

Manuscript information

Title

超大規模離散空間における Fujita-Ogawa モデルの効率的解法

A fast algorithm for Fujita-Ogawa model in discrete two-dimensional space

Authors

Name: 酒井 高良 (Takara Sakai)

Affiliation: 東北大学 大学院 情報科学研究科 (Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

Name: 涌井 優尚 (Masanao Wakui)

Affiliation: 東北大学 大学院 情報科学研究科 (Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

Name: 赤松 隆 (Takashi Akamatsu)

Affiliation: 東北大学 大学院 情報科学研究科 (Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

Keywords

Fujita-Ogawa (1982) モデル, ロジット・モデル, 最適輸送問題, バランシング法, 加速勾配法

(Fujita-Ogawa (1982) model, logit model, optimal transport, Bregman's balancing method, Nesterov's accelerated gradient method)

Corresponding author

酒井 高良 (Takara Sakai)

E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp

CRedit

Takara Sakai: Conceptualization; Formal analysis; Funding acquisition; Methodology; Software; Writing original draft; Writing – review & editing.

Masanao Wakui: Formal analysis; Software; Writing original draft; Writing – review & editing.

Takashi Akamatsu: Conceptualization; Funding acquisition; Supervision; Writing – review & editing.

Competing Interests

The authors declare there are no competing interests.

Acknowledgments

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP20J21744, JP21H01448.

超大規模離散空間における Fujita-Ogawa モデルの効率的解法

酒井 高良¹・涌井 優尚²・赤松 隆³

¹学生会員 東北大学大学院情報科学研究科・JSPS 特別研究員 DC (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp (Corresponding Author)

²学生会員 東北大学大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: masanao.wakui.r4@dc.tohoku.ac.jp

³正会員 東北大学教授 大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究では、超大規模離散空間における Fujita-Ogawa (FO) モデルの効率的数値解法を提案する。具体的にはまず、FO モデルの立地主体（家計と企業）の選択行動にランダム効用最大化を仮定し、FO モデルを確率的枠組み（ロジット・モデル）に拡張する。続いて、この確率的 FO モデルに対して等価最適化問題が構築できることを示す。次に、この等価最適化問題は、企業の立地分布を決定するマスター問題と、家計の通勤地・居住地分布を決定するサブ問題からなる階層的最適化問題に変換できることを明らかにする。ここで、サブ問題はエントロピー正則化項付きの最適輸送問題、マスター問題は制約条件付き非凸計画問題の数理構造を持つ。そして、これら数理構造を活かし、サブ問題に対してはバランシング法を、マスター問題に対しては加速勾配法を適用する階層的最適化アルゴリズムを構築する。最後に、数値実験により提案手法の効率性・正確性を示す。

Key Words: Fujita-Ogawa (1982) モデル, ロジット・モデル, 最適輸送問題, バランシング法, 加速勾配法

1. はじめに

(1) 背景

大都市には企業が空間的に集中立地する“都心”が複数存在することが多い。このような複数都心が形成される要因は、その地点固有の誘因力に加えて、企業が集積することにより新たに生じる外部経済（集積の経済）にあると考えられている。都市における社会資本を効果的に運用・整備していくためには、こういった複数都心の存在を適切に考慮し、都市計画を策定・評価することが必要となる。そのため、集積の経済現象を定量的に記述・分析するフレームワークが求められる。

Fujita-Ogawa モデル¹⁾ (FO モデル) は、この要請に応える代表的数理モデルである。FO モデルでは、集積の経済およびそれに起因する複数都心形成現象を端的に記述することができる。FO モデルの基本的枠組みは、企業と家計という2種類の主体が、それぞれ自身の利潤/効用を最大化するように立地（企業）/居住地（家計）/勤務地（家計）を選択した結果として生じる“均衡状態”を記述するというものである。ここで、企業の利潤関数には、より近隣に立地する企業が多いほど利潤が大きくなる作用が組み込まれている。これにより、企業には互いに集積して立地するインセンティブが働き、さらに企業と家計が土地市場において競合することで複数都心の創発が表現される。

この FO モデルは、都心形成現象を理論的に特徴付けるのに役立つだけでなく、様々な応用研究にも活用されている。例えば、計量空間経済学 (QSE: quantitative spatial economics) の分野では、FO モデルのフレームワークを応用し、多種多様な空間情報データに基づいて都市の空間的特性を計量的に分析する試みかなされている (e.g., Ahlfeldt et al.²⁾, Monte et al.³⁾, Heblich et al.⁴⁾). また、混雑を表現した交通モデルと FO モデルの統合を図り、短期的な渋滞緩和施策と土地利用の関連性を分析した研究も存在する (e.g., Zhang and Zhang⁵⁾, Zhang and Kockelman^{6),7)}). これらの研究では、FO モデル（またはその拡張モデル）を直接的・間接的に解いた結果に基づき解析が行われている。しかしながら、そこで用いられている数値解法は収束が保証されないヒューリスティックなアルゴリズムであることが多い。このことは FO モデルが表現する集積の経済や複数都心形成現象が、応用モデルの解析結果に適切に反映されていない可能性を意味する。以上踏まえると、FO モデルに対する安定かつ効率的な数値解法が求められる。

このような必要性に関わらず、大規模な実証・応用分析に耐える FO モデルの数値解法は開発されてこなかった。秋本・赤松⁸⁾ は二次計画問題の手法を応用した解法を提案したが、大規模問題に対しては膨大な計算時間を要するものとなっている。清水・長江⁹⁾ は、秋

本・赤松⁸⁾を改良し、問題の部分構造に最適輸送問題の構造を持つことを活用したアルゴリズムを構築した。しかしながら、効率的に求解できる状況設定は空間に周期性を仮定した特殊な場合に留まっている。Heikkila and Wang¹⁰⁾や Delloye et al.¹¹⁾は、エージェント・ベース・シミュレーションを提案しているが、均衡解への収束保証はなされていない。また、このような手法は主体数が多い状況下での適用は困難であり、実証分析への利用は現実的でない。

(2) 目的とアプローチ

本研究の目的は、空間構造を特定しない超大規模離散空間において、実証の利用にも耐えうるFOモデルの高速な数値解法を開発することである。この目的を達成するために、本研究ではまず、(I) FOモデルをランダム効用理論に基づく確率的枠組みに拡張する。そして、この確率的FOモデルに対して、(II) 数理構造を活かした効率的数値解法を構築する。

(I) では、FOモデルの立地主体（家計と企業）の選択行動にランダム効用最大化を仮定し、モデルを確率的枠組み（ロジット・モデル）に拡張する。このような拡張には2つの意図がある。第1の意図は、ランダム効用理論に基づく主体の異質性を考慮することで、定量分析手法に対して実用的なモデルへの一般化を図るというものである。第2の意図は、主体の選択行動をロジット・モデルで表現することにより、後述するモデルの等価最適化問題の目的関数にエントロピー正則化項が加わるという数値計算上の利点（i.e., 問題のスムージング効果）を得るというものである。

