

Manuscript information

Title

超大規模離散空間における Fujita-Ogawa モデルの効率的解法

A fast algorithm for Fujita-Ogawa model in discrete two-dimensional space

Authors

Name: 酒井 高良 (Takara Sakai)

Affiliation: 東北大学 大学院 情報科学研究科 (Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

Name: 涌井 優尚 (Masanao Wakui)

Affiliation: 東北大学 大学院 情報科学研究科 (Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

Name: 赤松 隆 (Takashi Akamatsu)

Affiliation: 東北大学 大学院 情報科学研究科 (Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

Keywords

Fujita-Ogawa (1982) モデル, ロジット・モデル, 最適輸送問題, バランシング法, 加速勾配法

(Fujita-Ogawa (1982) model, logit model, optimal transport, Bregman's balancing method, Nesterov's accelerated gradient method)

Corresponding author

酒井 高良 (Takara Sakai)

E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp

CRediT

Takara Sakai: Methodology; Formal analysis; Funding acquisition; Software; Writing original draft; Writing – review & editing.

Masanao Wakui: Formal analysis; Software; Writing original draft; Writing – review & editing.

Takashi Akamatsu: Conceptualization; Methodology; Formal analysis; Funding acquisition; Supervision; Writing – review & editing.

Competing Interests

The authors declare there are no competing interests.

Acknowledgments

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP20J21744, JP21H01448.

超大規模離散空間における Fujita-Ogawa モデルの効率的解法

酒井 高良¹・涌井 優尚²・赤松 隆³

¹学生会員 東北大学大学院情報科学研究科・JSPS 特別研究員 DC (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp(Corresponding Author)

²学生会員 東北大学大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: masanao.wakui.r4@dc.tohoku.ac.jp

³正会員 東北大学教授 大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究では、超大規模離散空間における Fujita-Ogawa(FO) モデルの効率的数値解法を提案する。具体的にはまず、FO モデルにおける主体の確定的選択行動をランダム効用理論 (ロジット・モデル) に基づき一般化した確率的 FO モデルを提示する。続いて、この確率的 FO モデルの等価最適化問題を導出し、さらにその問題が、企業の立地分布を決定するマスター問題と、家計の居住地・勤務地分布を決定するサブ問題とに階層分解できることを明らかにする。ここで、サブ問題はエントロピー正則化項付きの最適輸送問題、マスター問題は制約条件付き非凸計画問題の数理構造を持つ。これらの数理構造を活かし、サブ問題に対してはバランシング法を、マスター問題に対しては加速勾配法を適用する階層的最適化アルゴリズムを構築する。

Key Words: *Fujita-Ogawa (1982) model, logit model, optimal transport, Bregman's balancing method, Nesterov's accelerated gradient method*

1. はじめに

(1) 背景

大都市には企業が空間的に集中立地する“都心”が複数存在することが多い。このような複数都心が形成される要因は、その立地点固有の誘因力に加えて、企業が集積することにより新たに生じる外部経済 (集積の経済) にあると考えられている。都市における社会資本を効果的に運用・整備していくためには、こういった複数都心の存在を適切に考慮し、都市計画を策定・評価することが必要となる。そのため、集積の経済効果を定量的に記述・分析するフレームワークが求められる。

Fujita-Ogawa モデル¹⁾ (FO モデル) は、この要請に応える代表的な数理モデルである。FO モデルでは、集積の経済およびそれに起因する複数都心形成現象を端的に記述することができる。FO モデルの基本的枠組みは、企業と家計という 2 種類の主体が、それぞれ自身の利潤/効用を最大化するように立地/居住地・勤務地を選択した結果として生じる“均衡状態”を記述するというものである。ここで、企業の利潤関数には、より近隣に立地する企業が多いほど利潤が大きくなる作用が組み込まれている。これにより、企業には互いに集積して立地するインセンティブが働き、さらに企業と家計が土地市場において競合することで複数都心の創発が表現される。

この FO モデルは、都心形成現象を理論的に特徴付けるのに役立つだけでなく、様々な応用研究にも活用されている。例えば、計量的空間経済学 (QSE: quantitative spatial economics) の分野では、FO モデルのフレームワークを応用し、多種多様な空間情報データに基づいて都市の空間的特性を実証的に分析する試みがなされている (e.g., Ahlfeldt et al.²⁾, Monte et al.³⁾, Heblich et al.⁴⁾, 杉本ら⁵⁾)。また、混雑を表現した交通モデルと FO モデルの統合を図り、短期的な渋滞緩和施策と土地利用の関連性を分析した研究も存在する (e.g., Zhang and Zhang⁶⁾, Zhang and Kockelman^{7),8)})。これらの研究では、FO モデル (またはその拡張モデル) を直接的・間接的に解いた結果に基づき解析が行われている。しかしながら、そこで用いられている数値解法は収束が保証されないヒューリスティックなアルゴリズムであることが多い。このことは FO モデルが表現する集積の経済や複数都心形成現象が、応用モデルの解析結果に適切に反映されていない可能性を意味する。以上踏まえると、FO モデルに対する安定的かつ効率的な数値解法が求められる。

このような必要性に関わらず、大規模な実証・応用分析に耐える FO モデルの数値解法は開発されてこなかった。秋本・赤松⁹⁾ は、FO モデルに等価最適化問題 (二次計画問題) が存在することを活用し、二次計画問題に対する Frank-Wolfe アルゴリズムを提案した

が、問題の規模が大きい場合には膨大な計算時間を要するものとなっている。これは、FOモデルの等価最適化問題の未知変数である家計の居住地・勤務地分布変数が、立地点の二乗のオーダーになることに起因する。そのため、立地点数（問題規模）の増加に伴い、未知変数の次元が急激に増加し、求解が困難となっている。これに対して、清水・長江¹⁰⁾は、秋本・赤松⁹⁾を改良し、等価最適化問題における家計の居住地・勤務地分布を求める部分構造に最適輸送問題の構造を持つことを活用したアルゴリズムを構築している。しかしながら、効率的に求解できる状況設定は空間に周期性を仮定した特殊な場合に留まっている。Heikkila and Wang¹¹⁾やDelloye et al.¹²⁾は、エージェント・ベース・シミュレーションを提案しているが、均衡解への収束保証はなされていない。また、このような手法を主体数が多い状況へ適用することは困難であり、実証分析への利用は現実的でない。

(2) 目的とアプローチ

本研究の目的は、空間構造を特定しない超大規模分散空間において、実証的利用にも耐えうるFOモデルの高速な数値解法を開発することである。この目的を達成するために、本研究ではまず、(I) FOモデルをランダム効用理論に基づく確率的枠組みに拡張する。続いて、(II) この確率的FOモデルに等価最適化問題が存在することを示す。そして、(III) この等価最適化問題の数値構造を活かした効率的数値解法を構築する。

(I) では、FOモデルの立地主体（企業と家計）の選択行動にランダム効用最大化を仮定し、モデルを確率的枠組み（ロジット・モデル）に拡張する（以降では、オリジナルモデルを確定的FOモデル、本研究の拡張モデルを確率的FOモデルと区別して呼ぶ）。このような拡張には2つの意図がある。第1の意図は、ランダム効用理論に基づく主体の異質性を考慮することで、定量分析手法に対して実用的なモデルへの一般化を図るというものである。第2の意図は、主体の選択行動をロジット・モデルで表現することにより、後述するモデルの等価最適化問題の目的関数にエントロピー正則化項が加わるという数値計算上の利点（i.e., 問題のスムージング効果）を得るというものである。

