高次群論と代数曲線

高村茂 *　京都大学理学研究科数学教室

2025 年 10 月 16 日

概 要

トポロジーや代数幾何では、交点理論や退化理論（レフシェッツ束など）が展開されています。著者の構築している高次群論では、（任意の）群を「幾何的な対象」として扱うことができて、独特な “交点理論” や “退化理論” が展開できます—非可換な群に対してさえ、代数幾何の理論に対応するような理論が成り立っています。これは一種の “非可換代数幾何” ですが、一般に流布している非可換代数幾何とはまったく異なります。本稿では高次群論の “交点理論” を概説します。

1　序　高次群論のビジョンの着床から第一ステージへ

本稿では、時系列的に高次群論の一端を解説します。まず、“高次” が何を意味するかということから始めます。われわれの観点では古典的な群論は低次（2 次以下）の理論です—群 G の元 a は 0 次（スカラー)、部分群 H やコセット aH は 1 次、また両側コセット KaH は 2 次。これらを「高次化」した n 次の対象 $(n = 2, 3, 4, \dots)$ である部分群積（**セクト**）$H_1H_2 \cdots H_n$, コセット積（**クラン**）$a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n$, さらにずっと一般に群の部分集合の積（**フロック**）$S_1S_2 \cdots S_n$ を高次群論では考察します。そして、これらに基づいて群論全般を幾何学化するのが主眼です—哲学的には、一次式の理論である線形代数（内積を込めると二次式）から高次式の理論である代数幾何へ移行することの非可換版。

高次群論は、著者が手探りでゼロから創り始めて、次第に「形」になりましたが [Ta10]、その前段として助走期間が長らく続きました [高村 5]。そもそも高次群論に至る “問題意識” が著者に芽ばえたのは、今からずっとさかのぼる大学生の頃、群論の教科書と代数幾何の教科書を読んでいて、似た形の公式があるのに気づいたときです： 両側コセット HaK の位数公式と、平面代数曲線 C と D の交点に関するベズーの定理の特別な場合（すべての交点が同じ交差重複度を持つとき)：

代数幾何	群論
ベズーの定理の特別な場合	両側コセットの位数公式
$\deg C \deg D = n\lvert C \cap D\rvert$	$\lvert H\rvert\lvert K\rvert = m\lvert H \cap K^a\rvert$
ここで n は共通の交差重複度	ここで $m := \lvert HaK\rvert$, $K^a := aKa^{-1}$

（注：とくに a が単位元のとき、位数公式 $|H||K| = m|H \cap K|$ $(m := |HK|)$ は $\deg C \deg D = n|C \cap D|$ に酷似しています。）

上の表の二つの公式を見比べていると、**群論の背後に「未知の幾何」が隠れているように思われました。** ベズーの公式の一般的な場合に対応する、群論の “未知の公式” があるのではないか、そしてそれは群に対する “交点理論” があることを示唆しているのではないか、さらに群に対する “Chow ring” のようなものがあるのではないか、と思いました。これが、著者の脳裏に「高次群論のビジョン」が着床した瞬間です。

*e-mail: `takamura@math.kyoto-u.ac.jp`

Keywords: 高次構造, ベズー型定理, 交点理論, 組み合わせ公式, ファイブレーション, 群作用

比較　整数論の 2 大理論である類体論や岩澤理論は、思想的に代数曲線論をモデルにしています—それぞれ代数曲線のアーベル被覆およびヤコビ多様体とのアナロジーを追究。高次群論も思想的に代数曲線論をモデルにしています—交差理論やレフシェッツ束とのアナロジーを追究。

さて、両側コセット HaK の位数公式の一般化は既存の群論には存在しませんので、まずはそれが何であるべきかを考えていきます—必然的に、既存の群論からハミ出していきます。HaK の一般化として、a を G の任意の部分集合 A で置き換えた $HAK = \{hak : a \in A\}$ を考えます。これは古典的な群論からはハミ出した対象です。ですが、HAK は単なる集合ではなく、"両側作用" $H \curvearrowright HAK \curvearrowleft K$ を持ちます。これは、H と K の左右からの掛け算で与えられます：

$$hak \in HAK \longmapsto (uh)a(kv) \in HAK, \quad (u \in H,\, v \in K). \tag{1.1}$$