(II) では、まず、確率的FOモデルの等価最適化問題を構築する。次に、この等価最適化問題は、企業の立地分布を決定するマスター問題と、企業の立地分布を与件として家計の居住地・勤務地分布を決定するサブ問題からなる階層的最適化問題に変換できることを明らかにする。ここで、サブ問題はエントロピー正則化項付きの最適輸送問題、マスター問題は制約条件付き非凸計画問題の数理構造を持つ。そして、この数理構造を活用し、サブ問題に対してはバランシング法^{12),13)}を、マスター問題に対しては加速勾配法¹⁴⁾を適用した階層的最適化アルゴリズムを構築する。最後に、数値実験により提案手法の効率性・正確性を示す。

(3) 確率的安定性解析との関連

FOモデルには、複数の均衡解が存在しうる。その中には、現実にはありえない不安定な解も含まれる。FOモデルおよびその拡張モデルを対象としたOgawa and Fujita¹⁵⁾, Fujita¹⁶⁾, Lucas and Rossi-Hansberg¹⁷⁾, Berliant et al.¹⁸⁾, Berlian and Wang¹⁹⁾などの研究は、このような複数均衡

解の安定性について議論してこなかった。この点に対して、大澤²⁰⁾, 中村・高山²¹⁾, Osawa and Akamatsu²²⁾, 山口・赤松²³⁾は、確率安定性解析の枠組みを構築し、どの均衡解が（確率安定性の意味で）尤もらしいかを解析的に特徴付けている。しかしながら、このような解析的アプローチは、複数の均衡解をすべて列挙可能な空間構造（i.e., 強い均質性と対称性）を仮定した場合にのみ適用可能である。そのため、一般的な状況設定下で、解の性質を定性的・定量的に把握するためには数値解析的アプローチが必須となる。

(4) 本稿の構成

本稿の構成を次に示す。続く2章にて、確率的FOモデルを定式化する。3章では等価最適化問題を導出し、さらにその等価最適化問題が階層的最適化問題に変換できることを示す。次に、4章において、階層分解されたサブ問題とマスター問題に対するアルゴリズムを述べる。5章では、数値実験により提案アルゴリズムの効率性・正確性を示す。最後に、6章にて本研究のまとめを述べる。

2. モデル

(1) 基本設定

都市は K 個の立地点からなる二次元離散空間 $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ として表現される。立地点 i の土地面積は定数 S_i とし、都市全体の総都市面積を定数 S で表す（i.e., $S = \sum_{i \in \mathcal{K}} S_i$ ）。ここで、立地点 i から立地点 j までの距離を $T_{ij} \geq 0$ で表す。

都市には、総数 M の企業と総数 N の家計が存在する。家計と企業には雇用関係が存在し、労働市場によって各立地点ごとに賃金が内生的に決定する。また、企業および家計は、立地点に立地/居住するために、地代を不在地主に支払う。この地代も土地市場によって各立地点ごとに内生的に定まる。これら賃金、地代に基づき、企業は自らの利潤を最大化するように立地点を選択し、家計は自らの効用を最大化するように居住地と勤務地を選択する。ただし、本研究では、企業の立地点選択および家計の居住地・勤務地選択に、ランダム効用最大化に基づく選択行動を仮定する。地点 i に立地する企業数を m_i 、地点 i に居住し立地点 j の企業へ通勤する家計の数を n_{ij} と表す。また、地点 i における地代、賃金をそれぞれ R_i, W_i と表す。

(2) 家計の居住地・勤務地選択行動

家計は、1単位の土地と都市の外部から移入される価格1の合成財を消費する。立地点 i に居住し、立地点 j の企業に通勤する家計を家計 (i, j) と呼ぶ。家計 (i, j) の

可処分所得 V_{ij} を次のように定義する：

$$V_{ij} \equiv W_j - tT_{ij} - R_i \quad \forall (i, j). \quad (1)$$

ここで $t > 0$ は通勤費用パラメータである。各家計は可処分所得をすべて合成財の消費に充てるものとする。家計 (i, j) の効用は次のように表される：

$$U_{ij}^H \equiv V_{ij} + \varepsilon_{ij}^H \quad \forall (i, j). \quad (2)$$

ここで ε_{ij}^H は平均 0、パラメータ θ^H のガンベル分布に従うランダム項である。各家計は、効用 U_{ij}^H を最大化するように、居住地・勤務地を選択する。

(3) 企業の立地点選択行動

企業は、1 単位の土地と L 単位の労働力を投入し、合成財を生産する。立地点 i における財の産出量 $F_i(\mathbf{m})$ は、他企業とのコミュニケーションにより得られる便益の大きさで表される。この企業間交流便益 $F_i(\mathbf{m})$ は、都市の企業分布 \mathbf{m} に依存した以下のような関数で与えられる：

$$F_i(\mathbf{m}) \equiv \sum_{j \in \mathcal{K}} d_{ij} m_j \quad \forall i. \quad (3)$$

ここで d_{ij} は距離減衰効果を表し、企業間交流費用パラメータ $\tau > 0$ を用いて次のように定義される：

$$d_{ij} \equiv \exp[-\tau T_{ij}] \quad \forall (i, j). \quad (4)$$

すなわち、企業は近接する他の企業が多いほど多くの財を産出できる。

企業が立地点 i に立地することにより得られる利潤は次のように表される：

$$U_i^F \equiv V_i^F + \varepsilon_i^F \quad \forall i. \quad (5)$$

ただし V_i^F は次式で定義する：

$$V_i^F \equiv F_i(\mathbf{m}) - R_i - LW_i \quad \forall i. \quad (6)$$

また ε_i^F は平均 0、パラメータ θ^F のガンベル分布に従うランダム項である。各企業はこの利潤が最大になるように立地点 i を選択する。

(4) 均衡条件

均衡状態は、次に示す a) 立地主体数の保存条件、b) 空間均衡条件、c) 市場均衡条件を同時に満足する状態である。

a) 立地主体数の保存条件

総家計数と総企業数について以下の保存条件が成立する：

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N, \quad (7)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M. \quad (8)$$

b) 空間均衡条件

空間均衡条件とは、各主体の立地選択に関する無裁定条件である。本モデルでは、主体の選択行動にロジット・モデルを採用するため、均衡状態における無裁定条件はロジット・モデルの選択確率式に相当する。したがって、均衡状態において n_{ij}, m_i は下式を満足する：

$$n_{ij} = N \frac{\exp[\theta^H \cdot V_{ij}^H]}{\sum_k \sum_l \exp[\theta^H \cdot V_{kl}^H]} \quad \forall (i, j), \quad (9)$$

$$m_j = M \frac{\exp[\theta^F \cdot V_j^F]}{\sum_l \exp[\theta^F \cdot V_l^F]} \quad \forall j. \quad (10)$$

