

局在・非局在と量子状態の特異性

山田物理学研究所 山田弘明¹

立命館大学 理工学部 池田研介

abstract: この原稿の目的は、時間発展する一次元量子系の局在・非局在状態の性質を波動関数のもつ解析性という観点から解釈する点にある。よく知られたアンダーソンモデルやハーパーモデルの局在・非局在状態の意味に対しても新たな視点に基づき解釈し直すことになる。まず、外部からの摂動（他自由度との結合に相当）の初期状態に対する局在・非局在状態の敏感性の違いを基に、局在・非局在転移の再解釈をする。さらに、運動量空間における変数の複素化により量子波束が局在に至る過程や局在系の複素ダイナミクスを調べ、局在状態に内在している非局在化部分のダイナミクスを顕在化させる試みを通して、非局在状態の意味や局在との繋がりに対する再解釈をする。

Keywords: 量子輸送 (Quantum transport)、ランダム系 (disordered systems)、アンダーソン局在 (Anderson localization)、量子カオス (Quantum chaos)、局在状態 (localized states)

1 はじめに

著者らは物性研究に公表した前稿において（本稿では前稿 [I], [II] として引用する）において、一次元アンダーソンモデルやハーパーモデルの局在固有状態の解析性に関する特徴づけや解釈を行った。これに引き続き、量子波束のダイナミクスにおける局在・非局在状態や拡散現象（散逸的現象）の存在に対し、複素空間での波動関数の性質に基づく解釈を示すことが本稿での目的である²。その意味では、本稿での計算結果は特に目新しいというものではなく、この解釈を補強するためのものであり、「研究ノート」という側面も持つものである。

前稿 [I] では、特異点をもつ関数に対してパデ解析による診断を適用し、数値的に特異性を検出する方法について議論した [1]。さらに、前稿 [II] では、一次元強結合モデルの、不純物状態、アンダーソン局在状態やハーパーモデルの固有関数に、パデ解析などを使い、不純物状態は安定な孤立極で表され、アンダーソン局在状態やハーパーモデルの局在状態は自然境界を持つ可能性を示唆した [2]。そこでは、自然境界などの 指数関数、ベ

¹責任著者。E-mail:hyamada[at]uranus.dti.ne.jp

²本稿のみでも読み進められるよう、一部の説明は前稿 [1]([I]) と [2]([II]) と重複する部分がある。

キ関数のエンベロープを超えて、ゆらぎの性質（例えば、フラクタル性）が波動関数の解析性という観点が必要であることを指摘した。以下では、一連の研究の動機と経緯を説明しながら、本稿の目的を改めて明確にする。

量子系ではコヒーレントなはずの量子波束が、外場や他自由度との接触といった「自然な摂動」によって容易に古典確率化する [3]。そこでは、この古典確率化により無摂動下では局在に導く量子系の干渉効果が破れ、拡散運動が現れる。このような運動は少数自由度の系で、例えば、古典極限でカオスになるいわゆる量子カオス系や、不規則格子系（ランダム系）できわめてありふれて観察されている。すなわち、自由度の多さに頼らずとも量子状態はそれ自体で不可逆世界を**自発的に**作り出す契機を内包していると考えられる。実際に、この描像を示唆する現象論的証拠を結合カオス系にみることができる [4, 5]。古典的には無視できる \hbar 程度の量子的な微小摂動（結合定数）で、相転移的に二つの系の状態が分離不能に絡み合うことが示されている [6]。また、非有界量子系として次元不ランダム格子系の拡散運動に対して行った数値的時間反転実験では、ある時刻で加える摂動の強度を η とするとき、明らかに摂動強度にある閾値 η_{th} が存在し、この値より小さな摂動に対して系はコヒーレントに振り舞い運動は反転して元に戻ろうとするが、その閾値より大きい摂動に対しては反転直後から記憶は完全に喪失し拡散運動が回復し、波動関数はコヒーレンスのない古典論的拡散運動と化すことがわかる [3, 7, 8, 9]。この閾値の大きさは先の例と同じく \hbar に比例する。

一般に、コヒーレンスの喪失としては、Caldeira-Leggett 模型に代表されるような無限自由度のマクロな環境と相互作用してコヒーレンスを失う量子系を想像しがちである [10]。しかし、そのような消極的なものではなく、上記の結合カオス系の例に見るように量子系は自発的にコヒーレンスを喪失する契機を内包している。前稿 [II] では、これを**脱可干渉性**と表現した。量子系に於ける「脱可干渉性」あるいは「自発的不可逆性」の発生を促すような数理的構造が何かをつきとめたいという動機から、前稿 [II] ではこれらのアンダーソン局在状態やハーバーモデルの局在固有関数の特異な構造をパデ解析や直接法により診断し、自然境界の存在を示唆した [2]。

前稿 [II] で示唆された、アンダーソン局在状態やハーバーモデルの局在状態が複素変数空間で自然境界をもつことは物理的に何を意味するのであろうか。ハーバーモデルで明らかにされたように、波動関数を複素空間に解析接続した時、その収束半径（今の場合は自然境界の境界線上を指す）上での固有関数の構造は局在・非局在状態の波動関数を問わずポテンシャル強度 V に依存しない。つまり、収束半径に接近するという操作は固有関数の指数関数的減衰因子を除去する操作を表しているので、指数関数的減衰部分を増幅され概ね平坦にスケールされた固有関数が、ポテンシャル強度によらない事を示している。ハーバーモデルでは局在状態から臨界値 $V = 1$ の臨界状態においては、実軸自体が自然境界となり、そこでは局在運動が解けて、不可逆的な拡散的運動が起きているという推測をした。この conjecture を具体的に確かめることが、この原稿の目的の一つである。ランダムなポテンシャルの下で起きるアンダーソン局在現象でも同様なことが起きていると推測できる。

推測: 自然境界への接近が波動関数の指数関数的減衰部分を除去することを考えると、よく知られている実空間でのマルチフラクタル構造はまさに自然境界における波動関数の特異性を表していると解釈できる。さらに、高次元ランダム系や多自由度カオス系で観察されている局在・非局在転移は自然境界の実軸への接近として理解できるであろう。局在系では自然境界の発生が普遍的で、それは構造安定、すなわち、系の制御パラメータの変化に対して安定であり、それが系を潜在的に不可逆的にしているという見方が成り立つ。すなわち、潜在的不可逆性をもたらす自然境界の実軸接近による顕在化が局在・非局在転移に対応するというシナリオである。

