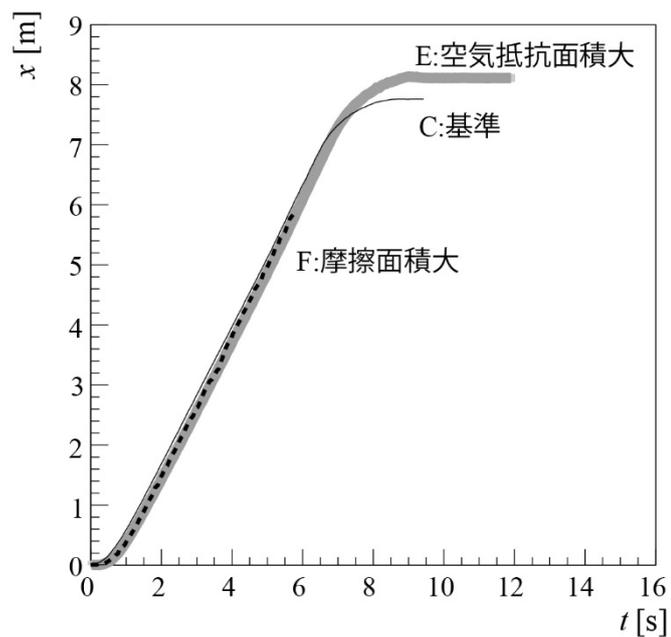


図2 位置の時間変化 (ローラー式) 面積依存性

空気抵抗もしくは底面積がそれぞれ 1045 cm<sup>2</sup>, 605 cm<sup>2</sup> のいずれの場合も、運動の様子は誤差の範囲内で区別する事が出来なかった。よって、終端速度に違いをもたらす主要因は質量であるものと見いだされた。また、図2の結果は条件の違う結果を比べたものでさえも、重さが同じであれば極めて再現性が高い結果が得られる事も示している。

## 5. 結果 (金属板式すべり台)

重い人ほど速くすべり台を滑る、という経験則は体重の違う2人の人が前後に並んで同時にすべり台を滑る事の出来る、長いすべり台で得られるものであるだろう。住宅街にある児童遊園の短いすべり台では、速さの違いを認識できるほど長い時間、滑る事はなかなか出来ない。またローラー式すべり台はそもそも力学で想定している面接触の摩擦ではない。この問題意識に基づき、短いながら伝統的な金属板式すべり台でも同様の測定を行った。その解析結果を図3と4に示す。

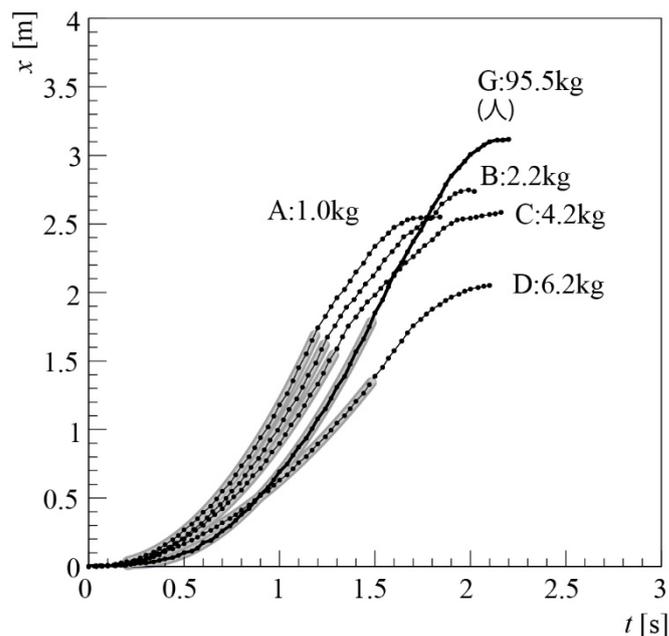


図3 位置の時間変化 (金属板式) 質量依存性

意外にもローラー式とは違い、重い方が速い、という現象は見られなかった。図3の結果ではむしろ重い方が遅い様にすら見えるが、95.5 kg を見るとこの限りではない事もわかる。これが有意な傾向なのかは慎重に判断する必要がある。また終端速度に達する現象が確認されず、加速運動を続けた点も意外であった。距離が短い為に終端速度に達する事が出来ない可能性はあるものの、加速の減少もはっきりとは見えない。つまり放物線とよく合っている様に見える。これは動摩擦係数の速度依存性ももしあっても小さい事を示唆している。