ここで $\theta^H \rightarrow \infty$ および $\theta^F \rightarrow \infty$ とすると、式 (9), (10) は確定的 FO モデルにおける無裁定条件（相補性条件）に対応することに注意されたい¹。すなわち、本研究の確率的 FO モデルは、確定的 FO モデルの緩和問題と捉えることもできる（その際、 θ^H, θ^F は緩和パラメータを意味する）。この視座に立つと、後述する提案アルゴリズムは確定的 FO モデルの近似解法と捉えることもできる。

c) 市場均衡条件

各立地点における均衡地代 $\mathbf{R} \equiv \{R_i\}$ と均衡賃金 $\mathbf{W} \equiv \{W_j\}$ は、それぞれ土地市場と労働市場によって内生的に決定する。土地市場では、正の地代がついていれば、土地の供給面積と需要面積が一致する：

$$\begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i = S_i & \text{if } R_i > 0 \\ \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \leq S_i & \text{if } R_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (11)$$

労働市場では、正の賃金がついていれば、企業の要求労働者数と家計の供給労働者数が一致する：

$$\begin{cases} Lm_j = \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} & \text{if } W_j > 0 \\ Lm_j \leq \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} & \text{if } W_j = 0 \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{K}. \quad (12)$$

3. 等価最適化問題と階層分解

(1) 等価最適化問題

確定的な FO モデルには等価な最適化問題²が存在することが知られている^{22), 23)}。本研究の確率的 FO モデルも同様に等価最適化問題が構築できる。このことを次の命題に示す。

¹ 確定的 FO モデルの定式化については、山口・赤松²³⁾ や清水・長江⁹⁾などを参照されたい。

² ここでの等価とは、最適化問題の一次的最適性条件（Karush-Kuhn-Tucker 条件）がモデルの均衡条件と一致することを意味する。

命題 1 (等価最適化問題). 次に示す最適化問題 [P] の局所最適解は, 確率的 FO モデルの均衡条件を満足する:

[P]

$$\min_{\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \Omega} Z(\mathbf{m}, \mathbf{n})$$

$$\text{where } Z(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \equiv -\frac{1}{2} \mathbf{m}^\top \mathbf{D} \mathbf{m} + t \mathbf{T}^\top \mathbf{n} + \frac{1}{\theta^F} \mathbf{m}^\top \ln \left(\frac{\mathbf{m}}{M} \right) + \frac{1}{\theta^H} \mathbf{n}^\top \ln \left(\frac{\mathbf{n}}{N} \right). \quad (13)$$

ここで $\ln(\mathbf{x}) \equiv \{\ln x_i\}_i$ である. また \mathbf{D} は d_{ij} を要素とする行列, \mathbf{T} と \mathbf{n} はそれぞれ T_{ij} および n_{ij} を要素とするベクトルを表す. 実行可能領域 Ω は次のように定義される:

$$\Omega \equiv \left\{ (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \left| \begin{array}{l} \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M, \\ \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N, \\ \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \leq S_i \quad \forall i \in \mathcal{K}, \\ \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \geq L m_j \quad \forall j \in \mathcal{K}, \\ m_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{K}, \\ n_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}. \end{array} \right. \right\}.$$

(2) 等価最適化問題の階層分解

等価最適化問題 [P] は, 企業の立地分布を決定するマスター問題と, 企業の立地分布を与件として家計の居住地・勤務地分布を決定するサブ問題に分解することができる. このことを次の命題にまとめる.

命題 2 (階層的最適化問題). 次に示す階層的最適化問題 [Master-P], [Sub-P(\mathbf{m})] の最適解は, 問題 [P] の最適解である:

[Master-P]

$$\min_{\mathbf{m}} Z^F(\mathbf{m}) \quad (14)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in \mathcal{K}} m_j = M, \quad (15)$$

$$0 \leq m_i \leq S_i \quad \forall i, \quad (16)$$

where $Z^F(\mathbf{m}) \equiv$

$$-\frac{1}{2} \mathbf{m}^\top \mathbf{D} \mathbf{m} + \frac{1}{\theta^F} \mathbf{m}^\top \ln \left(\frac{\mathbf{m}}{M} \right) + Z^{H^*}(\mathbf{m}). \quad (17)$$

[Sub-P(\mathbf{m})]

$$Z^{H^*}(\mathbf{m}) \equiv \min_{\mathbf{n}} Z^H(\mathbf{n})$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \leq S_i \quad \forall i \in \mathcal{K}, \quad (18)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \geq L m_j \quad \forall j \in \mathcal{K}, \quad (19)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N, \quad (20)$$

$$\text{where } Z^H(\mathbf{n}) \equiv t \mathbf{T} \mathbf{n} + \frac{1}{\theta^H} \mathbf{n}^\top \ln \left(\frac{\mathbf{n}}{N} \right). \quad (21)$$

以降では議論を簡単にするために, 総企業数 M と総家計数 N は, 総土地 [労働] 供給量と総土地 [労働] 需要量が一致するように設定されているものと仮定する.

仮定 1. 総企業数 M および総家計数 N は以下の関係式を満足する:

$$M = LN, \quad (22)$$

$$M + N = S. \quad (23)$$

仮定 1 は, 各立地点における土地市場と労働市場で, 総供給量と総需要量が一致することを意味する. つまり, 最適解において, サブ問題 [Sub-P(\mathbf{m})] の制約条件 (18), (19) は必ず等式で成立する. なお, 本来, 仮定 1 が満たされていない状況でも, ダミー企業・家計変数を導入することで仮定 1 を満足する問題を考えることができる.

仮定 1 のもとでは, サブ問題はエントロピー正則化項付きの最適輸送問題に帰着する. この数理構造は, 交通工学の分野でよく知られている二重制約型重力モデルと全く同じものである²⁴⁾. 一方, マスター問題は制約条件付きの非凸最適化問題となる. これはマスター問題の目的関数の第 1 項 $-(1/2) \mathbf{m}^\top \mathbf{D} \mathbf{m}$ が凹関数となるためである. なお, マスター問題の実行可能領域は capped simplex と呼ばれる, 単体から端点近傍を除いた空間となる.

一般に階層的最適化問題を効率的に解くためには, マスター問題の目的関数の勾配, とくに目的関数に含まれるサブ問題の最適値関数の勾配を, 小さい計算負荷で正確に評価できることが求められる. 本研究で扱う, 命題 2 で提示した階層的最適化問題については, サブ問題の最適値関数 $Z^{H^*}(\mathbf{m})$ の勾配は陽に導出することができる. 以下では, このことに関連し, サブ問題の最適値関数およびマスター問題の目的関数の理論的性質についての補題を述べる.