物理的にはランダム系の局在・非局在転移はよく調べられている³。スケーリング仮説では、一次元、二次元ランダム系では全ての状態が局在し、三次元ランダム系では局在・非局在転移が存在するというものである。[12, 13, 14, 15, 16]。しかし、高次元系、多自由度系においては不明な点も多く、二次元系では非局在状態の存在の可能性に関して未だに論争がある。本稿では、主に時間摂動を伴う一次元ランダム系における局在・非局在現象を解析性という観点から調べることにする。指数関数的局在の中に拡散による非局在化がどのように閉じ込められているのか、具体的には一次元の局在・非局在状態を持つ時間発展波動関数の解析性から局在・非局在転移を見直す。この非局在状態の典型が量子拡散であり、さらに比較のために、素性のよく知られた完全な周期系における時間発展状態 (ballistic 状態) も用いた。

関数の解析性を議論するためには、連続変数が存在する必要がある。本稿では、二つの連続変数をもつ波動関数を調べる。一つは、前稿 [II] でも用いた時間発展演算子に導入した初期位相 θ (θ 表示) である。もう一つは、離散変数であるサイト表示のフーリエ変換である p 表示であり、これはシステムサイズ無限大で連続変数に漸近する。どちらの場合も、有限時間の波動関数が整関数であることは明らかであるが、 $t \rightarrow \infty$ での波動関数の解析性を有限時間内の振る舞いから推測することになる。

θ 表示で量子波束みると、非局在化に伴い、位相の「のた打ち回り」(初期位相敏感性) が観測される。この初期位相依存性の解析として、波動関数の確率振幅のみでなく、直接より敏感な波動関数の位相の変動も調べた。時間無限大に向けて θ 依存性が複雑化し、解析性の変化につながるのかを調べた。特に、波束が非局在化し量子拡散が生じる過程において、波動関数の初期位相に関するゼロ点の数は時間に関し、 \sqrt{t} で増大することを示す。複素ゼロ点の統計性が m -空間分布に直に効き、疑似特異性を生じせしめていることを確認する。この $t \rightarrow \infty$ で生まれる特異性とは、複素 θ 平面に存在すると予想される自然境界である。

また、 p -表示を複素化して局在に至る過程や「複素ダイナミクス」を調べることで、局在状態に内在している非局在化部分のダイナミクスを顕在化でき、非局在状態の意味や局在との繋がりを知ることができる。局在状態の場合、 p -表示での自然境界は局在長の逆数 (リュブノフ指数) で与えられる。例えば、複素化ダイナミクスはこのリュブノ

³近年、ランダム系のシュレーディンガー方程式に非線形性を導入し非局在化への転移に関する研究も多く存在する。実際に、外場中の cold atom などでも実験的な確認もできる [11]。しかし、本稿の局在・非局在転移では非線形項のような無粋なものは想定しないことにする。

フ指数相当分を p -空間で虚軸方向に shift (解析接続) したものになる。非局在化現象には情報散逸を担う部分が含まれているが、複素化はこれを実空間に引きずり出す効果があるとみなせる。

本稿の構成は次のようになる。2節で、いくつかの一次元系の局在・非局在転移と、この論文で扱う一次元系の具体的モデルを説明する。3節で、量子状態の解析性として、波動関数の初期位相に関する敏感性を調べる。4節で、半古典論的考察により波動関数の複素ゼロ点が位相の敏感性を生じせしめている可能性を議論する。特に、4.2節では、位相差の発展過程でエントロピー生成がおきているという解釈を示す。5節では、初期位相に関し解析接続された波動関数とそのゼロ点及び自然境界の関係について考察する。6節では、運動量表示の時間発展波束において自然境界に接近した「複素ダイナミクス」の結果を示しその意味を議論する。7節は全体のまとめと議論である。

付録 A ではグリーン関数による局在・非局在の基本的性質をまとめてある。付録 B ではハーバーモデルの意味を与えてある。付録 C では、自然境界を数値的に探る方法である直接法により局在状態が自然境界を持つことの示唆を示してある。付録 D と付録 E には本文を補強するデータと考察を与えてある。付録 F には、複素ダイナミクスと非エルミート行列との対応を議論してある。

2 局在・非局在転移とモデル

次の一次元強結合モデルのシュレーディンガー方程式で記述される時間依存の量子状態 $\Psi(n, t)$ を考える。

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(n, t)}{\partial t} = \Psi(n+1, t) + \Psi(n-1, t) + V(n, t)\Psi(n, t), n = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

$V(n, t)$ はサイト n でのポテンシャルエネルギーであり、局在と非局在転移を起こすタイプのものを取り扱う。以下では、一般に n_0 を局在中心とした $\Psi_t(n) = \Psi(n, t)$ 等の表記を用いることもある。初期局在波束として、 $\Psi(n, t=0) = \delta_{n, n_0}$ を用いる。6節で、局在状態の波束に関する複素ダイナミクスから改めて局在の意味を探る予定である。そのためにも、本稿で用いるモデルに則して、基本的ではあるが局在状態のイメージを追っていくことから始める。

2.1 アンダーソン局在と外摂動系の局在・非局在転移

まず、 $V(n, t) = V(n)$ とし、 $V(n) \in [-W, W]$ の一様分布である静的ランダム系の場合を考える。⁴ 図 1、図 2 に一次元ランダム系の場合の局在波束の平均二乗変位と空間分布を示す。図 2 から大よそ 20-30 サイト内で局在していることがわかる。対数スケールで見ると、波束の中心から 400 サイト位まで指数関数的に減衰し、その外側は計算精度 (倍精度) の限界に達したため、十分小さな数値であることがわかる。また、波束全体の振る舞いは、指数関数的局在を保ったまま ”複雑” にゆらぐ時間変動をしていることがわかる。

⁴この系の局在固有関数のフラクタル性についての報告はある [17]。

むしろ、こんなに複雑なゆらぎを伴い局在している波動関数が自然境界を持つであろうことは前稿 [II] の考察から十分予想される。実際、この局在波束をリャプノフ指数でスケールして用いることにより、パデ近似もしくは直接法により、自然境界の存在を予想した結果、付録 C に与えてある。