この両側作用の軌道分解として、両側コセット分解 $HAK = \coprod_{i\in I} H\alpha^{(i)}K$ が得られます。このとき、各 $H\alpha^{(i)}K$ に対して、**重複度** $m^{(i)}$（自然数）が定義されます（後述）。これを定義するためには、単に HAK そのものだけを考えるのではなく、HAK の "上部構造" **シナジー** $\pi : H \times A \times K \to HAK$, $\pi(h,a,k) = hak$ を導入します—これがベズー型定理の定式化で最大のポイントです。実際、シナジーは、代数多様体の上部構造である「層」に相当する役割を果たします—高次群論における重複度 $m^{(i)}$ の定義はシナジーを用いてなされ、代数幾何では交差重複度の "厳密な" 定義は層を用いてなされる。ちなみに、古典的代数幾何と現代的代数幾何を分かつ分水嶺は、上部構造「層」の導入で、現代的代数幾何はこれを駆使して、精密かつ厳密な議論を行います。われわれの場合、上部構造「シナジー」の導入が、古典的な群論と高次群論を分かつ分水嶺になっています。

ポイント　群論に「上部構造」を導入すると、今までの群論の射程外のことが可能になる。

実際、上部構造を使って一般の場合のベズーの定理に対応する「ベズー型定理」を [Ta10] で示しました。並べて表にしておきます。表では、平面代数曲線 C と D の交点たちの交差重複度の集合を $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ とし、交差重複度が n_j である交点の個数を $|C \cap D|_j$ と書いています。

代数幾何	高次群論
ベズーの定理	ベズー型定理 [Ta10]
$\deg C \deg D = \sum_{j=1}^{k} n_j \lvert C \cap D\rvert_j$	$\lvert H\rvert\lvert A\rvert\lvert K\rvert = \sum_{i\in I} m^{(i)} \lvert H \cap K^{\alpha^{(i)}}\rvert$

話を HAK の "上部構造" シナジー $\pi : H \times A \times K \to HAK$, $\pi(h,a,k) = hak$ に戻します。高次群論において、これの果たす役割は、代数幾何において代数多様体の上部構造「層」の果たす役割に相当します—不変量やそれらの間の関係式を導く。しかしそうは言っても、層とシナジーの構造はまったく違います—そもそも、層は局所データと大局データを結び付けることにより定義されていますが、シナジーは、群のミクロ積 $h, a, k \mapsto hak$ とマクロ積 $H \times A \times K \to HAK$ を結び付けて定義されていますので、当然と言えば当然です。では、

シナジーの構造の記述はどうすればいいでしょうか？

層と違って、シナジーは群由来なので、群に根差した手法を使うのが自然です。ズバリ言うと、**「同変性」を使います。**ここで $H \times A \times K$ と HAK には、左から H が、右から K が掛け算で作用します（両側作用）：

$$H \curvearrowright H \times A \times K \curvearrowleft K, \qquad H \curvearrowright HAK \curvearrowleft K. \tag{1.2}$$

具体的には、$u \in H,\ v \in K$ に対して、

$$(h,a,k) \longmapsto (uh,a,kv), \qquad hak \longmapsto uhakv. \tag{1.3}$$

このとき、シナジー $\pi : H \times A \times K \to HAK$ は (H,K)-同変です。実際、

$$\begin{aligned} \pi\bigl(u \cdot (h,a,k) \cdot v\bigr) &= \pi\bigl(uh,\ a,\ kv\bigr) = uhakv \\ &= u \cdot \pi(h,a,k) \cdot v. \end{aligned} \tag{1.4}$$

シナジー π の (H,K)-同変性を次の図式で表します：

$$\begin{array}{c} H \curvearrowright H \times A \times K \curvearrowleft K \\ \Big\downarrow \pi \\ H \curvearrowright HAK \curvearrowleft K. \end{array} \tag{1.5}$$