補題 1 (サブ問題の双対問題). サブ問題の双対問題は以下である :

[Sub-D(m)]

$$\max_{\widehat{R}, \widehat{W}} - \sum_{i \in \mathcal{K}} \widehat{R}_i (S_i - m_i) + \sum_{j \in \mathcal{K}} \widehat{W}_j L m_j - \frac{1}{\theta^H} N \ln \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} \exp(-\theta^H (t T_{ij} + \widehat{R}_i - \widehat{W}_j)) \quad (24)$$

$$\text{s.t. } \widehat{R}_i \geq 0 \quad \forall i, \quad (25)$$

$$\widehat{W}_j \geq 0 \quad \forall j. \quad (26)$$

ここで \widehat{R} および \widehat{W} は, それぞれサブ問題 [Sub-P] の制約条件 (18), (19) に対応するラグランジュ乗数である.

補題 2 (サブ問題の最適値関数の勾配). サブ問題の最適値関数の勾配は以下である :

$$\frac{\partial Z^{hs}(m)}{\partial m} = \widehat{R}^*(m) + L \widehat{W}^*(m). \quad (27)$$

ここで $\widehat{R}^*(m)$ および $\widehat{W}^*(m)$ は, サブ問題 [Sub-P(m)] のラグランジュ乗数の最適解である.

補題 3 (マスター問題の目的関数の勾配). マスター問題の目的関数の勾配は以下である :

$$\frac{\partial Z^F(m)}{\partial m} = -Dm + \frac{1}{\theta^F} \left(\ln \left(\frac{m}{M} \right) + 1 \right) + \widehat{R}^*(m) + L \widehat{W}^*(m). \quad (28)$$

4. アルゴリズム

提案アルゴリズムは, サブ問題に対するバランシング法 (Bregman¹²), マスター問題に対する加速勾配法 (Ghadimi and Lan¹⁴) から構成される. メインループは, マスター問題に対する加速勾配法となる. ただし, メインループ中でサブ問題の最適値関数の情報が必要となるため, その都度, サブ問題をバランシング法で解くというサブ・ルーチンが発生する.

(1) サブ問題のアルゴリズム

前述したように, サブ問題は二重制約型の重力モデルと同じ数理構造を持つ. この二重制約型の重力モデル²⁴ は, Bregman のバランシング法^{12,25} によって効率的に求解できることが知られている³. このことを踏ま

³ 機械学習の分野では, Sinkhorn-Knopp アルゴリズム^{26,13} としても知られている.

アルゴリズム 1 バランシング法 (Bregman¹²)

Input: $u^{(0)} = \mathbf{1}, v^{(0)} = \mathbf{1}, K \equiv [\exp(-\theta^H t T_{ij})]$

1: **for** $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**

2: $\gamma^{(k)} \leftarrow u^{(k)\top} K v^{(k)}$

3: $v^{(k+1)} \leftarrow \gamma^{(k)} \frac{Lm}{N} \left(\frac{1}{K u^{(k)}} \right)^{-1}$

4: $u^{(k+1)} \leftarrow \gamma^{(k)} \frac{S - m}{N} \left(\frac{1}{K v^{(k+1)}} \right)^{-1}$

5: **end for**

Output: $u^{(k)}, v^{(k)}$

アルゴリズム 2 加速勾配法 (Ghadimi and Lan¹⁴)

Input: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^K, \{\alpha_1\} = 1$ and $\{\alpha_j\} \in (0, 1)$ for any $k \geq 2$, $\{\beta^{(k)} > 0\}$ and $\{\lambda^{(k)} > 0\}$

1: Set the initial points $m^{(0)} = x^{(0)}$

2: **for** $k = 1, 2, \dots$ **do**

3: $y^{(k)} = (1 - \alpha^{(k)}) m^{(k-1)} + \alpha^{(k)} x^{(k-1)}$

4: Compute $\nabla Z^F(y^{(k)})$

5: $x^{(k)} = \Pi(x^{(k-1)} - \lambda^{(k)} \nabla Z^F(y^{(k)}))$

6: $m^{(k)} = \Pi(y^{(k)} - \beta^{(k)} \nabla Z^F(y^{(k)}))$

7: **end for**

Output: $m^{(k)}$

えて, 本研究でもサブ問題に対してバランシング法を適用する.

サブ問題に適用するバランシング法をアルゴリズム 1 に示す. バランシング法は, 座標変換 (指数変換) されたラグランジュ乗数 v, u を交互に更新し最適解に収束させるアルゴリズムである. 適当な収束判定基準のもとで終了したときの解 $v^{(k)}, u^{(k)}$ を対数変換することで, ラグランジュ乗数の最適解 $\widehat{W}^*, \widehat{R}^*$ を求めることができる :

$$\widehat{R}_i^* = -\theta^H \ln u_i^{(k)} \quad \forall i, \quad (29)$$

$$\widehat{W}_j^* = \theta^H \ln v_j^{(k)} \quad \forall j. \quad (30)$$

なお, 主問題の決定変数は次のように求められる :

$$n_{ij} = \frac{N}{\gamma^{(k)}} K_{ij} u_i^{(k)} v_j^{(k)} \quad \forall (i, j). \quad (31)$$

(2) マスター問題のアルゴリズム

マスター問題には Ghadimi and Lan¹⁴ の加速勾配法を適用する. このアルゴリズムは, 目的関数が非凸の場合でも停留点への収束が保証されるものである. 加えて, Nesterov²⁷ の加速勾配法と同様に, このアルゴリズムでは目的関数の一次の情報である勾配のみを用い,

二次の情報を必要としない。3章でも述べたように、本研究で扱う問題においてマスター問題の勾配は容易に計算できるので、本研究との相性も良い。

マスター問題に対する加速勾配法をアルゴリズム 2 に示す。ここで、 \mathbf{x}, \mathbf{y} は補助変数であり、決定変数 \mathbf{m} と同時に更新していく。また $\Pi(\bar{\mathbf{m}})$ は、問題 [Master-P] の実行可能領域への射影演算子である。具体的には次のように定義される：

$$\Pi(\bar{\mathbf{m}}) \equiv \arg \min_{\mathbf{m}} \|\mathbf{m} - \bar{\mathbf{m}}\|^2 \quad (32)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{1}^\top \mathbf{m} = M, \quad (33)$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{1}\epsilon \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{S} - \mathbf{1}\epsilon. \quad (34)$$

ここで ϵ は十分小さい正の定数である。この問題は凸計画問題であるので様々な効率的解法が存在する。特に、各立地点の土地面積がすべて等しい場合、Wang and Lu²⁸⁾ のアルゴリズムを応用すれば高速に計算できる。