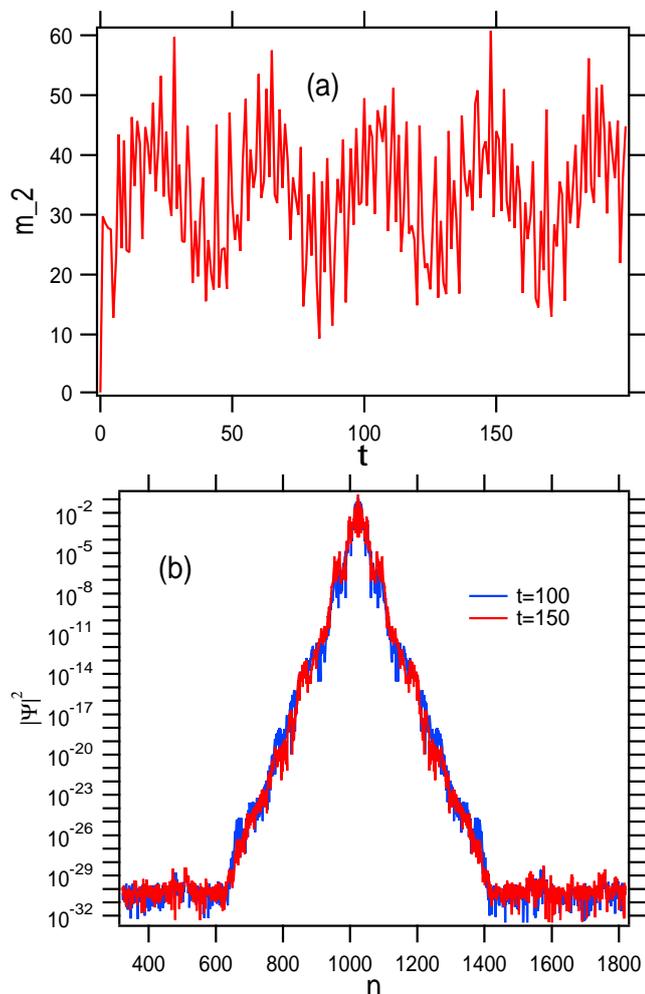


図 1: アンダーソンモデルでの局在波束の様子。ポテンシャル強度 $W = 1.5$ の 1 サンプルのデータである。(a) 平均二乗変位の時間変化、(b) $t = 100, t = 150$ での分布関数 $|\Psi_t(n)|^2$ の対数表示。

量子波束の時間発展においては、この一次元ランダム系での局在状態は次のような多色の時間依存摂動が入った系 (PAM: 多色摂動アンダーソンモデル) において、非局在状態に転移することが知られている。

$$V(n, t) = V(n) + \sum_j^L \frac{\epsilon V(n)}{\sqrt{L}} \cos(\Omega_j t) \quad (2)$$

ここで、 Ω_j はオーダー 1 の互いに不整合な振動数を示す。 \sqrt{L} は時間依存摂動の強度を規格化するための因子である。少なくとも、 $L \geq 2$ で摂動強度 ϵ がある程度大きい場合、非局在状態に転移することが数値的に確認されている。(詳しくは、文献 [18, 19] をみよ。)

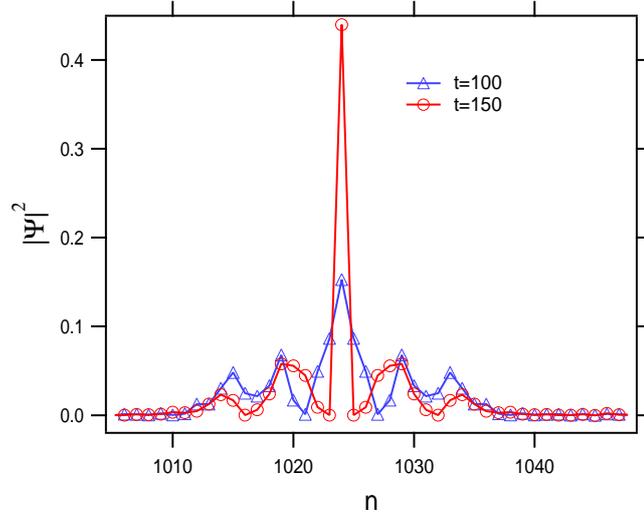


図 2: 図 1(b) のアンダーソンモデル局在波束分布の線形表示の拡大図。

さらに、この時間依存性を kick にした系 (PKAM: 多色摂動 kicked アンダーソンモデル)、

$$V(n, t) = \left[V(n) + \sum_j^L \frac{\epsilon V(n)}{\sqrt{L}} \cos(\Omega_j t) \right] \sum_m \delta(t - m). \quad (3)$$

の場合においても類似の局在・非局在転移がみられる。(詳しくは、文献 [20] をみよ。) 本稿においても、長時間の数値計算が容易なこの多色摂動 kicked Anderson モデルをつかう。これらのモデルは、局在・非局在状態とエネルギーの移動の関係を調べるために著者らが導入したモデルである。これらの時間依存系は時間に依存しない等価な自励系に変換することができる。このとき、時間依存摂動部分は線形振動子を結合させたことに相当する。(詳しくは文献 [20] をみよ。)

一方、dynamical localization を起こす kicked rotor に対し、多色の時間摂動を印加し局在・非局在現象を調べる研究もある⁵。そこでは、2色の摂動系が三次元ランダム系に対応するという見方で、局在・非局在転移が論じられた [21, 22]。最近、Delande らも摂動の結合が異なるモデルで実験結果に対応させながら kicked rotor を用いて局在・非局在転移の評価を行っている [23]^{6 7}。この kicked rotor のモデルにおいては、 p -空間での局在・非局在転移であり本稿で用いた kicked Anderson model は実空間における局在・非局在転移であることを除けば非常に類似した局在・非局在現象が観測されている。

⁵数学では static なポテンシャルでの時間依存シュレーディンガー方程式による局在などを dynamical localization と呼び、固有状態の局在を単に局在 (localization) とよぶ。物理学では、一般に kicked rotor など kick 系での運動量空間での局在を dynamical localization という。数理生物学などでは、レート方程式に従う population dynamics における局在現象を扱う。