次に、両側 (H,K)-作用に関する、$H \times A \times K$ と HAK の軌道分解を考えます：

$$H \times A \times K = \coprod_{a \in A} H \times \{a\} \times K, \qquad HAK = \coprod_{i \in I} H\alpha^{(i)}K \quad (\alpha^{(i)} \in A). \tag{1.6}$$

（後者は両側コセット分解です。）このとき、シナジー π の (H,K)-同変性より、π は軌道分解を軌道分解に写します：

$$\begin{array}{c} \coprod_{a \in A} H \times \{a\} \times K \\ \Big\downarrow \pi \\ \coprod_{i \in I} H\alpha^{(i)}K. \end{array} \tag{1.7}$$

ここで、$H \times A \times K$ の各 (H,K)-軌道 $H \times \{a\} \times K$ はある (H,K)-軌道（両側コセット）$H\alpha^{(i)}K\,(= HaK)$ に写されます：

$$\begin{array}{c} H \times \{a\} \times K \\ \Big\downarrow \pi|_{H \times \{a\} \times K} \\ H\alpha^{(i)}K\,(= HaK). \end{array} \tag{1.8}$$

これのファイバーの描像は単純です：

補題 1.1 ([Ta10])**.** 任意の $x \in H\alpha^{(i)}K$ 上のファイバー $\pi|_{H \times \{a\} \times K}^{-1}(x)$ は $H \cap K^{\alpha^{(i)}}$ に bijective である。

$\boxed{\text{**ポイント**　シナジーを両側同変な写像とみて軌道分解して、シナジーを単純な写像に分解する。}}$

定義 1.2. (1) $H \times \{a\} \times K$ が両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ **の上にある**とは、$\pi(H \times \{a\} \times K) = H\alpha^{(i)}K$, つまり $H\alpha^{(i)}K = HaK$ が成り立つとき。

(2) 各両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ に対して, その上にある $H \times \{a\} \times K$ の個数（つまり $HaK = H\alpha^{(i)}K$ を満たす $a \in A$ の個数）を $H\alpha^{(i)}K$ の**サテライト指数**と言い、$w^{(i)}$ で表す。さらに、$m^{(i)} := w^{(i)}|H\alpha^{(i)}K|$ とおき、$H\alpha^{(i)}K$ の**重複度**と言う。

さて、HAK が有限の場合（たとえば、G が有限群のとき)、両側コセット分解は有限和です。このとき、（補題 1.1 を援用した）$H \times A \times K$ の元の個数の数え上げ議論により、次が示されます：

定理 1.3 (**ベズー型定理** [Ta10])**.**

$$|H||A||K| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H \cap K^{\alpha^{(i)}}|. \tag{1.9}$$

補足 1.4. $H\alpha^{(i)}K$ の重複度 $m^{(i)}$ は、$H\alpha^{(i)}K$ の上にある[1] $H \cap K^{\alpha^{(i)}}$ の個数と解釈できる。

$\boxed{\text{**ポイント**　シナジーの幾何的構造から、組み合わせ情報を引き出す。}}$

[1]つまり、π により $H\alpha^{(i)}K$ の元に写される。

2　高次群論の第二ステージ：　相乗位数公式

以上述べてきたことは高次群論の第一段階で、[Ta10] で示しましたが、さらに理論を押し進めて [Ta11] ではベズー型定理の一般化であるさまざまな公式を導出しました。まず、上の HAK の A を G の（任意の）部分集合の積 $A_1A_2\cdots A_l$ で置き換えた $HA_1A_2\cdots A_lK$（**ギルド**）を考えます。HAK と同様に、これは両側コセット分解 $HA_1A_2\cdots A_lK=\coprod_{i\in I}H\alpha^{(i)}K$ をもち、各 $H\alpha^{(i)}K$ の**重複度** $m^{(i)}$ が定義されます。ここで $m^{(i)}$ は、($HA_1A_2\cdots A_lK$ の上部構造である) **普遍**[2]**シナジー**

$$\begin{aligned}\pi: H\times A_1\times A_2\times\cdots\times A_l\times K &\longrightarrow HA_1A_2\cdots A_lK,\\ (h,a_1,a_2,\ldots,a_l,k)&\longmapsto ha_1a_2\cdots a_lk\end{aligned}\tag{2.1}$$