(II) では、確率的FOモデルの等価最適化問題を構築する。この問題の目的関数は非凸であるものの、ポテンシャル・ゲームにおけるポテンシャル関数¹³⁾に対応する。したがって、問題の（局所的・大域的）最適解は、FOモデルの安定な均衡解となる^{注1)}。さらに、本研究では、この問題は企業の立地分布を決定するマスター問題と、企業の立地分布を与件として家計の居住地・勤務地分布を決定するサブ問題からなる階層的最適

化問題に変換できることを明らかにする。ここで、サブ問題はエントロピー正則化項付きの最適輸送問題、マスター問題は制約条件付き非凸計画問題の数値構造を持つ。

(III) では、サブ問題およびマスター問題の数値構造を活用し、サブ問題に対してはバランシング法^{14),15)}を、マスター問題に対しては加速勾配法¹⁶⁾を適用した階層的最適化アルゴリズムを構築する。サブ問題の決定変数は家計の居住地・勤務地分布であるため、本来、決定変数の次元は立地点数の二乗となる。そこで、サブ問題に双対問題ベースの解法であるバランシング法を適用することで、アルゴリズムの各反復で更新する変数の次元を大幅に削減される。また、マスター問題に対しては、目的関数についての一次の情報のみを用いる（i.e., 二次の情報は用いない）加速勾配法を適用するため、各反復における計算量を抑えることができる。さらに、マスター問題の目的関数についての一次の情報はサブ問題の最適値関数を用いることで容易に計算が可能である。本稿では、提案手法の効率性・正確性を大規模な格子状空間を対象にした数値実験により示す。

(3) 本稿の構成

本稿の構成を次に示す。続く2章にて、確率的FOモデルを定式化する。3章では等価最適化問題を導出し、さらにその等価最適化問題が階層的最適化問題に変換できることを示す。次に、4章において、階層分解されたサブ問題とマスター問題に対するアルゴリズムを述べる。5章では、数値実験により提案アルゴリズムの効率性・正確性を示す。最後に、6章にて本研究のまとめを述べる。

2. モデル

(1) 基本設定

K 個の立地点が存在する都市空間を想定する。立地点の集合を $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ と表し、立地点 i の土地面積は S_i とする。都市全体の総土地面積は S である（i.e., $S = \sum_{i \in \mathcal{K}} S_i$ ）。また、立地点 i から立地点 j までの距離を $T_{ij} \geq 0$ で表す。さらに、全立地点ペアを要素とする集合を \mathcal{H} と表す（i.e., $\mathcal{H} = \{(i, j) \mid i \in \mathcal{K}, j \in \mathcal{K}\}$ ）。

都市には、総数 M の企業と総数 N の家計が存在する。家計と企業には雇用関係が存在し、労働市場によって各立地点ごとに賃金が内生的に決定する。また、企業および家計は、立地点に立地/居住するために、地代を不在地主に支払う。この地代も土地市場によって各立地点ごとに内生的に定まる。これら地代・賃金に基づき、企業は自らの利潤を最大化するように立地点を選択し、家計は地代・賃金に加えて通勤費用を考慮し

て自らの効用を最大化するように居住地と勤務地のペアを選択する。ただし、本研究では、企業の立地点選択および家計の居住地・勤務地選択に、ランダム効用最大化に基づく選択行動を仮定する。立地点 i に立地する企業数を m_i 、立地点 i に居住し立地点 j の企業へ通勤する家計の数を n_{ij} と表す。また、立地点 i における地代・賃金をそれぞれ R_i, W_i と表す。

(2) 家計の居住地・勤務地選択行動

家計は、勤務する1つの企業に1単位の労働力を提供し、その対価として賃金を得る。そして、この賃金を用いて、1単位の土地と都市の外部から移入される価格1の合成財を消費する。立地点 i に居住し、立地点 j の企業に通勤する家計を家計 (i, j) と呼ぶ。家計 (i, j) の可処分所得 V_{ij} を次のように定義する：

$$V_{ij} \equiv W_j - tT_{ij} - R_i \quad \forall (i, j) \in \mathcal{H}. \quad (1)$$

ここで $t > 0$ は通勤費用パラメータである。各家計は可処分所得をすべて合成財の消費に充てるものとする。家計 (i, j) の効用 U_{ij}^H は次のように表される：

$$U_{ij}^H \equiv V_{ij} + \varepsilon_{ij}^H \quad \forall (i, j) \in \mathcal{H}. \quad (2)$$

ここで ε_{ij}^H は平均0、パラメータ θ^H のガンベル分布に従うランダム項である。各家計は、効用 U_{ij}^H を最大化するように、居住地・勤務地を選択する。

(3) 企業の立地点選択行動

企業は、1単位の土地と L 単位の労働力を投入し、合成財を生産する。立地点 i における財の産出量 $F_i(\mathbf{m})$ は、他企業とのコミュニケーションにより得られる便益の大きさで表される。この企業間交流便益 $F_i(\mathbf{m})$ は、都市の企業分布 $\mathbf{m} \equiv \{m_i\}_{i \in \mathcal{K}}$ に依存した以下のような関数で与えられる：

$$F_i(\mathbf{m}) \equiv \sum_{j \in \mathcal{K}} d_{ij} m_j \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (3)$$

ここで d_{ij} は距離減衰効果を表し、企業間交流費用パラメータ $\tau > 0$ を用いて次のように定義される：

$$d_{ij} \equiv \exp[-\tau T_{ij}] \quad \forall (i, j) \in \mathcal{H}. \quad (4)$$

すなわち、企業は近接する他の企業が多いほど多くの財を産出できる。

企業が立地点 i に立地することにより得られる利潤 U_i^F は次のように表される：

$$U_i^F \equiv V_i^F + \varepsilon_i^F \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (5)$$

ただし V_i^F は次式で定義される：

$$V_i^F \equiv F_i(\mathbf{m}) - R_i - LW_i \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (6)$$

また ε_i^F は平均0、パラメータ θ^F のガンベル分布に従うランダム項である。各企業は、利潤 U_i^F が最大になるように立地点を選択する。

(4) 均衡条件

均衡状態は、次に示す a) 立地主体数の保存条件、b) 空間均衡条件、c) 市場均衡条件を同時に満足する状態である。

a) 立地主体数の保存条件

総家計数と総企業数について以下の保存条件が成立する：

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N, \quad (7)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M. \quad (8)$$

b) 空間均衡条件

空間均衡条件とは、各主体の立地選択に関する無裁定条件である。本モデルでは、主体の選択行動にロジット・モデルを採用するため、均衡状態における無裁定条件はロジット・モデルの選択確率式に相当する。したがって、均衡状態において n_{ij}, m_i は下式を満足する：

$$n_{ij} = N \frac{\exp[\theta^H \cdot V_{ij}^H]}{\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{l \in \mathcal{K}} \exp[\theta^H \cdot V_{kl}^H]} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{H}, \quad (9)$$

$$m_i = M \frac{\exp[\theta^F \cdot V_i^F]}{\sum_{l \in \mathcal{K}} \exp[\theta^F \cdot V_l^F]} \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (10)$$

ここで $\theta^H \rightarrow \infty$ および $\theta^F \rightarrow \infty$ とすると、選択確率式(9),(10)は確定的FOモデルにおける無裁定条件(相補性条件)に対応することに注意されたい^{注2)}。すなわち、本研究の確率的FOモデルは、確定的FOモデルの緩和問題と捉えることもできる(その際、 θ^H, θ^F は緩和パラメータを意味する)。この視座に立つと、後述する提案アルゴリズムは確定的FOモデルの近似解法と捉えることもできる。

c) 市場均衡条件

立地点 i における均衡地代 R_i と均衡賃金 W_i は、それぞれ土地市場と労働市場によって内生的に決定する。土地市場では、正の地代がついていれば、土地の供給面積と需要面積が一致する：

$$\begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i = S_i & \text{if } R_i > 0 \\ \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \leq S_i & \text{if } R_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (11)$$