アルゴリズム 2 において、ステップサイズを決めるパラメータの点列 $\{\alpha^{(k)}\}, \{\beta^{(k)}\}, \{\lambda^{(k)}\}$ は、次のように設定する：

$$\alpha^{(k)} = \frac{2}{k+1} \quad \forall k, \quad (35)$$

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{2L^{(k)}} \quad \forall k, \quad (36)$$

$$\lambda^{(k)} = \left(1 + \frac{\alpha^{(k)}}{4}\right) \beta^{(k)} \quad \forall k. \quad (37)$$

$L^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) は目的関数の勾配 $\nabla Z^F(\mathbf{m})$ のリプシッツ定数より大きい定数であれば良い。加速勾配法をベースとするアルゴリズムの多くはバック・トラッキングと呼ばれる手法で $L^{(k)}$ を逐次決定することが多い。しかしながら、バック・トラッキングは目的関数の評価回数が増える (i.e., サブ問題を解く回数が増える) ため、提案アルゴリズムでは次のように $L^{(k)}$ を逐次決定する⁴：

$$L^{(k)} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{y}^{(k)}) - \nabla f(\mathbf{y}^{(k-1)})\|}{\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k-1)}\|}. \quad (38)$$

このとき $L^{(k)}$ が (大域的な) リプシッツ条件を満足するという理論的保証はないものの、後述する数値計算では良い収束性能を確認できている。

5. 数値実験

(1) 実験条件

対象とする都市空間は、10 [単位距離] \times 10 [単位距離] の正方空間とし、都市の総土地面積は 100 [単位距離²] とする。立地点数 K は平方数となるように設定し、立地点数 K に応じて都市空間を $\sqrt{K} \times \sqrt{K}$ の格子状に分割する。各立地点の土地面積は均等である (i.e., $S_i = S/K$)。

⁴ このような $L^{(k)}$ の決定方法は、Nishioka and Kanno²⁹⁾ でも採用されている。

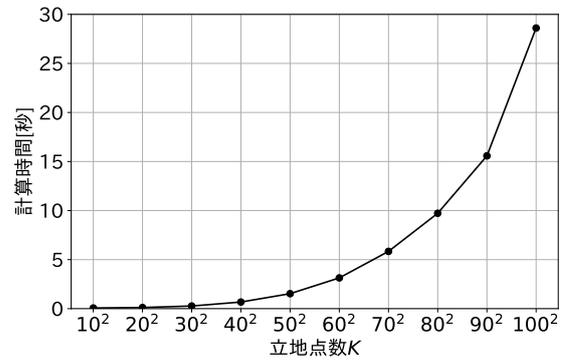


図-1 立地点数と計算時間

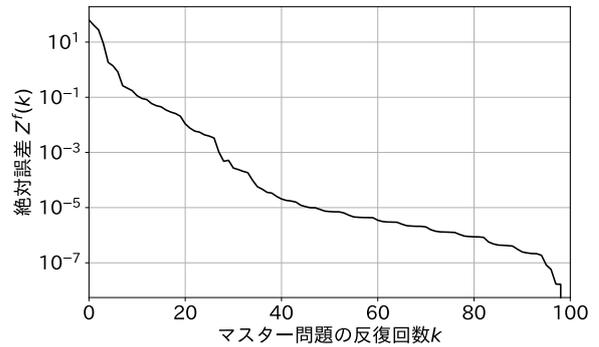


図-2 反復回数と絶対誤差 (立地点数 K = 100²)

また、立地点間の距離 T_{ij} はユークリッド距離で与える。その他、確率的 FO モデルのパラメータは以下のように設定する：

- 労働投入量： $L = 1$
- 通勤費用パラメータ： $t = 0.1$
- 企業間交流費用パラメータ： $\tau = 0.5$
- 家計・企業のランダム項パラメータ： $\theta^H, \theta^F = 1.0$

総企業数 M 、総家計数 N は仮定 1 を満たすものとする。なお、射影演算に必要なパラメータは $\epsilon = 10^{-5}$ とした。

計算機環境を以下に示す：

- OS: Windows 10 Home
- CPU: AMD Ryzen 9 3900X 12-Core, 3.79 GHz
- RAM: 32.0 GB
- Programming language: Python 3.8.3

(2) 立地点数と計算時間

立地点数 K を $K = 10^2, \dots, 100^2$ と調整して、提案アルゴリズムの計算時間 (実時間) を測定した。図-1 に立地点数と計算時間の関係を示す。各プロットは、各立地点数に対してそれぞれ 10 回試行した平均時間を表している。いずれも初期解として一様分布を与えている。図-1 より、立地点数が 100² の場合においても、およそ 30 秒という十分実用的な計算時間内で求解できること

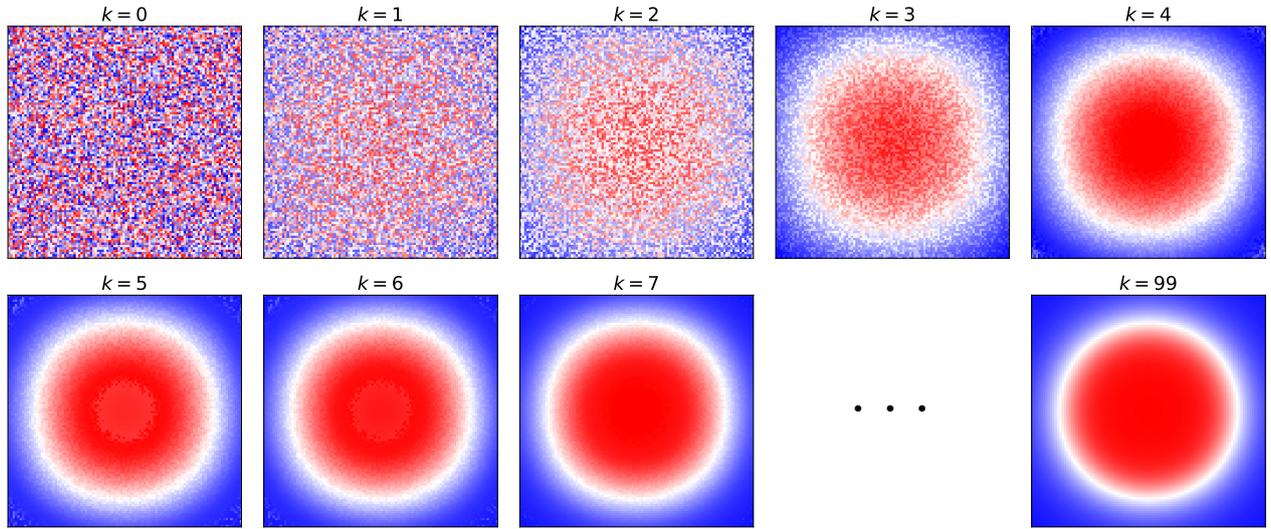


図-3 ランダム分布からの収束過程（企業の立地分布）

が分かる。

(3) 収束効率

立地点数 $K = 100^2$ とし、初期解としてランダム分布を与えた場合の収束状況を調べた。図-2に、(マスター問題の) 反復回数とマスター問題の目的関数 $Z^F(\cdot)$ の絶対誤差 $Z^F(k)$ の関係を示す。絶対誤差 $Z^F(k)$ は次のように計算した：

$$Z^F(k) \equiv Z^F(\mathbf{m}^{(k)}) - Z^F(\mathbf{m}^*). \quad (39)$$

ここで本来 \mathbf{m}^* は最適解を表すが、図-2では $\mathbf{m}^* = \mathbf{m}^{(99)}$ としている ($\mathbf{m}^{(99)}$ 自体の正確性は次節で述べる)。図-2より、およそ40反復までで急速に最適解に近づき、60反復程度で十分精度の良い解を得られることがわかる。