を経由して定めます [Ta11]。$l=1$ のとき、A_1 を A と書き、HAK を**単純ギルド**と言い, $\pi:H\times A\times K\to HAK$ を**単純シナジー**と言います。これらはすでに扱いました。一般の l の場合、まず普遍シナジー $\pi:H\times A_1\times A_2\times\cdots\times A_l\times K\to HA_1A_2\cdots A_lK$ を次のように 2 つのシナジー（プライマリーとブースター）の合成写像に分解します：

$$\begin{array}{c} H\times A_1\times A_2\times\cdots\times A_l\times K\\ \Big\downarrow \varphi\text{: ブースター・シナジー}\\ H\times A_1A_2\cdots A_l\times K\\ \Big\downarrow \psi\text{: プライマリー・シナジー}\\ HA_1A_2\cdots A_lK.\end{array}\tag{2.2}$$

ここで、$A:=A_1A_2\cdots A_l$ とおくと、$\psi:H\times A\times K\to HAK$ は単純シナジーであることに注意します。図式 (2.2) と単純シナジーに関する結果を援用して、普遍シナジー $\pi\,(=\psi\circ\varphi)$ の構造を決定できます。さらに、$H\times A_1\times A_2\times\cdots\times A_l\times K$ に対して元の個数の数え上げ議論を適用して、次が示されます：

定理 2.1 (相乗位数公式 [Ta11]).

$$|H||A_1||A_2|\cdots|A_l||K|=\sum_{i\in I}m^{(i)}|H\cap K^{\alpha^{(i)}}|.\tag{2.3}$$

特性類的な見方

相乗位数公式を「特性類的な」視点で解釈してみましょう。**ギルド** $HA_1A_2\cdots A_lK$ **のオイラー数**を等式 (2.3) の左辺で定義します。つまり、

$$\chi(HA_1A_2\cdots A_lK):=|H||A_1||A_2|\cdots|A_l||K|.\tag{2.4}$$

また、(2.3) の右辺に基づいて、普遍シナジー $\pi:H\times A_1\times A_2\times\cdots\times A_l\times K\to HA_1A_2\cdots A_lK$ の**因子 (divisor)** を次で定めます（$X_{H\cap K^{\alpha^{(i)}}}$ は “形式的なシンボル” で、和は “形式和” です）：

$$\mathrm{div}(\pi):=\sum_{i\in I}m^{(i)}X_{H\cap K^{\alpha^{(i)}}}.\tag{2.5}$$

これは代数曲線上の因子のアナロジーですが、あとで導入する「相乗チャウ環」の定義にも現れます。さて、**因子の次数 (degree)** を次で定めます：

$$\deg(\pi):=\sum_{i\in I}m^{(i)}|H\cap K^{\alpha^{(i)}}|.\tag{2.6}$$

[2] 非普遍シナジーの定義は [高村 5] 参照。その構造は [Ta11] で詳しく描写されている。

すると、相乗位数公式 (2.3) は次のようにスッキリと表せます：

$$\chi(HA_1A_2\cdots A_lK) = \deg(\pi). \tag{2.7}$$

代数幾何	群論
代数曲線 C	ギルド $HA_1A_2\cdots A_lK$
オイラー数 $\chi(C)$	オイラー数 $\chi(HA_1A_2\cdots A_lK)$
接ベクトル束 $\pi : TC \to C$	普遍シナジー $\pi : H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_l \times K \to HA_1A_2\cdots A_lK$
$\chi(C) = \deg(\pi)$	$\chi(HA_1A_2\cdots A_lK) = \deg(\pi)$