労働市場では、正の賃金がついていれば、企業の求める労働者数と家計の供給労働者数が一致する：

$$\begin{cases} Lm_j = \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} & \text{if } W_j > 0 \\ Lm_j \leq \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} & \text{if } W_j = 0 \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{K}. \quad (12)$$

3. 等価最適化問題と階層分解

本章では、まず、前章で定式化した確率的 FO モデルの等価最適化問題を示す。次に、この等価最適化問題を、企業の立地分布を決定するマスター問題と、企業の立地分布を与件として家計の居住地・勤務地分布を決定するサブ問題からなる階層的最適化問題に変換する。最後に、アルゴリズム構築の準備として、階層的最適化問題に対するいくつかの数理的特徴を述べる。

以降では、問題や数式の構造が分かりやすいように、変数やパラメータを適宜ベクトル・行列形式で表記する。

(1) 等価最適化問題

確定的な FO モデルには等価な最適化問題^{注3)}が存在することが知られている^{17),18)}。本研究の確率的 FO モデルも同様に等価最適化問題が構築できる。このことを次の命題に示す。

命題 1. 次に示す最適化問題 [P] の局所最適解は、確率的 FO モデルの均衡条件を満足する：

$$\begin{aligned} & \text{[P]} \\ & \min_{\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \Omega} Z(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \\ & \text{where } Z(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \equiv -\frac{1}{2} \mathbf{m}^\top \mathbf{D} \mathbf{m} + t \mathbf{T}^\top \mathbf{n} \\ & \quad + \frac{1}{\theta^F} \mathbf{m}^\top \ln \left(\frac{\mathbf{m}}{M} \right) + \frac{1}{\theta^H} \mathbf{n}^\top \ln \left(\frac{\mathbf{n}}{N} \right). \quad (13) \end{aligned}$$

ここで $\ln(\mathbf{x}) \equiv \{\ln x_i\}_{i \in \mathcal{K}}$ である。また \mathbf{D} は d_{ij} を要素とする行列、 \mathbf{T} と \mathbf{n} はそれぞれ T_{ij} および n_{ij} を要素とするベクトルを表す。実行可能領域 Ω は次のように定義される：

$$\Omega \equiv \left\{ (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \left| \begin{array}{l} \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M, \\ \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N, \\ \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \leq S_i \quad \forall i \in \mathcal{K}, \\ \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \geq Lm_j \quad \forall j \in \mathcal{K}, \\ m_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{K}, \\ n_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \right\}.$$

(2) 等価最適化問題の階層分解

等価最適化問題 [P] は、企業の立地分布を決定するマスター問題と、企業の立地分布を与件として家計の居住地・勤務地分布を決定するサブ問題に分解することができる。このことを次の命題にまとめる。

命題 2 (階層的最適化問題). 次に示す階層的最適化問題 [Master-P], [Sub-P(\mathbf{m})] の最適解は、問題 [P] の最適解である：

$$\begin{aligned} & \text{[Master-P]} \\ & \min_{\mathbf{m}} Z^F(\mathbf{m}) \quad (14) \end{aligned}$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in \mathcal{K}} m_j = M, \quad (15)$$

$$0 \leq m_i \leq S_i \quad \forall i \in \mathcal{K}, \quad (16)$$

where $Z^F(\mathbf{m}) \equiv$

$$-\frac{1}{2} \mathbf{m}^\top \mathbf{D} \mathbf{m} + \frac{1}{\theta^F} \mathbf{m}^\top \ln \left(\frac{\mathbf{m}}{M} \right) + Z^{H*}(\mathbf{m}). \quad (17)$$

[Sub-P(\mathbf{m})]

$$Z^{H*}(\mathbf{m}) \equiv \min_{\mathbf{n}} Z^H(\mathbf{n}) \quad (18)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \leq S_i \quad \forall i \in \mathcal{K}, \quad (19)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \geq Lm_j \quad \forall j \in \mathcal{K}, \quad (20)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N, \quad (21)$$

$$\text{where } Z^H(\mathbf{n}) \equiv t \mathbf{T} \mathbf{n} + \frac{1}{\theta^H} \mathbf{n}^\top \ln \left(\frac{\mathbf{n}}{N} \right). \quad (22)$$

以降では議論を簡単にするために、総企業数 M と総家計数 N は、総土地 [労働] 供給量と総土地 [労働] 需要量が一致するように設定されているものと仮定する。

仮定 1. 総企業数 M および総家計数 N は以下の関係式を満足する：

$$M = LN, \quad (23)$$

$$M + N = S. \quad (24)$$

仮定 1 は、各立地点における土地市場と労働市場で、総供給量と総需要量が一致することも意味する。つまり、最適解において、サブ問題 [Sub-P(\mathbf{m})] の制約条件 (19), (20) は必ず等式で成立する。なお、本来、仮定 1 が満たされていない状況でも、ダミー企業・家計変数を導入することで仮定 1 を満足する問題を考えることができる。

仮定 1 のもとでは、サブ問題はエントロピー正則化項付きの最適輸送問題に帰着する。この数理構造は、交通工学の分野でよく知られている二重制約型重力モデルと同じものである¹⁹⁾。一方、マスター問題は制約条件付きの非凸最適化問題となる。これはマスター問題の目的関数の第 1 項 $-(1/2) \mathbf{m}^\top \mathbf{D} \mathbf{m}$ が凹関数となるためである。なお、マスター問題の実行可能領域は、単体から端点近傍を除いた領域となる。

詳細は4章において述べるが、本研究の提案アルゴリズムは、マスター問題に対して加速勾配法を適用するものである。この加速勾配法の長所のひとつは、目的関数の一次の情報（勾配・劣勾配）のみを必要とすることである。しかしながら、そもそも勾配の計算負荷が大きい場合や目的関数の劣勾配しか利用できない場合には、アルゴリズムの性能が低下する可能性がある。この点について本研究の場合は、マスター問題の目的関数にサブ問題の最適値関数が含まれるものの、その勾配を陽に計算できるため、加速勾配法の性能が最大限発揮されることが期待できる。このことに関連して、サブ問題の最適値関数およびマスター問題の目的関数の理論的性質について以下の補題にまとめる。

補題 1. サブ問題の双対問題は以下である：

[Sub-D(m)]

$$\begin{aligned} \max_{\widehat{\mathbf{R}}, \widehat{\mathbf{W}}} \quad & -(S - m)^\top \widehat{\mathbf{R}} + Lm^\top \widehat{\mathbf{W}} \\ & - \frac{N}{\theta^H} \ln \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} \exp(-\theta^H (tT_{ij} + \widehat{R}_i - \widehat{W}_j)) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{s.t. } \widehat{R}_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{K}, \quad (26)$$

$$\widehat{W}_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{K}. \quad (27)$$

ここで $\widehat{\mathbf{R}}$ および $\widehat{\mathbf{W}}$ は、それぞれサブ問題 [Sub-P] の制約条件 (19), (20) に対応するラグランジュ乗数である。

補題 2. サブ問題の最適値関数の勾配は以下である：

$$\frac{dZ^{h^*}(m)}{dm} = \widehat{\mathbf{R}}^*(m) + L\widehat{\mathbf{W}}^*(m). \quad (28)$$

ここで $\widehat{\mathbf{R}}^*(m)$ および $\widehat{\mathbf{W}}^*(m)$ は、サブ問題 [Sub-P(m)] のラグランジュ乗数の最適解である。

補題 3. マスター問題の目的関数の勾配は以下である：

$$\begin{aligned} \frac{dZ^F(m)}{dm} = & -Dm + \frac{1}{\theta^F} \left(\ln \left(\frac{m}{M} \right) + 1 \right) \\ & + \widehat{\mathbf{R}}^*(m) + L\widehat{\mathbf{W}}^*(m). \end{aligned} \quad (29)$$