⁶結合 kicked rotor (大体 2 自由度、精々 3 自由度) での非局在化転移の研究も多数ある [4]。

⁷二次元ランダム系での解析性の怪しい話も気になる [24, 25]。デルタ関数的ポテンシャルのランダム系はどうなるであろうか [26]。デルタ関数の位置では波動関数は連続だが微分不可能な点になる。もしかしたら、このポテンシャルの特異性が二次元ランダム系の局在・非局在転移問題に関わる可能性を考えさせられる。

2.2 一次元準周期系における局在・非局在転移

ランダムネスを含まない静的規則系で、実空間で厳密に局在・非局在転移を起こす例として、次のポテンシャルを持つハーパーモデルが有名である [27, 28, 29, 30]。

$$V(n) = 2V \cos(2\pi\alpha n) \quad (4)$$

ハーパーモデルの場合は、実数のパラメータ α やポテンシャル強度 V を変化させることにより、スペクトルの性質を点スペクトルから絶対連続スペクトルに変えることが可能であり、対応して様々なタイプの固有状態が得られる。 α が無理数の場合、 $0 < V < 1$ で絶対連続スペクトル、 $V > 1$ での純粹点スペクトルで固有関数は指数的に局在した状態になる。臨界値 $V = V_c = 1$ では、特異連続スペクトルをもち固有関数は臨界状態といわれるマルチフラクタル状態になる。⁸ 局在固有状態と非局在固有状態を分けるエネルギーがあれば、そのエネルギーを移動度端という。ハーパーモデルの場合は、 $V_c = 1$ で、固有状態が一斉に転移し、エネルギー軸上に移動度端は存在しない。図3と図4に、静的アンダーソンモデルと比較できる様に、ハーパーモデルでの局在の様子を示す。図3(b) からアンダーソン局在の場合よりも、奇麗な指数関数的局在であることがわかる。局在長の逆数に相当するリャプノフ指数のゆらぎも小さいし、その分布関数もきれいなフラクタル的構造をもっている。また、図4から、リアルなスケールで表示すると分布は初期局在サイトから数サイトの範囲内で閉じ込められ複雑にゆらいでいることもわかる。前稿 [II] において固有関数でみたことと同様にハーパーモデルのダイナミックスの指数関数的局在状態においても、スケールし指数関数因子を取り除いた量子状態のゆらぎは自然境界上での特異性を表していると容易に予想できる。図5は、臨界状態 ($V = 1$) での波束の拡散する様子を示している。おおよそ、平均二乗変位は t -linear に延び拡散波束の形状はガウシアンに近いことがわかる。この場合には、 $t \rightarrow \infty$ で波束自身が一様分布に漸近し、自然境界は既に実軸上に存在することに対応する。この量子波束が非局在化し拡散が生じている状態で、波束の中心付近に見られる尖った構造は局在状態の名残である。

このハーパーモデルでの \cos 型のポテンシャル部分を変形することで、様々な一般化が可能である。連続変数を x とした場合のポテンシャル $V(x)$ の解析性を破るという方向での一般化ともいえ、実際にそれらのモデルにおいても数値計算により局在・非局在化転移の存在が示唆されている。例えば、エネルギー軸上で移動度端 (Mobility Edge) を持つ系として、ポテンシャルの絶対値をとり解析性を破ったもの

$$V(n) = 2V |\cos(\pi\alpha n)| \quad (\text{Bardeen potential}) \quad (5)$$

は、Bardeen により電荷密度は運動のピン止めとして導入されたものである [31]。また、次のような Aubry による一般化もある。

$$V(n) = 2V \cos(\pi\alpha n^\nu) (0 < \nu < 1) \quad (\text{Aubry potential}). \quad (6)$$

この Aubry model では、WKB theory より移動度端を $E_c = \pm 2|1-V|$ つまり、 $2V = 2-|E|$ でもつ局在・非局在転移が示唆されている [32]。しかし、厳密に一次元系で移動度端の存在

⁸他の準周期的ポテンシャルの場合についても多くの結果がある。

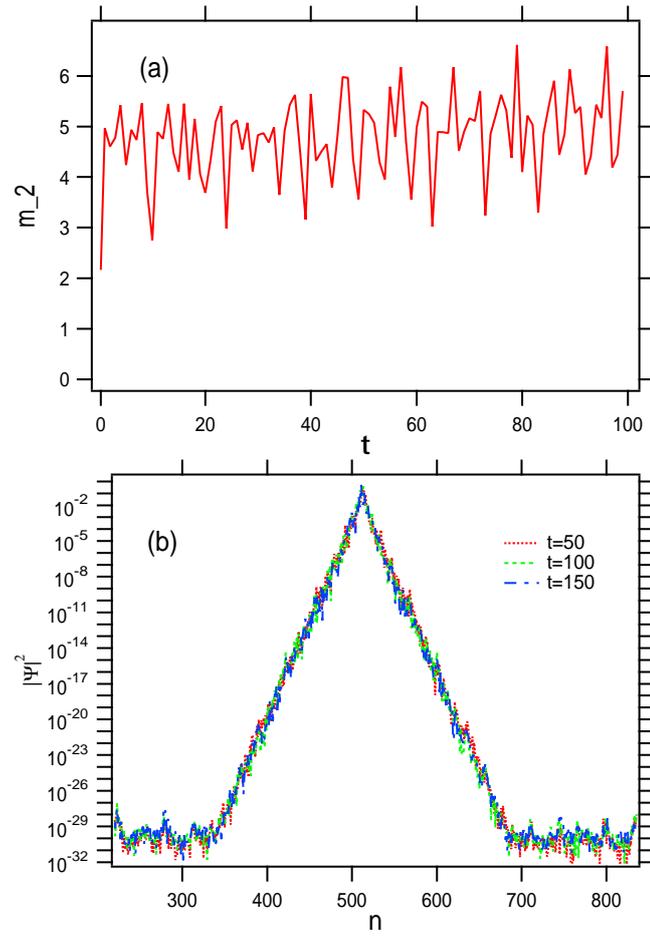


図 3: $V = 1.2$ のハーバーモデルの局在波束の様子。(a) 平均二乗変位の時間変化、(b) $t = 50$, $t = 100$, $t = 150$ での対数表示の分布関数 $|\Psi_t(n)|^2$ 。