部分群積（セクト）への応用

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ を群 G の部分群とし、セクト $H_1H_2\cdots H_n$ を考えます。これに対しては、相乗位数公式 (2.3) は次で与えられます：

$$|H_1||H_2|\cdots|H_n| = \sum_{i\in I} m^{(i)}|H_1 \cap H_n^{\alpha^{(i)}}|. \tag{2.8}$$

この公式は、普遍シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \to H_1H_2\cdots H_n$ から導かれたものです。このシナジーを置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を使って "変形して" みます：

$$\begin{aligned} \pi_\sigma : H_{\sigma(1)} \times H_{\sigma(2)} \times \cdots \times H_{\sigma(n)} &\longrightarrow H_{\sigma(1)}H_{\sigma(2)}\cdots H_{\sigma(n)}, \\ (h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, \ldots, h_{\sigma(n)}) &\longmapsto h_{\sigma(1)}h_{\sigma(2)}\cdots h_{\sigma(n)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで、一般に $H_1H_2\cdots H_n$ と $H_{\sigma(1)}H_{\sigma(2)}\cdots H_{\sigma(n)}$ の両側コセット分解はまったく異なります。後者は次のような形をしています：

$$H_{\sigma(1)}H_{\sigma(2)}\cdots H_{\sigma(n)} = \coprod_{i\in I_\sigma} H_{\sigma(1)}\alpha_\sigma^{(i)}H_{\sigma(n)}.$$

また、各両側コセット $H_{\sigma(1)}\alpha_\sigma^{(i)}H_{\sigma(n)}$ の重複度も σ に依存します。これを $m_\sigma^{(i)}$ と書くことにします。すると、相乗位数公式 (2.3) は

$$|H_{\sigma(1)}||H_{\sigma(2)}|\cdots|H_{\sigma(n)}| = \sum_{i\in I_\sigma} m_\sigma^{(i)}|H_{\sigma(1)} \cap H_{\sigma(n)}^{\alpha_\sigma^{(i)}}|. \tag{2.10}$$

ここで $|H_{\sigma(1)}||H_{\sigma(2)}|\cdots|H_{\sigma(n)}| = |H_1||H_2|\cdots|H_n|$ ゆえ

$$|H_1||H_2|\cdots|H_n| = \sum_{i\in I_\sigma} m_\sigma^{(i)}|H_{\sigma(1)} \cap H_{\sigma(n)}^{\alpha_\sigma^{(i)}}|, \tag{2.11}$$

ここで、置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は任意なので、$|H_1||H_2|\cdots|H_n|$ を表す公式がザクザクと得られました ($n!$ 個)。しかしながら、σ が "反転置換" のとき、つまり $\sigma(1) = n, \sigma(2) = n-1, \ldots, \sigma(i) = n-i+1, \ldots, \sigma(n) = 1$ のとき、π と π_σ はシナジーとして同型になり、それらが生み出す相乗位数公式は一致します。よって、異なる公式の個数は $n!$ ではなく、$n!/2$ 個です。たとえば、$n = 3$ の場合、"反転ペア" は次の 3 つなので、$|H_1||H_2||H_3|$ を表す相乗位数公式は 3 つです。

ペア 1　$\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \to H_1H_2H_3$,　$\pi_\sigma : H_3 \times H_2 \times H_1 \to H_3H_2H_1$,

ペア 2　$\pi : H_1 \times H_3 \times H_2 \to H_1H_3H_2$,　$\pi_\sigma : H_2 \times H_3 \times H_1 \to H_2H_3H_1$,

ペア 3　$\pi : H_2 \times H_1 \times H_3 \to H_2H_1H_3$,　$\pi_\sigma : H_3 \times H_1 \times H_2 \to H_3H_1H_2$.