4. アルゴリズム

提案アルゴリズムは、サブ問題に対するバランシング法 (Bregman¹⁴)、マスター問題に対する加速勾配法 (Ghadimi and Lan¹⁶) から構成される。メイン・ループは、マスター問題に対する加速勾配法となる。ただし、メイン・ループ中でサブ問題の最適値関数の情報が必要となるため、その都度、サブ問題をバランシング法で解くというサブ・ルーチンが発生する。

アルゴリズム 1 バランシング法 (Bregman¹⁴)

Input: $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{1}, \mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{1}, \mathbf{K} \equiv [\exp(-\theta^H tT_{ij})]$

1: **for** $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**

2: $\gamma^{(k)} \leftarrow \mathbf{u}^{(k)\top} \mathbf{K} \mathbf{v}^{(k)}$

3: $\mathbf{v}^{(k+1)} \leftarrow \gamma^{(k)} \frac{Lm}{N} \left(\frac{1}{\mathbf{K} \mathbf{u}^{(k)}} \right)^{-1}$

4: $\mathbf{u}^{(k+1)} \leftarrow \gamma^{(k)} \frac{S - m}{N} \left(\frac{1}{\mathbf{K} \mathbf{v}^{(k+1)}} \right)^{-1}$

5: **end for**

Output: $\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)}$

(1) サブ問題のアルゴリズム

前章で述べたように、サブ問題は二重制約型の重力モデルと同じ数理構造を持つ。この二重制約型の重力モデル¹⁹は、Bregman のバランシング法^{14,20}によって効率的に求解できることが知られている^{注4}。バランシング法は、問題の二重制約条件に対応するラグランジュ乗数を座標変換（指数変換）した変数を交互に更新する双対問題ベースのアルゴリズムである。つまり、実質的な操作変数の次元は、制約条件の本数（ラグランジュ乗数の次元）となる。そのため、主問題ベースのアルゴリズムよりも、大幅に操作変数の次元を削減できる。このことを踏まえて、本研究でもサブ問題に対してバランシング法を適用する。

サブ問題に適用するバランシング法をアルゴリズム 1 に示す。アルゴリズムにおける操作変数 \mathbf{v}, \mathbf{u} は、問題のラグランジュ乗数を指数変換した変数である。適当な収束判定基準のもとで終了したときの解 $\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}$ を対数変換することで、ラグランジュ乗数の最適解 $\widehat{\mathbf{W}}^*, \widehat{\mathbf{R}}^*$ を求めることができる：

$$\widehat{R}_i^* = -\theta^H \ln u_i^{(k)} \quad \forall i \in \mathcal{K}, \quad (30)$$

$$\widehat{W}_j^* = \theta^H \ln v_j^{(k)} \quad \forall j \in \mathcal{K}. \quad (31)$$

なお、主問題の決定変数は次のように求められる：

$$n_{ij} = \frac{N}{\gamma^{(k)}} K_{ij} u_i^{(k)} v_j^{(k)} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{H}. \quad (32)$$

また、アルゴリズムの収束判定は

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \frac{|u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}|}{u_i^{(k)}} + \sum_{i \in \mathcal{K}} \frac{|v_i^{(k+1)} - v_i^{(k)}|}{v_i^{(k)}} < \varepsilon^{\text{sub}} \quad (33)$$

により行う。ここで ε^{sub} は十分小さな正のパラメータである。

(2) マスター問題のアルゴリズム

マスター問題には Ghadimi and Lan¹⁶ の加速勾配法を適用する。このアルゴリズムは、目的関数が非凸の場合でも停留点への収束が保証されるものである。加

アルゴリズム 2 加速勾配法 (Ghadimi and Lan¹⁶)

Input: $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^K$, $\{\alpha_i\} = 1$ and $\{\alpha_j\} \in (0, 1)$ for any $k \geq 2$, $\{\beta^{(k)} > 0\}$ and $\{\lambda^{(k)} > 0\}$

- 1: Set the initial points $\mathbf{m}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)}$
- 2: **for** $k = 1, 2, \dots$ **do**
- 3: $\mathbf{y}^{(k)} \leftarrow (1 - \alpha^{(k)})\mathbf{m}^{(k-1)} + \alpha^{(k)}\mathbf{x}^{(k-1)}$
- 4: Compute $\nabla Z^F(\mathbf{y}^{(k)})$
- 5: $\mathbf{x}^{(k)} \leftarrow \Pi(\mathbf{x}^{(k-1)} - \lambda^{(k)}\nabla Z^F(\mathbf{y}^{(k)}))$
- 6: $\mathbf{m}^{(k)} \leftarrow \Pi(\mathbf{y}^{(k)} - \beta^{(k)}\nabla Z^F(\mathbf{y}^{(k)}))$
- 7: **end for**

Output: $\mathbf{m}^{(k)}$

えて、Nesterov²¹) の加速勾配法と同様に、目的関数の一次の情報である勾配のみを用い、二次の情報を必要としない。したがって、勾配が容易に計算可能な本研究のマスター問題に対する解法として適していると言える。

マスター問題に対する加速勾配法をアルゴリズム 2 に示す。ここで、 \mathbf{x}, \mathbf{y} は補助変数であり、決定変数 \mathbf{m} と同様に各反復で更新されていく。また $\Pi(\overline{\mathbf{m}})$ は、問題 [Master-P] の実行可能領域への射影演算子である。具体的には次のように定義される：

$$\Pi(\overline{\mathbf{m}}) \equiv \arg \min_{\mathbf{m}} \|\mathbf{m} - \overline{\mathbf{m}}\|^2 \quad (34)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{1}^\top \mathbf{m} = M, \quad (35)$$

$$\mathbf{0} + \varepsilon^{\text{Proj}} \mathbf{1} \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{S} - \varepsilon^{\text{Proj}} \mathbf{1}. \quad (36)$$

ここで $\varepsilon^{\text{Proj}}$ は十分小さい正の定数である。このように企業の立地分布 \mathbf{m} の実行可能領域を微小に狭める理由は、ロジット・モデルの性質から確率的 FO モデルの均衡解では必ず $m_i \neq 0, S_i, \forall i$ となるためである。この問題は凸計画問題であるので様々な効率的解法が存在する。特に、各立地点の土地面積がすべて等しい場合、Wang and Lu²²) のアルゴリズムを応用すれば高速に計算できる。

アルゴリズム 2 において、ステップサイズを決めるパラメータの点列 $\{\alpha^{(k)}\}, \{\beta^{(k)}\}, \{\lambda^{(k)}\}$ は、次のように設定する：

$$\alpha^{(k)} = \frac{2}{k+1} \quad \forall k, \quad (37)$$

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{2L^{(k)}} \quad \forall k, \quad (38)$$

$$\lambda^{(k)} = \left(1 + \frac{\alpha^{(k)}}{4}\right) \beta^{(k)} \quad \forall k. \quad (39)$$

$L^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) は目的関数の勾配 $\nabla Z^F(\mathbf{m})$ のリプシッツ定数より大きい定数であれば良い。加速勾配法をベースとするアルゴリズムの多くはバック・トラッキングと

呼ばれる手法で $L^{(k)}$ を逐次決定することが多い。しかしながら、バック・トラッキングは目的関数の評価回数が増える (i.e., サブ問題を解く回数が増える) ため、提案アルゴリズムでは次のように $L^{(k)}$ を逐次決定する^{注 5}):

$$L^{(k)} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{y}^{(k)}) - \nabla f(\mathbf{y}^{(k-1)})\|}{\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k-1)}\|}. \quad (40)$$