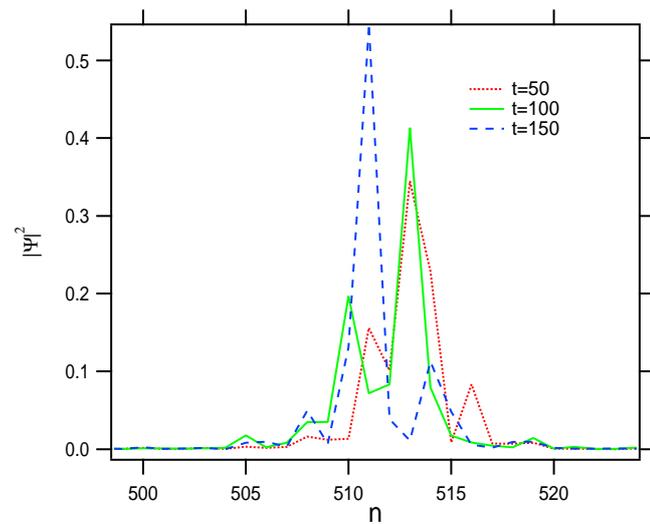


図 4: 図 3(b) のハーバーモデルの局在波束分布の線形表示の拡大図。

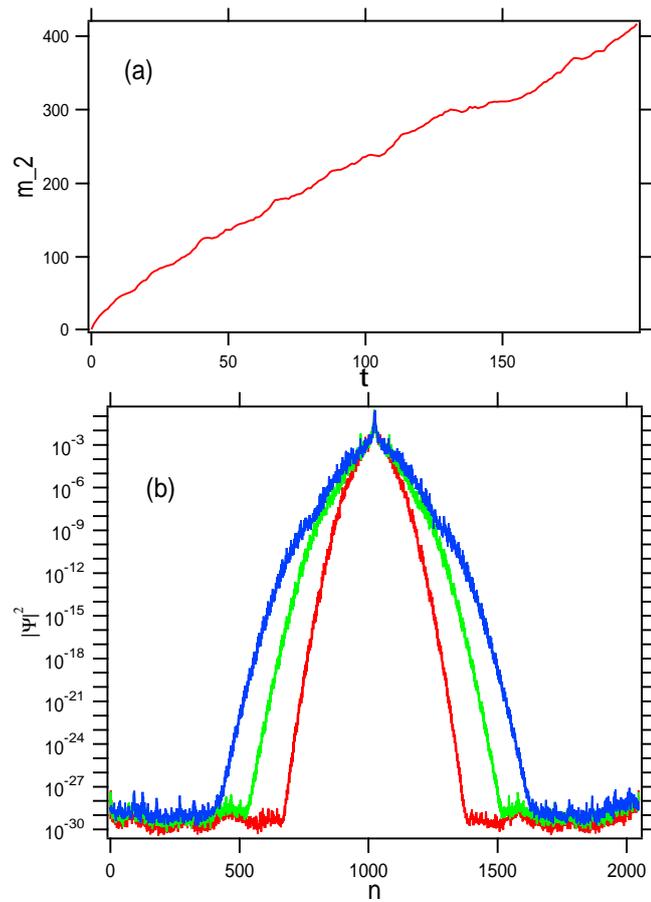


図 5: $V = 1.0$ の臨界状態のハーパーモデルの波束の様子。(a) 平均二乗変位の時間変化、(b) $t = 50, t = 100, t = 150$ での分布関数 $|\Psi_t(n)|^2$ 。縦軸は対数表示。ここではポテンシャル $V(n) = 2V \cos(2\pi\alpha n + \theta)$ の中の異なる位相 θ の 10 個のサンプルに関し、平均した結果を表示している。

が証明されているものは、ベテ格子や定常性を破るスパーランダム系を除いては存在しない [33]、⁹ さらに、ハーパーモデルの基本格子系を変更したり、hopping を long-range にしたり、相関を long-range にする方向という拡張型ハーパーモデルも存在する。それらの拡張型ハーパーモデルでは、二次元のパラメータ空間で、ハーパーモデルと同様に、局在状態、臨界状態、非局在状態間の転移がはっきりと存在するため、数値計算で局在・非局在転移を調べるモデルとして有力候補といえるが、ここでは扱わない。(付録 B にそれらのモデルを示しておく。)

大前提として、「ハミルトニアンの中におけるポテンシャル部分の解析性は、何らかの形で量子状態の解析性に伝播するであろう」ということは、“自然な”発想であり、パデ解析における自然境界の探索でもその事実を垣間見てきた。

量子カオス系における事実から kicked rotor (KR)、

$$H = p^2/2 + kV(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (7)$$

において、ポテンシャルを非解析的なものにした場合の研究は 2000 年前後に行われている。(文献 [34, 35].)

そこでは、絶対値を使い q 空間で非解析ポテンシャル

$$V(q) = |q|^\alpha, V(q) = \log |q|, \quad (8)$$

などにした場合、 p 空間での準固有関数のベキ局在や波束の拡散における subdiffusion の存在が知られている。これらに対する強結合モデルでの対応物はハーパーモデルのポテンシャル項を

$$\cos(2\pi\alpha n) \rightarrow |\cos(2\pi\alpha n)| \quad (9)$$

と変換したようなものが考えられる。このような場合に、指数関数的局在の影にベキ関数的局在領域が隠れている可能性は否定できない。

強結合モデルのランダム系では、ポテンシャル項のランダムネスのためポテンシャル関数としては非解析的であり、当然局在量子状態に何らかの形で反映される。

一般にハミルトン関数（より具体的にはポテンシャル関数）の複素解析性が量子状態に直に影響する。特に、量子系では Paley-Wiener の定理により、実空間表示の波動関数と運動空間の波動関数は性質がフーリエ変換で互いに結びつくため、KA では実空間 (KR では運動量空間の量子状態の decay) の様子が波動関数の複素解析性を表わすことになる。