“混合型” 相乗位数公式

$|H_1||H_2|\cdots|H_n|$ を表す公式は、上で述べたもの以外にもさまざまなバリエーションがあります—“混合型” 相乗位数公式：

例 2.2. シナジー $\eta_1 : H_1 \times H_2 \times H_3 \to H_1H_2H_3$ とシナジー $\eta_2 : H_4 \times H_5 \times H_6 \times H_7 \to H_4H_5H_6H_7$ を「くっつけた」シナジー η を考えます（下の underbrace は “縮約する・された” 部分を表す）：

$$\eta : \underbrace{H_1 \times H_2 \times H_3} \times \underbrace{H_4 \times H_5 \times H_6 \times H_7} \to \underbrace{H_1H_2H_3}\underbrace{H_4H_5H_6H_7}. \tag{2.12}$$

これから “混合型” 相乗位相公式が得られます:

$$|H_1||H_2||H_3||H_4||H_5||H_6||H_7| = \Big(\sum_{i \in I} m^{(i)}|H_1 \cap H_3^{\alpha^{(i)}}|\Big)\Big(\sum_{j \in J} n^{(j)}|H_4 \cap H_7^{\beta^{(j)}}|\Big). \tag{2.13}$$

これを、数字 $1,2,3$ の置換 σ と数字 $4,5,6,7$ の置換 τ を使って ‘変形して’ 得られる次の “混合型” 相乗位相公式もあります：

$$|H_1||H_2||H_3||H_4||H_5||H_6||H_7| = \Big(\sum_{i \in I_\sigma} m_\sigma^{(i)}|H_{\sigma(1)} \cap H_{\sigma(3)}^{\alpha_\sigma^{(i)}}|\Big)\Big(\sum_{j \in J_\tau} n_\tau^{(j)}|H_{\tau(4)} \cap H_{\tau(7)}^{\beta_\tau^{(j)}}|\Big). \tag{2.14}$$

比較 2.3. 部分群の位数に関する公式は、古典的な群論にもあります (たとえばシローの定理：p シロー群 S_p に対し、$|S_p| \equiv 1 \bmod p \equiv 1$). しかしながら、部分群たちの「位数積」$|H_1||H_2|\cdots|H_n|$ に関するシステマティックな公式は今までなかったようです。著者の得た「位数積」に関する一連の公式は、シナジーを経由して定式化・導出されるため、高次群論によって初めて可能になりました。

ポイント　高次群論により位数積 $|H_1||H_2|\cdots|H_n|$ を表す公式がたくさん得られる。

3　高次群論の第三ステージ：　相乗チャウ環 (synergic Chow ring)

前節で見たように、部分群の位数積 $|H_1||H_2|\cdots|H_n|$ を「位数たちの ‘線形結合’」（重み付き位数和）で表す相乗位数公式はさまざまなバリエーションがあります—次のような形の “積–和” 型公式や、より一般には (2.13), (2.14) のような “混合型” 相乗位相公式：

$$\underbrace{|H_1||H_2|\cdots|H_n|}_{\text{部分群の位数たちの積}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{l} m_\sigma^{(i)}|H_1 \cap H_n^{\alpha_\sigma^{(i)}}|}_{\text{部分群の位数たちの ‘線形結合’}}. \tag{3.1}$$

これらは、位数たちのあいだの arithmetic relations（算術的関係式）とみなせます。

ポイント　群 G の有限部分群たちの位数の集合は、単なる自然数の集まりではなく、arithmetic relations をたくさん持つ算術的に興味深い集合である。

[Ta13] では、これら arithmetic relations を「関係式」に持つ環として、高次群論版のチャウ環 (Chow ring) を構成し、その構造を描写しました。まず、群 G の有限部分群全体のなす集合を $\mathrm{Sgr}_{\mathrm{fin}}(G)$ で表します。$H \in \mathrm{Sgr}_{\mathrm{fin}}(G)$ に対し、形式的な記号 “シンボル”X_H を対応させ、X_H ($H \in \mathrm{Sgr}_{\mathrm{fin}}(G)$) たちが生成する $\mathbb{Z}$-algebra を考えます。ここで、X_H と X_K の積は $X_H \cdot X_K := |HK|X_{H\cap K}$ で定めます—これは両側コセットの位数公式 $|H||K| = |HK||H \cap K|$ に対応しています。次に、この $\mathbb{Z}$-algebra へ関係式を、相乗位数公式（およびそのバリエーション）に基づいて入れます。こうして得られた $\mathbb{Z}$-algebra は代数幾何のチャウ環[3](Chow ring) の類似物になっています。