図4に示す様に、空気抵抗に関してはローラー式と同様、予想通り影響はない事が確認された。一方で摩擦面積依存性は、底面積が大きいほど大きな動摩擦係数が得られた様に見えるが、これが有意な違いかどうかはこれも系統誤差を考慮して慎重に判断するべきだろう。

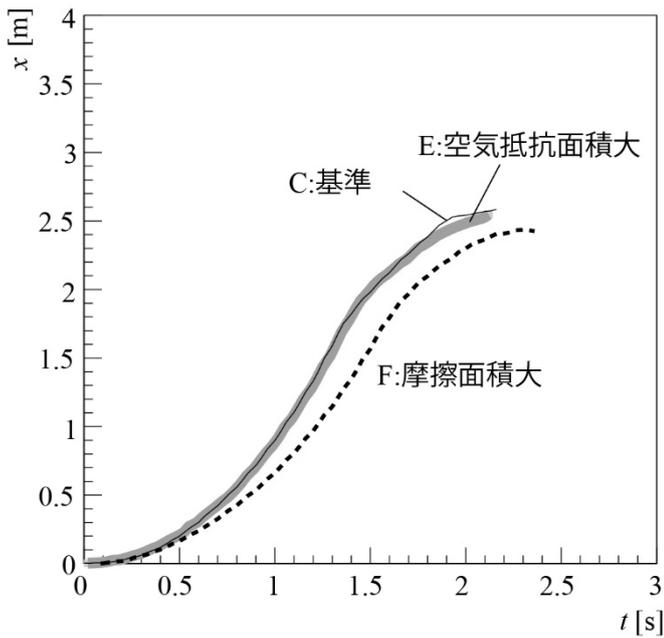


図4 位置の時間変化（金属板式）面積依存性

## 6. 議論

ローラー式に対して図1に見られた終端速度の質量依存性から、動摩擦の強さは質量の減少関数である事が定性的には確定する。これを定量的に評価する為、複数のモデルに対して仮説検定と最小二乗法によるパラメータ推定を行った。動摩擦係数が一定であるモデルは終端速度を再現しない事から当然検定で棄却されたが、摩擦係数が速度の1次か2次のモデルはいずれも誤差を考慮した上でデータを矛盾なく再現し、それらの優劣は今回のデータでは判定出来なかった。仮説検定で棄却されず時系列データを矛盾なく再現できるモデルであれば、終端速度を評価する目的には十分である事から、ここでは最も簡単な1次式を用いた。即ち、 $\mu(v) = K_1 v + K_0$  と書けるモデルであり、図1に最適化曲線を太線で示す。

この場合、運動方程式(2)の解は

$$x(t) = \frac{\tan \theta - K_0}{K_1^2 g \cos \theta} \exp[-K_1 g \cos \theta t] + \frac{\tan \theta - K_0}{K_1} t - \frac{\tan \theta - K_0 \cos \theta}{K_1^2 g \cos \theta} \quad (3)$$

であり、確かに第2項として終端速度  $v_f \equiv \frac{\tan \theta - K_0}{K_1}$  が現れる事がわかる。 $v_f$  が質量依存性を示す事実は、パラメータ  $K_1, K_0$  に何らかの形で質量依存性がある事を意味している。尚、 $K_0$  が0か否かに関わらず時間の関数としての(3)式の関数形自身は同じである為、終端速