⁹ もちろん、非局在状態の厳密な存在証明が無いという点は、高次元ランダム系などでも同じである。物理的には、三次元ランダム系では移動度端の存在が数値的に支持されている。また、スケーリング仮説による臨界次元の 2 次元ランダム系では、ベキ関数的局在の可能性やベキ的非局在状態の存在する可能性から、それら局在・非局在を分けるエネルギーを擬移動度端ということもある [25]。

Paley-Wiener の定理：周期関数 $f(t)$ が複素平面の帯状領域 $C_a := \{z \in C : |Imz| < a\}$ 上の正則関数 $f(z)$ の実軸への制限であるための必要十分条件は、 $f(t)$ の Fourier 係数 $\hat{f}(n)$ について次が成立する事である。

$$0 < \forall b < a, \exists C_b > 0; \forall n \in Z, |\hat{f}(n)| \leq C_b \exp\{-|n|b\}, \quad (10)$$

2.3 モデル

局在・非局在転移に伴う量子状態の解析性を議論するためには、1パラメータ変化で局在・非局在転移がおり、その転移の質的状況を変えないで連続変数の関数として量子状態を構成する必要がある。そのためには、三角関数の位相部分に位相を埋め込んで連続変化させ、波動関数の変動をみるのが一つのアイデアである。そこで、前節でみた局在・非局在転移を生じるモデルに対し、位相を入れた形でのモデルを改めて挙げておく。

Autonomous Model

次のように、ハーバーモデルに初期位相 θ を入れたものを用いれば、ポテンシャル強度 V での局在・非局在転移を波束 $\Psi(\theta)$ の変化として観測できる可能性がある。

$$V(n) = 2V \cos(\pi\alpha n + \theta). \quad (11)$$

任意の位相 θ はフェイズシフトによる準周期構造に対応して、 θ に関する積分量はアンサンブル平均に対応する。しかし、この局在・非局在転移はエネルギー軸上に移動度端を持たないゆえ、移動度端を持つ可能性のあるよりワイルドな候補は、Bardeen potential[31]、Aubry potential[32]、Weiersstrasse potential[33]、FFM potential[36] であろう。次のように与えられる。それぞれ、

$$V(n) = 2V |\cos(\pi\alpha n + \theta)|, \quad (12)$$

$$V(n) = 2V \cos(\pi\alpha n^\nu + \theta), \quad (13)$$

$$V(n) = \sum_{k=0}^{N/2} \frac{\sin(a^k n/N + \phi_k + \theta)}{a^{(2-D)k}}, \quad (14)$$

$$V(n) = \sum_{k=1}^{N/2} \left[k^{-\alpha} \left| \frac{2\pi}{N} \right|^{(1-\alpha)} \right]^{-1/2} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi_k + \theta\right) \quad (15)$$

ここで、式 (12)、(13) のパラメータの意味は前節と同じである。式 (14)、(15) で与えられるモデルは、ポテンシャル列の相関を増し非定常性を生成し非局在化現象を研究するものであるが、本稿ではこれ以上触れないことにする。文献 [37, 38] も参照。

外摂動系：PKAM

時間摂動で局在非局在転移を生じるモデルの例として、式 (3) における kick+1 色摂動系を用いる。具体的には $L = 1$, $\phi_1 = \theta$, $\epsilon = 0.1$ (or 0.2), $\Omega = 0.8$ として、

$$V(n, \Omega t + \theta) = [V(n) + \epsilon V(n) \cos(\Omega t + \theta)] \sum_m \delta(t - m). \quad (16)$$

をもちいる。 $V(n)$ は各サイト独立で $V(n) \in [-W, W]$ の値をとるランダムポテンシャル列である。すなわち、これは時間発展演算子、

$$U_t(n, p, \theta) = e^{-iT(p)/2\hbar} e^{-iV(n, \Omega t + \theta)/\hbar} e^{-iT(p)/2\hbar} \quad (17)$$

により波動関数

$$\Psi_t(n, \theta) = \Pi_{k=1}^t U_t(n, p, \Omega k + \theta) \Psi_{t=0}(n) \quad (18)$$

を作成し、連続変数 θ に関する解析性変化をポテンシャル強度 V もしくは摂動強度 ϵ を変えて調べるためのモデルである。紛らわしさはないであろうから、ポテンシャルの三角関数の位相部分は全て同じ表記 θ にした。数値計算の利便性から、次節以降では、主に PKAM とハーパーモデルを用いることにする。

3 位相敏感性の計量

この節では、初期状態として 1 サイトに局在した波束 $\Psi_{t=0}(n) = \delta_{n, n_0}$ をとり、非局在化している PKAM 系における波束の初期局在中心サイト n_0 での振幅（ゼロ点振幅）のポテンシャルの初期位相 θ に対する解析性を調べる。もちろん、時間発展して得た量子状態 $\Psi_t(n, \theta) \equiv \Psi(n, \theta + \Omega t)$ において、初期位相 θ は連続変数であり、この時間発展波動関数は θ の周期整関数である。従って、有限時間では量子状態の θ に関する解析性は変化しないが、「無限時間での振舞いで期待される非解析的なものの尻尾を有限時間で掴み取ろう」という試みである。ゼロ点確率 $|\Psi(n_0, t)|^2$ の時間に関する減衰を調べることは、量子波束に関するこれまでの局在・非局在研究で行われている。（より詳しい具体的な意味については付録 A を参照されたい。）

3.1 初期位相依存性と考察

PKAM と多色摂動周期系 ($V_n = \text{一定}$) での波動関数について、典型的な初期位相 θ 依存性の時間変化 $Re\Psi(\theta, t)$ を図 6 に示してある。周期系の場合は時間が経過しても振幅が小さくなるだけで θ 依存性に質的影響はなく滑らかな振動が見られるのみであるが、PKAM では時間の経過とともに複雑な構造が生みだされている。（観測サイトを n_0 をから数サイト移動しても、観測量を $Im\Psi$ や $|\Psi|$ に変えても本質的に類似の振る舞いを示す。）これは、時間摂動無しの系を線形振動子（フォノン系）と結合したモデルとみなすならば、「phonon の位相に対する波動関数の敏感性」という面白い現象である。振動子の初期位相 θ に発した量子状態 $\Psi_0(n, \theta)|\theta\rangle$ は $\Psi(n, \theta + \Omega t)|\theta + \Omega t\rangle$ と時間発展し、係数 $\Psi(n, \theta + \Omega t)$ ($\Psi_t(n, \theta)$) は θ の非常に敏感な関数になったわけである。また、図 7 に臨界ハーパーモデ