[3]代数多様体 V のチャウ環 $Ch(V)$ は、V の部分代数多様体たちで（形式的に）生成される $\mathbb{Z}$-algebra を有理同値で割ってできる環。

定義 3.1. 上で構成した環を、群 G の**相乗チャウ環** (synergic Chow ring) と言い、$SCh(G)$ と表す。

この環は、群 G の有限部分群たちの交わりの高次群論の観点からの complexity を反映していて、群 G の組み合わせ的性質が encode されています。なお、群 G が非可換でも、相乗チャウ環 $SCh(G)$ は可換なので扱いやすくなっています。また、$SCh(G)$ は群 G の新しい不変量になっています。

4 まとめ： 代数から幾何へ、そして組み合わせへ。さらに再び代数へ

高次群論の理論の展開の流れは、次のように “三段跳び” になっています：

ホップ　群の高次対象（これは「代数」）に「幾何」を導入する（シナジー）

$\longrightarrow$ ステップ 「幾何」から「組み合わせ情報」を取り出す（相乗位数公式）

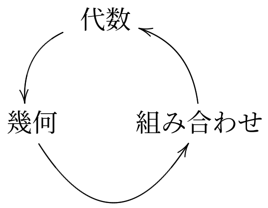
$\longrightarrow$ ジャンプ 「組み合わせ情報」から「代数」を取り出す（相乗チャウ環）。

つまり、

代数（群の高次対象）$\longrightarrow$ 幾何（シナジー）$\longrightarrow$ 組み合わせ（相乗位数公式）

$\longrightarrow$ 代数（相乗チャウ環）.

ポイント　“代数” から出発して “代数” へ戻る「巡回」が起こっている。



ただし、「巡回している」と言っても、「元に戻って」くるわけではなく、「螺旋型に上昇して」います。つまり、積み重ねた思索が発酵し、ステージが一段上がっています—研究では「発酵」に達するまでの持久戦を制することが核心部分です。

群論の片翼性の克服に向けて

代数学の二本柱は群論と可換環論ですが、後者は「幾何」を持っています—代数幾何。一方、群論は（群全般に対して成り立つ）「幾何」を持ってはいません。

可換環論が（代数と幾何の）両翼的なのに対して、群論は（代数だけの）片翼的である。

可換環論と代数幾何は手をたずさえて発展してきました。これは可換環論を幾何学化したグロタンディークのスキーム論に基づいています。しかし、群論にはこのような理論がありません。**「いったいなぜなのか？」** 学生時代からこのことがずっと気になってきました。誰に尋ねても返ってくるのは「群は一般に非可換なので、群論に対して『代数幾何』に相当するようなものがあるわけない」という意見でした。しかし、**非可換だからこそ、群論の幾何的側面を投影した「幾何」を構築することは—もしそれができれば、非可換なものに幾何的直観を持ち込めるので—重要なミッションであると私には思えました。**これが、高次群論の構築において私の根底にある終始一貫した志向です（理論形成の経緯については [高村 5], [高村 3] 参照）。ともあれ、「無」から「有」を生み出すためには、それなりの時間とエネルギー、さらに覚悟を要しましたが、高次群論はこの段階を乗り越えて、ようやく「有」から「有 + α」を生み出す段階に差しかかったように思われます。そこには未知の数学の芽が数多く眠っていることを期待しつつ、ペンを置きます。

参考文献

[EiHa] D. Eisenbud, and J. Harris, *The Geometry of Schemes,* Springer-Verlag (1999)

[Ful] W. Fulton, *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry,* AMS. (1984)

[HiSaTa] R. Hirakawa, K. Sasaki, and S. Takamura, *Poset-blowdowns of generalized quaternion groups,* Int. J. Group Theory 13 (2) (2024), 133–160

[HiTa1] R. Hirakawa, and S. Takamura, *Degenerations of Riemann surfaces associated with the regular polyhedra and the soccer ball,* J. Math. Soc. Japan **69** No.3 (2017), 1213–1233