このとき $L^{(k)}$ が (大域的な) リプシッツ条件を満足するという理論的保証はないものの、後述する数値計算では良い収束性能を確認できている。

また、アルゴリズムの収束判定は、

$$\|\mathbf{m}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k)}\|_2 < \varepsilon^{\text{mas}} \quad (41)$$

により行う。ここで ε^{mas} は十分小さな正のパラメータである。

5. 数値実験

本章では、提案アルゴリズムの効率性および正確性を数値実験により確認する。

(1) 実験条件

対象とする都市空間は、10 [単位距離] × 10 [単位距離] の正方空間とし、都市の総土地面積は 100 [単位距離²] とする。立地点数 K は平方数となるように設定し、立地点数 K に応じて都市空間を $\sqrt{K} \times \sqrt{K}$ の格子状に分割する。各立地点の土地面積は均等である (i.e., $S_i = S/K$)。また、立地点間の距離 T_{ij} はユークリッド距離で与える。その他、確率的 FO モデルのパラメータは以下のように設定する：

- 労働投入量： $L = 1$
- 通勤費用パラメータ： $t = 0.1$
- 企業間交流費用パラメータ： $\tau = 0.5$
- 企業・家計のランダム項パラメータ： $\theta^H, \theta^F = 1.0$

総企業数 M 、総家計数 N は仮定 1 を満たすものとする。また、アルゴリズムに必要なパラメータについては、次のように設定した： $\varepsilon^{\text{mas}} = 10^{-5}$, $\varepsilon^{\text{sub}} = 10^{-3}$, $\varepsilon^{\text{proj}} = 10^{-5}$ 。

数値実験に用いた計算機環境を以下に示す：

- OS: Windows 10 Home
- CPU: AMD Ryzen 9 3900X 12-Core, 3.79 GHz
- RAM: 32.0 GB
- Programming language: Python 3.8.3

なお、提案手法を実装した Python コードは GitHub にて公開している (URL: <https://github.com/takala4/foapgb>)。

(2) 汎用ソルバーとの比較

提案手法が汎用的手法に対して優位であることを確かめる予備実験を行った。具体的には、問題 [P] に対して

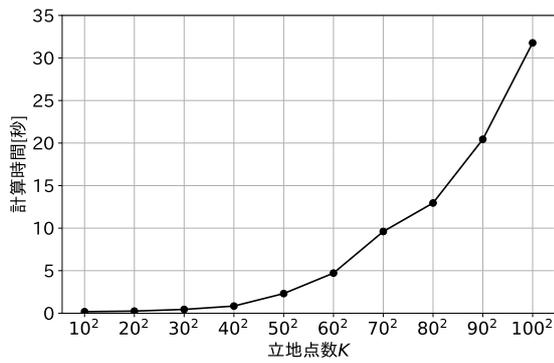


図-1 立地点数と計算時間

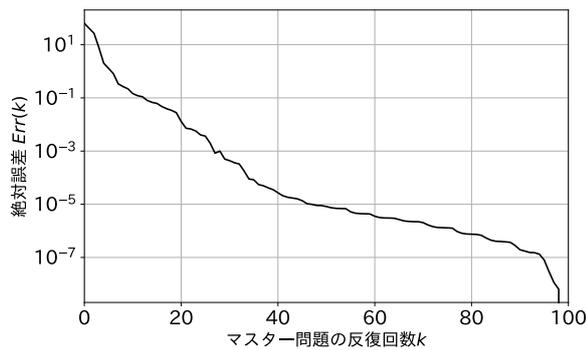


図-2 反復回数と絶対誤差 (立地点数 K = 100²)

非凸数理計画問題に対する汎用ソルバーを適用したケースと、提案手法を用いたケースでの比較を行った。汎用ソルバーは `scipy.optimize` の逐次二次計画法 (SLSQP) を用いた。

数値実験の結果、立地点数 $K = 5^2$ の場合で、汎用ソルバーは求解に 44.4 秒を要したのに対して、提案手法は 0.028 秒ほどで完了した。また、汎用ソルバーは立地点数 $K = 8^2$ でメモリ容量不足によって計算不可能になるが、提案手法では立地点数 $K = 100^2$ 以上の規模でも容量不足に陥ることなく計算可能であることを確認できた (詳細は 5.(3))。

汎用ソルバーが求解不可能になる理由としては、そもそも未知変数の次元が膨大であることに加えて、内部で (スパースでない) ヘッセ行列を保持しているためだと考えられる。一方、提案手法では、反復計算において特に次元の大きい家計の居住地・勤務地分布変数 $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{K^2}$ を直接保持せず、次元が大幅に削減される双対変数 ($\in \mathbb{R}^{2K}$) ベースの解更新を行っている (バランシング法)。さらに、企業の立地分布変数についても二次の情報 (ヘッセ行列) を用いない加速勾配法により解更新を行っている。そのため、提案手法は素朴な汎用的手法に比べて大幅にメモリ容量を削減できる。

(3) 立地点数と計算時間

立地点数 K を $K = 10^2, \dots, 100^2$ と調整して、提案アルゴリズムの計算時間 (実時間) を測定した。図-1 に立地点数と計算時間の関係を示す。各プロットは、各立地点数に対してそれぞれ 3 回試行した平均時間を表している。いずれも初期解として一様分布を与えている。図-1 より、立地点数が 100^2 の場合においても、およそ 32 秒という十分実用的な計算時間内で求解できることが分かる。また、紙面の都合上割愛したが立地点数 $K = 150^2$ のケースでも、提案手法は 130 秒ほどで計算を完了することを確認した。

(4) 収束効率

立地点数 $K = 100^2$ とし、初期解としてランダム分布を与えた場合の収束状況を調べた。図-2 に、(マスター問題の) 反復回数とマスター問題の目的関数 $Z^F(\cdot)$ の絶対誤差 $Z^F(k)$ の関係を示す。絶対誤差 $Err(k)$ は次のように計算した：

$$Err(k) \equiv Z^F(\mathbf{m}^{(k)}) - Z^F(\mathbf{m}^*). \quad (42)$$

ここで本来 \mathbf{m}^* は最適解を表すが、図-2 では $\mathbf{m}^* = \mathbf{m}^{(99)}$ としている ($\mathbf{m}^{(99)}$ 自体の正確性は次節で述べる)。図-2 より、提案手法ではおよそ 40 反復までで急速に最適解に近づき、60 反復程度で十分精度の良い解を得られることがわかる。

各反復における暫定解 $\mathbf{m}^{(k)}$ を図-3 に示す。各図の赤青の濃淡が企業の立地分布を表しており、赤く塗りつぶされている立地点ほど企業が多く立地していることを表している。反復回数 $k = 7$ ほどで、 $k = 99$ の解と定性的にはほぼ同じ立地分布が得られていることが読み取れる。