度だけからでは  $K_1, K_0$  を分離して評価する事が出来ない。そこで代表例として  $K_0 = 0$  と仮定した場合に推定される  $K_1 = K$  を図5に示す。 $K$  と動摩擦係数は比例するとは限らないが、この結果から動摩擦の質量依存性がどの程度あるかを把握する事は出来る。(G)は測定条件が他と異なり同列には比較出来ないが、質量依存性は単調減少の傾向はあると推定するのが妥当であろう。より正確には10kgを超す段ボールでのデータを取得すべきだったのは実験計画上の反省点ではある。

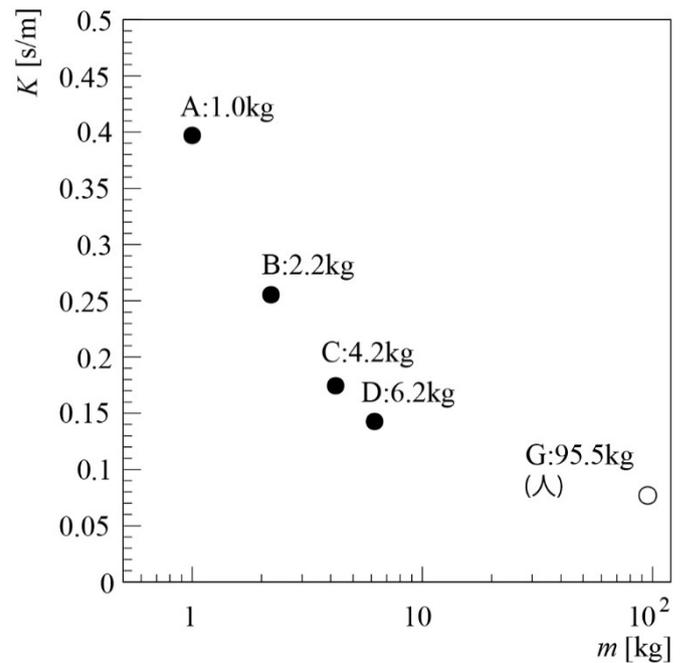


図5 パラメータ  $K$  の質量依存性（ローラー式）

重いほどすべり台を速く滑る理由は直接的には、ローラー式すべり台の動摩擦係数には速度依存性があり、かつ、同じ速度では重い方が動摩擦係数が小さくなる傾向がある為と考える事が合理的である。ローラー式すべり台は面摩擦ではなく転がり摩擦が元であり、工業的な応用範囲の広い知見でもあるだろう。

次いで金属板式すべり台の結果について考察する。図3の時系列データでは詳しい事はわからない為、得られた時間変化を、速度依存を含めた仮説でローラー式すべり台と同様に最小二乗法を用いて検証した。結果として、最もデータをよく再現するのは速度依存性がない、教科書通りの通常のモデルである事が判明した。図3に最適化曲線を太線で示す。この場合、運動は単純な等加速度運動であるから、式(2)に従って加速度から動摩擦係数を求める事が出来る。その結果を図6に示す。

図5に見たような、顕著な質量依存性の傾向は見られなかった。図3で示唆された、重い方が遅いという可能性についても、さほど顕著なものとは言い切れない事もわかった。最小二乗法によるパラメータ推定の誤差は十分小さいものの、金属板での測定は角度などの初期条件、段ボールの底の塵の付着状態等によりローラー式より再現性が悪い事は実際に段ボール箱を滑らせてみた際によくわかっていた。