ル ($V = 1$) と Aubry model ($V = 1, \nu = 0.5$) でのポテンシャル初期位相 θ に関する依存性を記している。この臨界ハーパーの場合も PKAM 同様に、時間経過とともに、初期局在サイトの振幅の実部は大きく変動する。Aubry model の場合はさらに激しいゆらぎ構造がみられる。これらのモデルは連続時間発展であるため、様々な解析に対して計算量が膨大になるため、以下の解析では PKAM のみを扱うことにする。

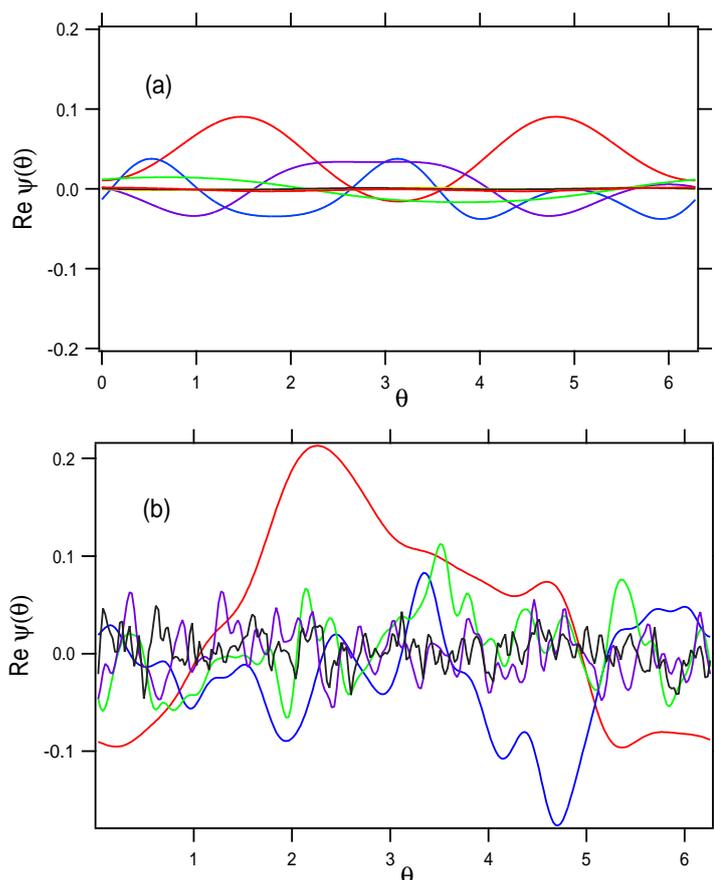


図 6: 式 (24) の PKAM の場合、初期局在サイト n_0 での振幅の実部 $Re\Psi_t(n_0)$ の摂動初期位相 θ に対する変化。パラメータは $L = 1$ 、摂動強度 $\epsilon = 0.1$ 。(a) $V(n)$ として周期系 $V(n) = 1$ を用いた場合の結果。(b) $V(n)$ としてランダム系、 $V(n) \in [-W, W]$, $W = 1$ 、を用いた場合の結果。 $[0, 2\pi]$ を 256 分割し、また時間に関しては $t = 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$ まで 4 段階で色分けし表示している。

3.2 フーリエ係数

量子状態 $\Psi_t(n, \theta)$ の時間摂動の初期位相 θ に対する時間変化を θ に関してフーリエ級数展開する。この展開係数 $\Psi_t(n, m)$ は、フーリエ変換

$$\Psi_t(n, m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\theta m} \Psi_t(n, \theta) \quad (19)$$

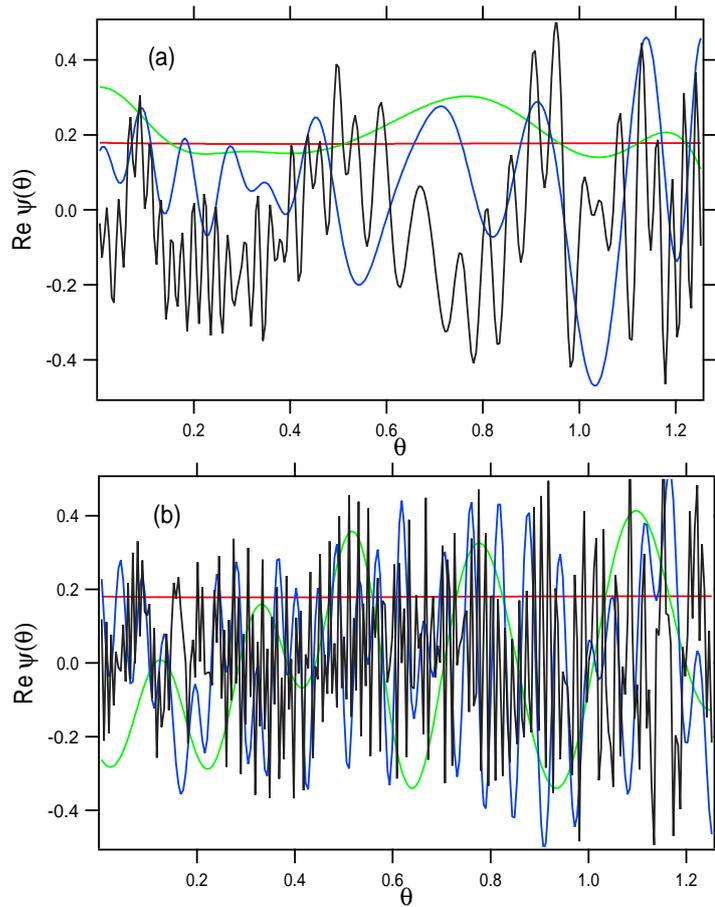


図 7: (a) 臨界ハーパーモデルの場合 ($V = 1$)、(b) Aubry model ($V = 1, \nu = 0.5$) における初期局在サイト n_0 での振幅の実部 $Re\Psi_t(n_0)$ の摂動初期位相 θ に対する変化。 α は黄金比。区間 $[0, 2\pi]$ の一部のみ示す。 $[0, 2\pi]$ を 256 分割し、また時間に関しては $t = 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$ まで 4 段階で色分けし表示している。における結果。他のパラメータは臨界 Harper の場合と同じである。