(5) 解の正確性

提案アルゴリズムによって、十分な反復回数を試行して得られる解が、確率的 FO モデルの均衡条件 (7)-(12) をすべて矛盾なく満足することを確認する。具体的には、前節で用いた反復回数 $k = 99$ の解 ($\mathbf{m}^{(99)}, \mathbf{n}^{(99)}$) が、均衡条件 (7)-(12) を精度よく満足することを示す。精度評価には、以下に定義する $E^{CnvH}(k), E^{CnvF}(k), E^{PrbH}(k), E^{PrbF}(k), E^{Land}(k), E^{Labor}(k)$ を用いる：

$$E^{CnvH}(k) \equiv \left\| \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} n_{ij}^{(k)} - N \right\|^2,$$

$$E^{CnvF}(k) \equiv \left\| \sum_{i \in K} m_i^{(k)} - M \right\|^2,$$

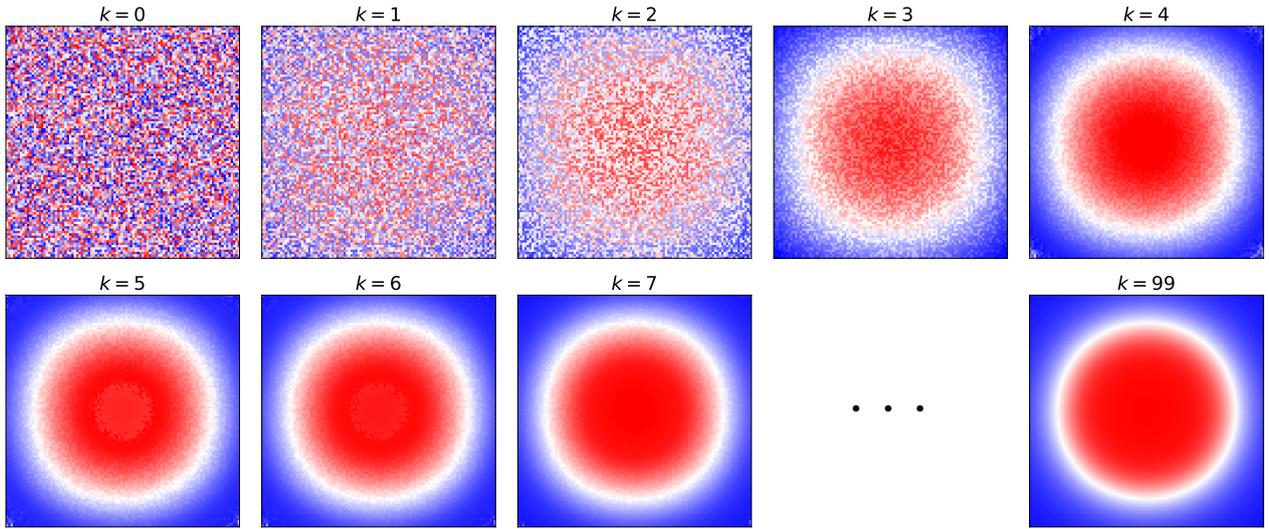


図-3 ランダム分布からの収束過程（企業の立地分布）

$$E^{PrbH}(k) \equiv \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} \left\| n_{ij}^{(k)} - N \frac{\exp[\theta^H \cdot V_{ij}^{H(k)}]}{\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{l \in \mathcal{K}} \exp[\theta^H \cdot V_{kl}^{H(k)}]} \right\|^2,$$

$$E^{PrbF}(k) \equiv \sum_{j \in \mathcal{K}} \left\| m_j^{(k)} - M \frac{\exp[\theta^F \cdot V_j^{F(k)}]}{\sum_{l \in \mathcal{K}} \exp[\theta^F \cdot V_l^{F(k)}]} \right\|^2,$$

$$E^{Land}(k) \equiv \sum_{i \in \mathcal{K}} \left\| \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij}^{(k)} + m_i^{(k)} - S_i \right\|^2,$$

$$E^{Labor}(k) \equiv \sum_{j \in \mathcal{K}} \left\| Lm_j^{(k)} - \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij}^{(k)} \right\|^2.$$

仮定1のもとでは、 $(\mathbf{m}^{(k)}, \mathbf{n}^{(k)})$ が均衡解ならば、これら $E^{CnvH}(k)$, $E^{CnvF}(k)$, $E^{PrbH}(k)$, $E^{PrbF}(k)$, $E^{Land}(k)$, $E^{Labor}(k)$ は理論上すべて0となる。実際、 $(\mathbf{m}^{(99)}, \mathbf{n}^{(99)})$ を代入したところ、 $E^{CnvH}(99)$, $E^{CnvF}(99)$, $E^{PrbH}(99)$, $E^{PrbF}(99)$, $E^{Land}(99)$, $E^{Labor}(99)$ の値はすべて 10^{-8} 以下となり^{注6)}、十分に精度の良い解であることが確認できた^{注7)}。

(6) 確定的FOモデルの確率安定解との比較

2章で述べたように、本研究の確率的FOモデルは $\theta^H, \theta^F \rightarrow \infty$ とすると、確定的FOモデルに対応する。本節ではこの観点から、提案アルゴリズムで得られる確率的FOモデルの解と、確定的FOモデルの確率安定解（等価最適化問題の大域的最適解）を比較し、両者の対応関係を数値的に確認する。

比較は山口・赤松¹⁸⁾により確率安定解が特定できている一次元空間において行った。確率安定解は、交通費用パラメータ t, τ によって性質（都心の極数）が変化するため、様々な均衡立地分布を比較できるよう $\tau = 0.05, 0.15, 0.28, 0.31$ と調節して数値実験を行った（ t は

0.05に固定）。その他のFOモデルのパラメータは山口・赤松¹⁸⁾と同一に設定した^{注8)}。提案アルゴリズムの初期解は一様分布で与えた。

図-4に、山口・赤松¹⁸⁾の確率安定解と提案アルゴリズムによって得られた解（企業の立地分布）を示す。確定的FOモデルにおいては、企業の立地分布は all or nothing となるため、黒く塗りつぶされている立地点にのみ企業が立地することに注意されたい。確率的FOモデルに対する提案アルゴリズムの結果は、 θ^H, θ^F の大きさを3段階に調整したものを示している。赤[青]の色が濃いほど立地企業が多い[少ない]ことを意味する。

図-4より、パラメータ θ^H, θ^F がより確定的な選択行動になるように設定されている場合、提案アルゴリズムにより得られる確率的FOモデルの解は、確定的FOモデルの確率安定解と定性的に同じ立地分布になることが読みとれる。具体的には、確率安定解が n 極分布になるような τ のケースでは、確率的FOモデルにおいても n 極分布を滲ませたような解が得られている。一方、パラメータ θ^H, θ^F がより確率的な選択行動になるように設定されている場合、提案アルゴリズムの解は、 τ の大きさに関らず均等分布に近いものとなる。

以上を踏まえると、提案アルゴリズムは、大域的最適解への収束は理論上保証されていないものの、初期解を一様分布とした場合には概ね大域的最適解に収束すると期待できる。また、確定的FOモデルの確率安定解が複数都心となる t, τ のケースでも、確率的FOモデルでは θ^H, θ^F の大きさによっては解がほぼ一様分布になる可能性があることも分かる。この現象は、極数が多い確率安定解のときほど顕著になると予想される。

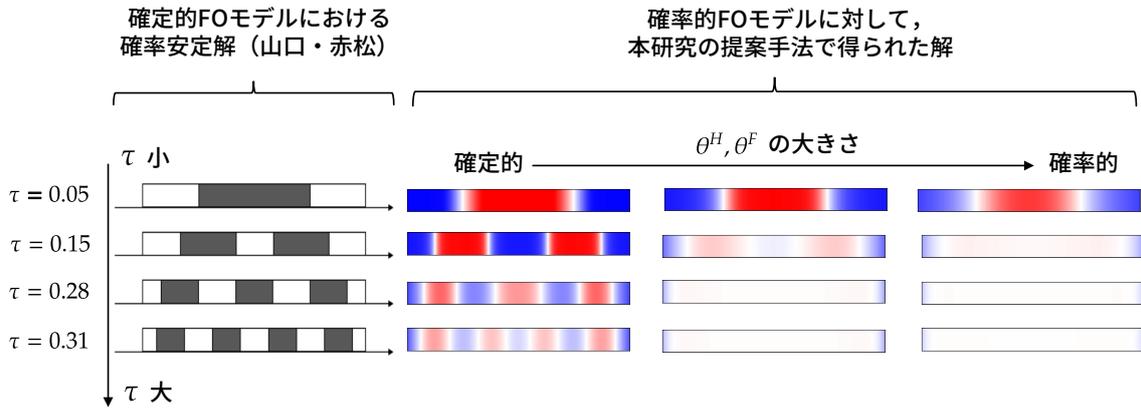


図-4 確定的モデルにおける確率安定解（山口・赤松¹⁸⁾）との比較（企業の立地分布）

6. おわりに

本研究では、超大規模離散空間における FO モデルの効率的数値解法を開発した。具体的にはまず、FO モデルにおける立地主体（企業と家計）の選択行動にランダム効用最大化を仮定し、FO モデルを確率的枠組み（ロジット・モデル）に拡張した。次に、この確率的 FO モデルに対して等価最適化問題が構築できることを示し、さらに等価最適化問題は企業の立地分布を決定するマスター問題と家計の居住地・通勤地分布を決定するサブ問題からなる階層的最適化問題に変換できることを明らかにした。そして、各問題の数理構造を踏まえて、サブ問題に対してはバランシング法を、マスター問題に対しては加速勾配法を活用した階層的最適化アルゴリズムを構築した。最後に、数値実験により提案手法の効率性と正確性を確認した。