各反復における暫定解 $\mathbf{m}^{(k)}$ を図-3に示す。各図の赤青の濃淡が企業の立地分布を表しており、赤く塗りつぶされている立地点ほど企業が多く立地していることを表している。反復回数 $k = 7$ ほどで、 $k = 99$ の解と定性的にはほぼ同じ分布パターンが得られていることが読み取れる。

(4) 解の正確性

提案アルゴリズムによって、十分な反復回数を試行して得られる解が、確率的FOモデルの均衡条件(7)-(12)をすべて矛盾なく満足することを確認する。具体的には、前節で用いた反復回数 $k = 99$ の解 $(\mathbf{m}^{(99)}, \mathbf{n}^{(99)})$ が、均衡条件(7)-(12)を精度よく満足することを示す。精度評価には、以下に定義する $E^{CnvH}(k), E^{CnvF}(k), E^{PrbH}(k),$

$E^{PrbF}(k), E^{Land}(k), E^{Labor}(k)$ を用いる：

$$E^{CnvH}(k) \equiv \left\| \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij}^{(k)} - N \right\|^2,$$

$$E^{CnvF}(k) \equiv \left\| \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i^{(k)} - M \right\|^2,$$

$$E^{PrbH}(k) \equiv \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} \left\| n_{ij}^{(k)} - N \frac{\exp[\theta^H \cdot V_{ij}^{H(k)}]}{\sum_k \sum_l \exp[\theta^H \cdot V_{kl}^{H(k)}]} \right\|^2,$$

$$E^{PrbF}(k) \equiv \sum_{j \in \mathcal{K}} \left\| m_j^{(k)} - M \frac{\exp[\theta^F \cdot V_j^{F(k)}]}{\sum_l \exp[\theta^F \cdot V_l^{F(k)}]} \right\|^2,$$

$$E^{Land}(k) \equiv \sum_{i \in \mathcal{K}} \left\| \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij}^{(k)} + m_i^{(k)} - S_i \right\|^2,$$

$$E^{Labor}(k) \equiv \sum_{j \in \mathcal{K}} \left\| L m_j^{(k)} - \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij}^{(k)} \right\|^2.$$

仮定1のもとでは、 $(\mathbf{m}^{(k)}, \mathbf{n}^{(k)})$ が均衡解ならば、これら $E^{CnvH}(k), E^{CnvF}(k), E^{PrbH}(k), E^{PrbF}(k), E^{Land}(k), E^{Labor}(k)$ は理論上すべて0となる。実際、 $(\mathbf{m}^{(99)}, \mathbf{n}^{(99)})$ を代入したところ、 $E^{CnvH}(99), E^{CnvF}(99), E^{PrbH}(99), E^{PrbF}(99), E^{Land}(99), E^{Labor}(99)$ の値はすべて 10^{-8} 以下となり⁵、十分に精度の良い解であることが確認できた⁶。

⁵ ラグランジュ乗数の最適解として得られる地代・賃金も正の値をとり、均衡条件と矛盾しないことを確認している。

⁶ ここで、確率的FOモデルは複数均衡を持つ可能性があることに注意されたい。ここでの議論は、提案アルゴリズムが複数均衡のうちの1つを精度よく求解できることを示すものである。

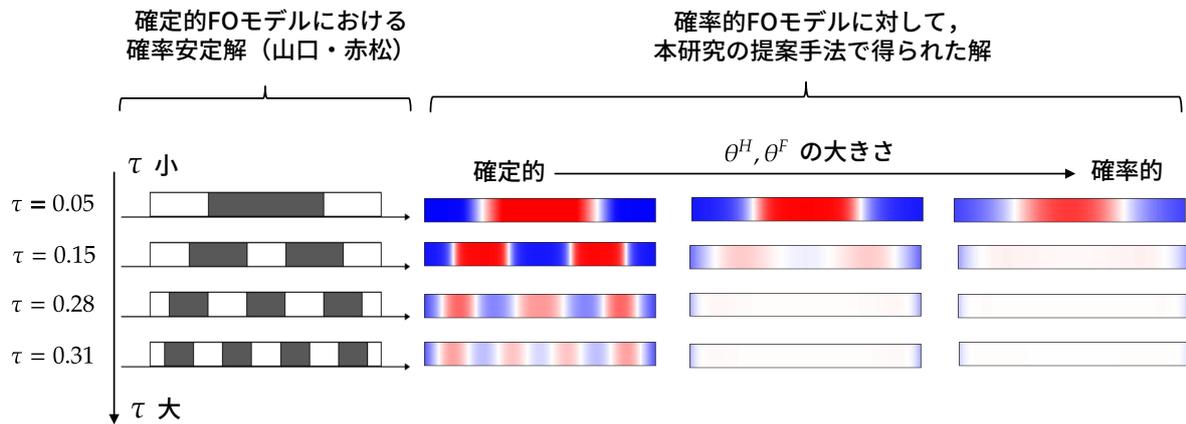


図-4 確定的モデルにおける確率安定解（山口・赤松²³⁾）との比較（企業の立地分布）

(5) 確定的 FO モデルの確率安定解との比較

2章で述べたように、本研究の確率的 FO モデルは $\theta^H, \theta^F \rightarrow \infty$ とすると、確定的 FO モデルに対応する。本節ではこの観点から、提案アルゴリズムで得られる確率的 FO モデルの解と、確定的 FO モデルの確率安定解（等価最適化問題の大域的最適解）を比較し、両者の対応関係を数値的に確認する。

比較は山口・赤松²³⁾により確率安定解が特定できている一次元空間において行った。確率安定解は、交通費用パラメータ t, τ によって性質（都心の極数）が変化するため、様々な解パターンを比較できるように $\tau = 0.05, 0.15, 0.28, 0.31$ と調節して数値実験を行った（ t は 0.05 に固定）。その他の FO モデルのパラメータは山口・赤松²³⁾ と同一に設定した⁷。提案アルゴリズムの初期解は一様分布で与えた。