[HiTa2] ———, *Quotient families of elliptic curves associated with representations of dihedral groups,* Publ. RIMS. **55** no.2 (2019), 319–367

[HiTa3] ———, *Linear quotient families and stabilizer posets,* Kodai Math. J. **48** (2025) 145–177

[高村 1] 高村茂, *Representations of finite groups, quotient families, and regular polyhedra* (in Japanese), Symposium on topology of manifolds (2014), 7 ページ
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kiyonok/ym2014/takamura.pdf`

[高村 2] ———, “商族の幾何学 (有限群の作用と表現, ファイブレーション, モジュライ空間) ”, 『第 14 回城崎新人セミナー』(2017 年 2 月), 13 ページ
`https://drive.google.com/file/d/1ieFR4Cof5Rb69nUutaRxYoxUEHIAB8hC/view`

[高村 3] ———, “群の高次構造とその同伴ファイブレーション—高次群論とその幾何学事始め”, 研究集会『変換群の幾何とトポロジー』 (2023 年 6 月), 数理研講究録 2276 (2024), pp.94–117
`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2276-11.pdf`

[高村 4] ———, “高次群論とその幾何学”, 研究集会 『有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究』 (2023 年 12 月), 数理研講究録 2287 (2024), pp.105–119
`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2287-14.pdf`

[高村 5] ———, *On higher group theory and its geometry* (in Japanese), 松本幸夫先生 80 歳記念研究集会 『多様体のトポロジーの進展』 (2024 年 11 月), 10 ページ
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/progress/takamura.pdf`

[高村 6] ———, “群の高次構造とその幾何学”, 研究集会 『有限群のコホモロジー論とその周辺』 (2024 年 2 月), 数理研講究録 2306 (2025), pp.86–101
`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2306-13.pdf`

[高村 7] ———, “高次群論とその幾何学 II”, 研究集会 『有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究』 (2024 年 12 月), 数理研講究録 (2025)

[高村 8] ———, “高次群論とその幾何学 III”, 研究集会 『変換群論の新しい展開』 (2025 年 5 月), 数理研講究録

[Ta1] Shigeru Takamura, *Towards the classification of atoms of degenerations, I,* (*Splitting criteria via configurations of singular fibers*), J. Math. Soc. Japan **56** (1) (2004) 115–145

[Ta2] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, III,* (*Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves*), Springer Lecture Notes in Math. **1886** (2006)

[Ta3] ———, *Linearization of quotient families,* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **26** (2019), 361–389

[Ta4] ———, *Classification of finite groups with birdcage-shaped Hasse diagrams,* Osaka J. Math. **58** (4) (2021), 885–897

[Ta5] ———, *Blowdown maps between subgroup posets,* Tokyo J. of Math. **45** (2) (2022), 467–499

[Ta6] ———, *Prime factorizations of finite groups, I,* Advances in Group Theory and Applications **19** (2024) 1–55

[Ta7] ———, *Prime factorizations of finite groups, II,* Advances in Group Theory and Applications **21** (2025) 11–109

[Ta8] ———, *Prime factorizations of finite groups, III,* (2023), to appear in Advances in Group Theory and Applications

[Ta9] ———, *The orders of subgroup products and coset products,* Transactions on Combinatorics **14** (2025) 223–250

[Ta10] ———, *Bézout type theorem for higher order objects of groups,* (2024), to appear in Osaka J. Math.

[Ta11] ———, *Geometry and combinatorics for higher order objects of groups,* (2025), Preprint

[Ta12] ———, *Lefschetz fibrations for groups and their special fibers,* (2025), Preprint

[Ta13] ———, *Intersection theory for groups and their Chow rings,* (2025), Preprint

[上野] 上野健爾, “現代数学の歩み 60 年　代数幾何学の歩みを中心にして”,
科学基礎論研究 43 巻 1・2 号特集「数学と論理学の 60 年」(2016) p.3–15
`https://www.jstage.jst.go.jp/article/kisoron/43/1-2/43_KJ00010256962/_pdf/-char/ja`