謝辞： 本研究は JSPS 科研費 (JP20J21744, JP21H01448) の助成を受けた研究の一部です。また、本研究を行うにあたり、京都大学 大澤実 助教から有益なコメントを頂きました。ここに記し、感謝を表します。

付録 I 命題の証明

(1) 命題 1 の証明

最適化問題 [P] の一次の最適性条件が、確率的 FO モデルの均衡条件に一致することをもって、[P] がモデルの等価最適化問題であることを証明する。具体的には、制約条件 $\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \leq S_i$ に対応するラグランジュ乗数は地代 R_i 、制約条件 $\sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \geq Lm_j$ に対応するラグランジュ乗数は賃金 W_j であることを活用して証明を行う。

最適化問題 [P] のラグランジュ関数を次に示す：

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{m}, \lambda_1, \lambda_2, \mathbf{R}, \mathbf{W})$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} d_{ij} m_i m_j + t \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} T_{ij} n_{ij} \\
&+ \frac{1}{\theta^F} \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i \ln \left(\frac{m_i}{M} \right) + \frac{1}{\theta^H} \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} \ln \left(\frac{n_{ij}}{N} \right) \\
&+ \lambda_1 \left(M - \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i \right) + \lambda_2 \left(N - \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} \right) \\
&+ \sum_{i \in \mathcal{K}} R_i \left(\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i - S_i \right) \\
&+ \sum_{j \in \mathcal{K}} W_j \left(Lm_j - \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \right). \tag{I.1}
\end{aligned}$$

ここで、 λ_1, λ_2 はラグランジュ乗数である。一次の最適性条件を以下に示す：

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i \in \mathcal{K}} d_{ij} m_i + \frac{1}{\theta^F} \left(\ln \left(\frac{m_j}{M} \right) + 1 \right) \\
&\quad - \lambda_1 + R_j + LW_j = 0 \quad \forall j \in \mathcal{K}, \tag{I.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&tT_{ij} + \frac{1}{\theta^H} \left(\ln \left(\frac{n_{ij}}{N} \right) + 1 \right) \\
&\quad - \lambda_2 + R_i - W_j = 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{H}, \tag{I.3}
\end{aligned}$$

$$M - \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = 0, \tag{I.4}$$

$$N - \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = 0, \tag{I.5}$$

$$\begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i - S_i = 0 & \text{if } R_i > 0 \\ \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i - S_i \leq 0 & \text{if } R_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K}, \tag{I.6}$$

$$\begin{cases} Lm_j - \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} = 0 & \text{if } W_j > 0 \\ Lm_j - \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \leq 0 & \text{if } W_j = 0 \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{K}. \tag{I.7}$$

ここで式 (I.2), (I.3) はさらに、次のように書ける：

$$m_j = M \exp \left[\theta^F \left(\sum_{i \in K} d_{ij} m_i - \mu_{1j} - L \mu_{2j} \right) \right] \exp \left[\theta^F \lambda_1 - 1 \right], \quad (I.8)$$

$$n_{ij} = N \exp \left[\theta^H (\mu_{2j} - \mu_{1i} - t T_{ij}) \right] \exp \left[\theta^H \lambda_2 - 1 \right]. \quad (I.9)$$

式 (I.4), (I.5) は立地主体数の保存則、式 (I.6), (I.7) は市場均衡条件である。さらに主体数保存則を考慮して λ_1, λ_2 を定めると、式 (I.8), (I.9) から空間均衡条件が得られる。

以上より、最適化問題 [P] の最適性条件 (式 (I.2)-(I.7)) は、確率的 FO モデルの均衡条件 (式 (7)-(12)) に一致することが確認できた。

(2) 命題 2 の証明

マスター問題 [Master-P]・サブ問題 [Sub-P(m)] の最適性条件を組み合わせることにより、最適化問題 [P] の最適性条件が得られることをもって、階層的最適化問題と [P] との等価性を証明する。

マスター問題 [Master-P] のラグランジュ関数は次式である：

$$L_{\text{Master}} = -\frac{1}{2} \mathbf{m}^\top \mathbf{D} \mathbf{m} + \frac{1}{\theta^F} \mathbf{m}^\top \ln \left(\frac{\mathbf{m}}{M} \right) + Z^{H^*}(\mathbf{m}) + \lambda_1 \left(M - \sum_{i \in K} m_i \right) + \sum_{i \in K} \mu_i (m_i - S_i). \quad (I.10)$$

同様にサブ問題 [Sub-P(m)] のラグランジュ関数は次式である：

$$L_{\text{Sub}} = t \mathbf{T} \mathbf{n} + \frac{1}{\theta^H} \mathbf{n}^\top \ln \left(\frac{\mathbf{n}}{N} \right) + \lambda_2 \left(N - \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} n_{ij} \right) + \sum_{i \in K} R_i \left(\sum_{j \in K} n_{ij} + m_i - S_i \right) + \sum_{j \in K} W_j \left(L m_j - \sum_{i \in K} n_{ij} \right). \quad (I.11)$$

ただし $\lambda_1, \lambda_2, \mu$ はラグランジュ乗数である。これらのラグランジュ関数から導出される、マスター問題・サブ問題の一次の最適性条件を組み合わせることにより、元の最適化問題 [P] の最適性条件が得られる。なお、マスター問題の最適性条件を導出する際に必要なサブ問題の最適値関数の勾配は補題 2 より得られる。

NOTES

注 1) (確定的) FO モデルのポテンシャル関数および均衡解の安定性に関する詳細は、大澤²³⁾、中村・高山²⁴⁾、Osawa and Akamatsu¹⁷⁾、山口・赤松¹⁸⁾ に詳しい。

注 2) 確定的 FO モデルの定式化については、山口・赤松¹⁸⁾ や清水・長江¹⁰⁾などを参照されたい。

注 3) ここでの等価とは、最適化問題の一次の最適性条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) がモデルの均衡条件と一致することを意味する。

注 4) Bregman のバランシング法¹⁴⁾に類するアルゴリズムは、様々な研究分野で古くから提案・利用されてきた。1930 年代にはすでに、交通流や電話のトラフィックの解析に使われたとされる^{25),26)}。交通工学の分野では、二重制約重力モデルの数値解法として有名であり、そこでは伝統的に Bregman のバランシング法と呼ばれることが多い²⁰⁾。数値解析や機械学習の分野でも豊富な研究蓄積があり、そこでは 1960 年代にアルゴリズムの収束証明をした Sinkhorn and Knopp²⁷⁾ にちなみ、Sinkhorn-Knopp アルゴリズム^{27),15)} と呼ばれることが多いようである。