図-4 に、山口・赤松²³⁾ の確率安定解と提案アルゴリズムによって得られた解（企業の立地分布）を示す。確定的 FO モデルにおいては、企業の立地分布は all or nothing となるため、黒く塗りつぶされている地点にのみ企業が立地することに注意されたい。確率的 FO モデルに対する提案アルゴリズムの結果は、 θ^H, θ^F の大きさを3段階に調整したものを示している。赤[青]の色が濃いほど立地企業が多い[少ない]ことを意味する。

図-4 より、パラメータ θ^H, θ^F がより確定的な選択行動になるように設定されている場合、提案アルゴリズムにより得られる確率的 FO モデルの解は、確定的 FO モデルの確率安定解と定性的に同じパターンになることが読みとれる。具体的には、確率安定解が n 極パターンになるような τ のケースでは、確率的 FO モデルにおいても n 極パターンを滲ませたような解が得られている。一方、パラメータ θ^H, θ^F がより確率的な選択行動になるように設定されている場合、提案アルゴリズム

の解は、 τ の大きさに関らず均等分布に近いものとなる。

以上を踏まえると、提案アルゴリズムは、大域的最適解への収束は理論上保証されていないものの、初期解を一様分布とした場合には概ね大域的最適解に収束すると期待できる。また、確定的 FO モデルの確率安定解が複数都心となる t, τ のケースでも、確率的 FO モデルでは θ^H, θ^F の大きさによっては解がほぼ一様分布になる可能性があることも分かる。この現象は、極数が多い確率安定解のときほど顕著になると予想される。

6. おわりに

本研究では、超大規模離散空間における FO モデルの効率的数値解法を開発した。具体的にはまず、FO モデルにおける立地主体（家計と企業）の選択行動にランダム効用最大化を仮定し、FO モデルを確率的枠組み（ロジット・モデル）に拡張した。次に、この確率的 FO モデルに対して等価最適化問題が構築できることを示し、さらに等価最適化問題は企業の立地分布を決定するマスター問題と家計の通勤地・居住地分布を決定するサブ問題からなる階層的最適化問題に変換できることを明らかにした。そして、各問題の数理構造を踏まえて、サブ問題に対してはバランス法を、マスター問題に対しては加速勾配法を活用した階層的最適化アルゴリズムを構築した。最後に、数値実験により提案手法の効率性と正確性を確認した。

謝辞： 本研究は JSPS 科研費 (JP20J21744, JP21H01448) の助成を受けた研究の一部です。ここに記し、感謝を表します。

⁷ 山口・赤松²³⁾ は一次元連続空間を対象としている。提案アルゴリズムでは、一次元連続空間を 200 立地点に均等分割した離散空間を対象して実験を行った。

付録 I 命題の証明

(1) 命題 1 の証明

最適化問題 [P] の一次の最適性条件が、確率的 FO モデルの均衡条件に一致することをもって、[P] がモデルの等価最適化問題であることを証明する。具体的には、制約条件 $\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \leq S_i$ に対応するラグランジュ乗数は地代 \mathbf{R} 、制約条件 $\sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \geq Lm_j$ に対応するラグランジュ乗数は賃金 \mathbf{W} であることを活用して証明を行う。

最適化問題 [P] のラグランジュ関数は次式である：

$$\begin{aligned}
 L = & -\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} d_{ij} m_i m_j + t \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} T_{ij} n_{ij} \\
 & + \frac{1}{\theta^F} \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i \ln \left(\frac{m_i}{M} \right) + \frac{1}{\theta^H} \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} \ln \left(\frac{n_{ij}}{N} \right) \\
 & + \lambda_1 \left(M - \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i \right) + \lambda_2 \left(N - \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} \right) \\
 & + \sum_{i \in \mathcal{K}} R_i \left(\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i - S_i \right) \\
 & + \sum_{j \in \mathcal{K}} W_j \left(Lm_j - \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \right). \quad (I.1)
 \end{aligned}$$

ただし λ_1, λ_2 はラグランジュ乗数である。ここで、各変数に関する L の偏導関数と $\mathbf{m} > 0, \mathbf{n} > 0$ とを考慮することにより、最適化問題 [P] の一次の最適性条件は次のように書き表せる：

$$\begin{aligned}
 -\sum_{i \in \mathcal{K}} d_{ij} m_i + \frac{1}{\theta^F} \left(\ln \left(\frac{m_j}{M} \right) + 1 \right) \\
 - \lambda_1 + R_j + LW_j = 0 \quad \forall j, \quad (I.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 tT_{ij} + \frac{1}{\theta^H} \left(\ln \left(\frac{n_{ij}}{N} \right) + 1 \right) \\
 - \lambda_2 + R_i - W_j = 0 \quad \forall (i, j), \quad (I.3)
 \end{aligned}$$

$$M - \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = 0, \quad (I.4)$$

$$N - \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = 0, \quad (I.5)$$

$$\begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i - S_i = 0 & \text{if } R_i > 0 \\ \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i - S_i \leq 0 & \text{if } R_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K}, \quad (I.6)$$

$$\begin{cases} Lm_j - \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} = 0 & \text{if } W_j > 0 \\ Lm_j - \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \leq 0 & \text{if } W_j = 0 \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{K}. \quad (I.7)$$

ここで式 (I.2), (I.3) はさらに、次のように式変形できる：

$$m_j = M \exp \left[\theta^F \left(\sum_{i \in \mathcal{K}} d_{ij} m_i - \mu_{1j} - L\mu_{2j} \right) \right] \exp \left[\theta^F \lambda_1 - 1 \right], \quad (I.8)$$

$$n_{ij} = N \exp \left[\theta^H \left(\mu_{2j} - \mu_{1i} - tT_{ij} \right) \right] \exp \left[\theta^H \lambda_2 - 1 \right]. \quad (I.9)$$

式 (I.4), (I.5) は立地主体数の保存則、式 (I.6), (I.7) は市場均衡条件である。さらに主体数保存則を考慮して λ_1, λ_2 を定めると、式 (I.8), (I.9) から空間均衡条件が得られる。

以上より、最適化問題 [P] の最適性条件 (式 (I.2)-(I.7)) は、確率的 FO モデルの均衡条件 (式 (7)-(12)) に一致することが確認できた。

(2) 命題 2 の証明

マスター問題 [Master-P] ・サブ問題 [Sub-P(\mathbf{m})] の最適性条件を組み合わせることにより、最適化問題 [P] の最適性条件が得られることをもって、階層的最適化問題と [P] との等価性を証明する。