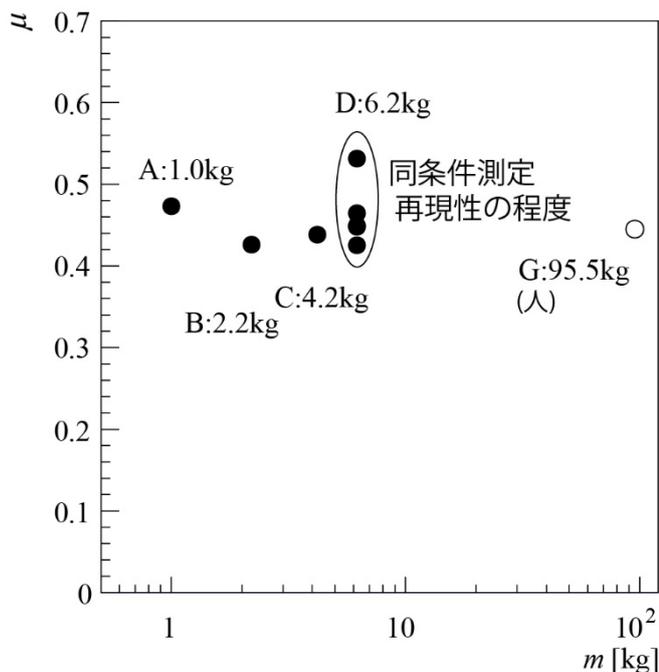


図6 動摩擦係数の質量依存性 (金属板式)

そこで再現性の検証として、同じ (D) の条件で4回、繰り返し測定した。その結果も図6に示しているが、そのばらつきは条件の異なるデータの間の違いよりも大きい事がわかる。従って、繰り返し精度の低いこの観測では、質量依存性はその系統誤差の範囲内で有意には見られなかったと判断すべきだろう。この系統誤差を考慮すると、図4の摩擦面積依存性も、有意なものとは判断すべきでないだろう。

## 7. 結論

得られた結果は事前の予想通りのものもあれば、意外なものもあった。本研究の動機である「重い人ほどすべり台を速く滑るのはなぜか」という疑問は、実はローラー式に限定された経験則であった事が明らかとなった。

一方、教科書での学習内容と直結する金属板式すべり台に関しては、有意にクーロンの法則からずれる事を示す結果は得られなかった。しかし、測定の再現性を高めた繰り返し測定を行う等で測定精度を高める事で、興味深い現象が見いだされる可能性は期待できると思われる。特に、より長い距離の測定が出来れば終端速度に達する現象が見られるのかも知れない。

摩擦の物理は長い歴史を持つ工学の一研究分野を形成しており、この様な簡便な研究で新規性のある学術的な知見が得られるかどうかは、多くは期待できないと考える方が自然ではある。実際、動摩擦係数が一定ではない事自体は非常に古くから知られている [6]。一方で今日でも気付かれていない課題が多い事も事実であり、ごく最近筆者が行ったカーリングの曲がる原理を明らかにした研究では、氷と石の間の動摩擦係数の速度依存性が決定的な役割を果たしたのがよい例である [7]。この様に摩擦現象は教科書で学習する基礎的な内容でありながら、生徒・学生自らがその法則から外れる新現象を発見できる可能性を感じさせる題材であり、探究的学習に強い動機を与えるものと期待できる。

## 各著者の貢献

本稿は塩田の卒業研究の指導教員である村田が執筆した。紹介した観測、解析は手法を考案した上で全て塩田が行った。ここに掲載した結果は塩田が取得したデータを村田が再解析して検証を経たものである。

## 引用文献

- 1) 安東正樹 他：「相対論と宇宙の事典」(朝倉書店) (2022).
- 2) K. Ninomiya et al.: Classical and Quantum Gravity 34 (2017) 185005.
- 3) 村田次郎：「『余剰次元』と逆二乗則の破れ」(講談社ブルーバックス) (2011).
- 4) 青木悠樹, 八幡和志：物理教育 69-1 (2021) 8-13.
- 5) <https://phyphox.org/>
- 6) 松川宏：「摩擦の物理」(岩波書店) (2015).
- 7) J. Murata : Scientific Reports (2022) 12:15047.

## 利益相反に関する開示

本論文に関して、開示すべき利益相反関連事項はない。

\* 責任著者 jiro@rikkyo.ac.jp

<sup>1</sup> 現所属 日本総合研究所