注 5) このような $L^{(k)}$ の決定方法は、Nishioka and Kanno²⁸⁾でも採用されている。

注 6) ラグランジュ乗数の最適解として得られる地代・賃金も正の値をとり、均衡条件と矛盾しないことを確認している。

注 7) ここで、確率的 FO モデルは複数均衡を持つ可能性があることに注意されたい。ここでの議論は、提案アルゴリズムが複数均衡のうちの 1 つを精度よく求解できることを示すものである。

注 8) 山口・赤松¹⁸⁾ は一次元連続空間を対象としている。提案アルゴリズムでは、一次元連続空間を 200 立地点に均等分割した離散空間を対象として実験を行った。

REFERENCES

- 1) Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations, *Regional science and urban economics*, Vol.12, No.2, pp.161–196, 1982.
- 2) Ahlfeldt, G. M., Redding, S. J., Sturm, D. M., and Wolf, N.: The economics of density: Evidence from the berlin wall, *Econometrica: journal of the Econometric Society*, Vol.83, No.6, pp.2127–2189, 2015.
- 3) Monte, F., Redding, S. J., and Rossi-Hansberg, E.: Commuting, migration, and local employment elasticities, *The American economic review*, Vol.108, No.12, pp.3855–3890, 2018.
- 4) Heblich, S., Redding, S. J., and Sturm, D. M.: The making of the modern metropolis: evidence from london.
- 5) 杉本達哉, 高山雄貴, 高木朗義: 集積の経済を考慮した都市経済分析手法の開発, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.78, No.4, pp.166–177, 2022. [Sugimoto, T., Takayama, Y. and Takagi, A.: Development of an urban economic analysis method that considers agglomeration economies, *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol.78, No.4, pp.166–177, 2022.]
- 6) Zhang, W. and Zhang, M.: Incorporating land use and pricing policies for reducing car dependence: Analytical framework and empirical evidence, *Urban studies*, Vol.55, No.13, pp.3012–3033, 2018.
- 7) Zhang, W. and Kockelman, K. M.: Congestion pricing effects on firm and household location choices in monocentric and polycentric cities, *Regional science and urban economics*, Vol.58, pp.1–12, 2016.
- 8) Zhang, W. and Kockelman, K. M.: Optimal policies in cities with congestion and agglomeration externalities: Congestion tolls, labor subsidies, and place-based strategies, *Journal of urban economics*, Vol.95, pp.64–86, 2016.
- 9) 秋本克哉, 赤松隆: 二次元空間 Fujita and Ogawa (1982) モデルの数値解法の開発, 土木計画学研究・講演集, Vol.56, pp.11, 2017. [Akimoto, K. and Akamatsu, T.: Nijigenkuukan Fujita and Ogawa (1982) model no suchi-kaihou no kaihatsu, *Proceedings of infrastructure planning*, Vol.56, pp.11, 2017.]
- 10) 清水廉, 長江剛志: 二次元空間を対象とした大規模な二主体集積経済モデルの効率的解法, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.76, No.3, pp.223–235, 2020. [Shimizu,

- R. and Nagae, T.: An efficient solution method for a large-scale two-dimensional agglomeration model with multiple type of agents, *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol.76, No.3, pp.223–235, 2020.]
- 11) Heikkila, E. J. and Wang, Y.: Fujita and Ogawa revisited: An Agent-Based modeling approach, *Environment and Planning, B, Planning & design*, Vol.36, No.4, pp.741–756, 2009.
 - 12) Delloye, J., Peeters, D., and Thomas, I.: On the morphology of a growing city: A heuristic experiment merging static economics with dynamic geography, *PLoS one*, Vol.10, No.8, pp.e0135871, 2015.
 - 13) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, December 2010.
 - 14) Bregman, L. M.: The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol.7, No.3, pp.200–217, 1967.
 - 15) Cuturi, M.: Sinkhorn distances: Lightspeed computation of optimal transport.
 - 16) Ghadimi, S. and Lan, G.: Accelerated gradient methods for nonconvex nonlinear and stochastic programming, *Mathematical Programming. A Publication of the Mathematical Programming Society*, Vol.156, No.1–2, pp.59–99, 2016.
 - 17) Osawa, M. and Akamatsu, T.: Equilibrium refinement for a model of non-monocentric internal structures of cities: A potential game approach, *Journal of economic theory*, Vol.187, pp.105025, 2020.
 - 18) 山口修平, 赤松隆: 複数都心形成モデルの確率安定性解析-線分都市 vs. 円周都市-, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.75, No.2, pp.109–127, 2019. [Yamaguchi, S. and Akamatsu, T.: Stochastic stability analysis of a model of polycentric urban configurations: linear city vs. circular city, *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol.75, No.2, pp.109–127, 2019.]
 - 19) 土木学会: 交通ネットワークの均衡分析-最新の理論と解法, 丸善, 1998. [The Japan Society of Civil Engineers: *koutuu-network no kinnkoubunseki saishinn no riron no kaihou*, Maruzenn, 1998.]
 - 20) Lamond, B. and Stewart, N. F.: Bregman’s balancing method, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.15, No.4, pp.239–248, 1981.
 - 21) Nesterov, Y.: A method for unconstrained convex minimization problem with the rate of convergence $O(1/k^2)$, *Doklady an ussr*, Vol.269, pp.543–547, 1983.
 - 22) Wang, W. and Lu, C.: Projection onto the capped simplex, arXiv, <http://arxiv.org/abs/1503.01002>, 2015.
 - 23) 大澤実: 集積経済モデルの数理解析とその周辺, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.74, No.5, pp.I.19–I.36, 2018. [Osawa, M.: An invitation to economic theories of spatial pattern formation: fruits of analysis in racetrack economy, *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol.74, No.5, pp.I 19–I 36, 2018.]
 - 24) 中村孝一, 高山雄貴: 企業と家計の相互作用を考慮した都心形成モデルの開発, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.74, No.5, pp.I.555–I.569, 2018. [Nakamura, K. and Takayama, Y.: Development of an agglomeration model considering interactions between firms and households, *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol.74, No.5, pp.I 555–I 569, 2018.]
 - 25) Bregman, L. M.: Proof of the convergence of sheleikhovskii’s method for a problem with transportation constraints, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol.7, No.1, pp.191–204, January 1967.
 - 26) Kruithof, J.: Telefoonverkeersrekening, *De Ingenieur*, Vol.52, pp.15–25, 1937.
 - 27) Sinkhorn, R. and Knopp, P.: Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol.21, No.2, pp.343–348, 1967.
 - 28) Nishioka, A. and Kanno, Y.: Accelerated projected gradient method with adaptive step size for compliance minimization problem, *JSIAM Letters*, Vol.13, pp.33–36, 2021.

(Received ?? ??, 2022)

(Accepted ?? ??, 2022)

A FAST ALGORITHM FOR FUJITA-OGAWA MODEL IN DISCRETE TWO-DIMENSIONAL SPACE

Takara SAKAI, Masanao WAKUI, and Takashi AKAMATSU

This study proposes an efficient algorithm for the Fujita-Ogawa (FO) model in large-scale discrete space. We first generalize the choice behaviors of households and firms using the random utility theory (logit model) and introduce a stochastic FO model, which includes the original FO model as a special case. Subsequently, we reveal that this stochastic FO model has an equivalent optimization problem. We then transform the equivalent problem into a hierarchical optimization problem consisting of a master problem for firms and a subproblem for households. The subproblem, which determines the commuting pattern of households, has the structure of an optimal transport problem with an entropy regularization term. The master problem, which determines the location pattern of firms, is a nonconvex programming problem with constraints. By exploiting these mathematical structures, we propose a hierarchical optimization algorithm composed of the balancing method for the subproblem and the accelerated gradient method for the master problem. Finally, numerical experiments verify the efficiency and accuracy of the proposed method.