マスター問題 [Master-P] のラグランジュ関数は次式である：

$$\begin{aligned}
 L_{\text{Master}} = & -\frac{1}{2} \mathbf{m}^T \mathbf{D} \mathbf{m} + \frac{1}{\theta^F} \mathbf{m}^T \ln \left(\frac{\mathbf{m}}{M} \right) + Z^{H^*}(\mathbf{m}) \\
 & + \lambda_1 \left(M - \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i \right) + \sum_{i \in \mathcal{K}} \mu_i (m_i - S_i). \quad (I.10)
 \end{aligned}$$

同様にサブ問題 [Sub-P(\mathbf{m})] のラグランジュ関数は次式である：

$$\begin{aligned}
 L_{\text{Sub}} = & t\mathbf{T}\mathbf{n} + \frac{1}{\theta^H} \mathbf{n}^T \ln \left(\frac{\mathbf{n}}{N} \right) + \lambda_2 \left(N - \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} \right) \\
 & + \sum_{i \in \mathcal{K}} R_i \left(\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i - S_i \right) \\
 & + \sum_{j \in \mathcal{K}} W_j \left(Lm_j - \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \right). \quad (I.11)
 \end{aligned}$$

ただし $\lambda_1, \lambda_2, \boldsymbol{\mu}$ はラグランジュ乗数である。これらのラグランジュ関数から導出される、マスター問題 ・ サブ問題の一次の最適性条件を組み合わせることにより、元の最適化問題 [P] の最適性条件が得られると確認できる。なお、マスター問題の最適性条件を導出する際に、サブ問題の最適値関数の勾配を求める必要がある。これについては補題 2 を参照されたい。

REFERENCES

- 1) Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations, *Regional science and urban economics*, Vol.12, No.2, pp.161–196, 1982.
- 2) Ahlfeldt, G. M., Redding, S. J., Sturm, D. M., and Wolf, N.: The economics of density: Evidence from the berlin wall, *Econometrica: journal of the Econometric Society*, Vol.83, No.6, pp.2127–2189, 2015.
- 3) Monte, F., Redding, S. J., and Rossi-Hansberg, E.: Commuting, migration, and local employment elasticities, *The American economic review*, Vol.108, No.12, pp.3855–3890, 2018.
- 4) Hebllich, Redding, and Sturm: The making of the modern metropolis: evidence from london, *The Quarterly Journal of Economics*, 2020.
- 5) Zhang, W. and Zhang, M.: Incorporating land use and pricing policies for reducing car dependence: Analytical framework and empirical evidence, *Urban studies*, Vol.55, No.13, pp.3012–3033, 2018.
- 6) Zhang, W. and Kockelman, K. M.: Congestion pricing effects on firm and household location choices in monocentric and polycentric cities, *Regional science and urban economics*, Vol.58, pp.1–12, 2016.
- 7) Zhang, W. and Kockelman, K. M.: Optimal policies in cities with congestion and agglomeration externalities: Congestion tolls, labor subsidies, and place-based strategies, *Journal of urban economics*, Vol.95, pp.64–86, 2016.
- 8) 秋本克哉, 赤松隆: 二次元空間 fujita and ogawa (1982) モデルの数値解法の開発, *土木計画学研究・講演集*, Vol.56, pp.11, 2017.
- 9) 清水廉, 長江剛志: 二次元空間を対象とした大規模な二主体集積経済モデルの効率的解法, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.76, No.3, pp.223–235, 2020.
- 10) Heikkila, E. J. and Wang, Y.: Fujita and ogawa revisited: An Agent-Based modeling approach, *Environment and planning. B, Planning & design*, Vol.36, No.4, pp.741–756, 2009.
- 11) Delloye, J., Peeters, D., and Thomas, I.: On the morphology of a growing city: A heuristic experiment merging static economics with dynamic geography, *PloS one*, Vol.10, No.8, pp.e0135871, 2015.
- 12) Bregman, L. M.: The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol.7, No.3, pp.200–217, 1967.
- 13) Cuturi: Sinkhorn distances: Lightspeed computation of optimal transport, *Advances in neural information processing systems*, 2013.
- 14) Ghadimi, S. and Lan, G.: Accelerated gradient methods for nonconvex nonlinear and stochastic programming, *Mathematical Programming. A Publication of the Mathematical Programming Society*, Vol.156, No.1-2, pp.59–99, 2016.
- 15) Ogawa, H. and Fujita, M.: Nonmonocentric urban configurations in a Two-Dimensional space, *Environment & planning A*, Vol.21, No.3, pp.363–374, 1989.
- 16) Fujita, M.: A monopolistic competition model of spatial agglomeration: Differentiated product approach, *Regional science and urban economics*, Vol.18, No.1, pp.87–124, 1988.
- 17) Lucas, R. E. and Rossi-Hansberg, E.: On the internal structure of cities, *Econometrica: journal of the Econometric Society*, Vol.70, No.4, pp.1445–1476, 2002.
- 18) Berliant, M., Peng, S.-K., and Wang, P.: Production externalities and urban configuration, *Journal of economic theory*, Vol.104, No.2, pp.275–303, 2002.
- 19) Berliant, M. and Wang, P.: Urban growth and subcenter formation: A trolley ride from the staples center to disneyland and the rose bowl, *Journal of urban economics*, Vol.63, No.2, pp.679–693, 2008.
- 20) 大澤実: 集積経済モデルの数理解析とその周辺, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.74, No.5, pp.I.19–I.36, 2018.
- 21) 中村孝一, 高山雄貴: 企業と家計の相互作用を考慮した都心形成モデルの開発, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.74, No.5, pp.I.555–I.569, 2018.
- 22) Osawa, M. and Akamatsu, T.: Equilibrium refinement for a model of non-monocentric internal structures of cities: A potential game approach, *Journal of economic theory*, Vol.187, pp.105025, 2020.
- 23) 山口修平, 赤松隆: 複数都心形成モデルの確率安定性解析-線分都市 vs. 円周都市-, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.75, No.2, pp.109–127, 2019.
- 24) 土木学会: 交通ネットワークの均衡分析-最新の理論と解法, 丸善, 1998.
- 25) Lamond, B. and Stewart, N. F.: Bregman’s balancing method, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.15, No.4, pp.239–248, 1981.
- 26) Sinkhorn, R. and Knopp, P.: Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol.21, No.2, pp.343–348, 1967.
- 27) Nesterov, Y.: A method for unconstrained convex minimization problem with the rate of convergence $O(1/k^2)$, *Doklady an ussr*, Vol.269, pp.543–547, 1983.
- 28) Wang, W. and Lu, C.: Projection onto the capped simplex, arXiv, <http://arxiv.org/abs/1503.01002>, 2015.
- 29) Nishioka, A. and Kanno, Y.: Accelerated projected gradient method with adaptive step size for compliance minimization problem, *JSIAM Letters*, Vol.13, pp.33–36, 2021.