である。(これは phonon に関する位相表示 (m -表示) となっている。) もちろん、これを係数として

$$\sum_m \Psi_t(m) e^{-im\theta} = \Psi_t(\theta) \quad (20)$$

をつくれれば元の θ -表示波動関数に戻る。(以下では煩雑さを避けるために、サイトを表す座標 n は必要でない限り落とす。) 以後一般に、実空間変数として n や θ を用い波動関数を $\Psi_t(n)$ や $\Psi_t(\theta)$ と表示し、運動量空間変数として p や m を用いた表示 $\Psi_t(p)$ や $\Psi_t(m)$ を用いることにする。変数を陽に表示しているので波動関数は、混乱が生じないであろうことからどちらの空間でも同じ Ψ を用いている。

このフーリエ係数 $\Psi_t(m)$ の減衰の様子から連続変数 θ の関数 $\Psi_t(\theta)$ の解析性を調べよう。例えば、 θ 依存性の構造がほぼ「ランダム」ならば $\Psi_t(m)$ は指数関数的に落ち、 $\Psi_t(m)$ の変動がフラクタル的ならば $\Psi_t(m)$ は m に関しべき的減衰をすることなどが期待できる¹⁰。数学的には、実変数 θ に関して有限時間での波動関数のクラスは C^∞ 級ゆえ、実軸を含む有限の複素領域で解析的であり、そのフーリエ展開係数である $\Psi_t(m)$ は

$$|\Psi_t(m)| = \left| \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} \Psi(\theta) d\theta \right| < \text{const.} e^{-\rho m} \quad (21)$$

と指数関数的に減衰することがただちに証明できる。(積分経路を実軸からそれに平行な複素経路に変更すればよい。) ここに ρ は収束半径である。このように、もし $\Psi_t(\theta)$ が初期位相 θ の整関数ならば、 m が大きい極限で $|\Psi_t(m)|$ は指数関数以上で落ちねばならない。

数値実験の結果は図 8 にある。 $\Psi_t(m)$ は $m = 0$ 近傍ではガウシアンだが $m = 0$ から十分離れるとやや指数関数的に近づく。ガウシアンか指数関数的かの十分な判別は困難だが、あきらかにフーリエ係数 $\Psi_t(m)$ は m に関し指数関数以上で落ちている。

$$|\Psi_t(m)| = \text{const.} e^{-m^2/D_{ph}t}. \quad (22)$$

これは、有限時間をみているゆえ上記の考察どおり当然の結果である。

3.3 波動関数のゼロ点

PKAM の非局在化波動関数を phonon の位相 θ の関数 $\Psi_t(n, \theta)$ やその実部 $Re\Psi_t(n, \theta)$ (虚数部でもいい) を見たとき、 θ 軸上で時間経過とともに複雑な構造 (ゆらぎ) が生成されていくことがわかった。次に、このゆらぎのゼロ点 (節) の数はどのように増大しているのだろうか。図 9 に、 θ 軸上の節の数 ($Z(t)$) の時間変化を示した。節の数が

$$Z(t) \propto t^\beta, \beta \simeq 0.45 \quad (23)$$

で増えてゆくことがわかる。節の数に変え極値の数で計算しても傾向は同じである¹¹。

¹⁰ 数学的に有限時間でフラクタルはむしろあり得ないし、べき減衰もあり得ない。時間無限大では θ 依存性の構造がフラクタル的である事と有限時間での作用空間での指数関数的減衰はまったく矛盾しない。ハミルトン力学系における KAM トーラスもそうになっている。但し波動関数が収束しないだろう。一般に十分滑らかな関数のフーリエ級数展開の係数が指数関数的に落ちる事はしばしば経験する事である。

¹¹ $k(\epsilon)\sqrt{t}$ に対する係数 k の摂動強度 ϵ に関する系統的摂動強度依存性が観測されるかもしれない。

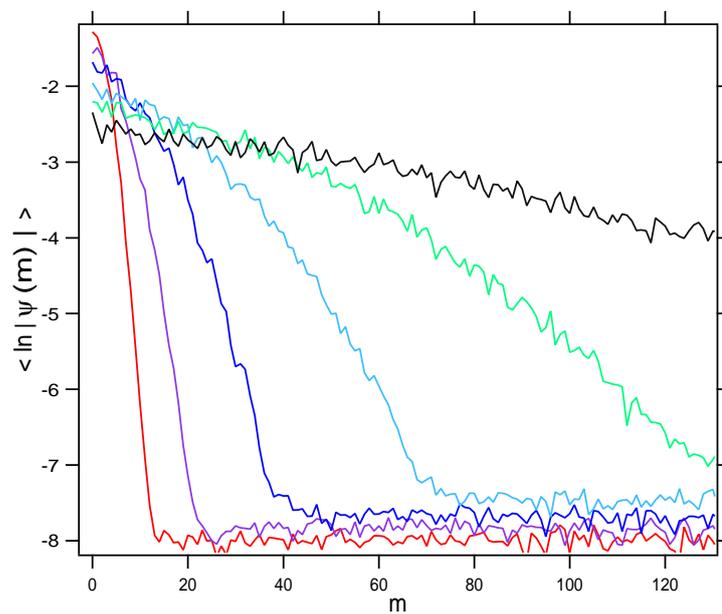


図 8: 図 6(b) の PKAM の場合の $Re\Psi_t(\theta)$ のフーリエ係数 $\Psi_t(m)$ の m 依存性。 $\langle \ln |\Psi_t(m)| \rangle$ を m の関数として表示している。ここで、 $\langle \dots \rangle$ は 10 個のランダム系に関するサンプル平均を示す。 $N = 2^{12}$ とし、時間は $t = 4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$ までのものを用いている。長時間対応部分ほど数値計算の精度が居るので、 θ -依存性を $2^9, 2^{10}$ と mesh を細かくして不変であることを check してある。位相敏感性のフーリエ係数の対数をとってからサンプル平均したものは、サンプル平均してから対数をとるよりもきれいになる。

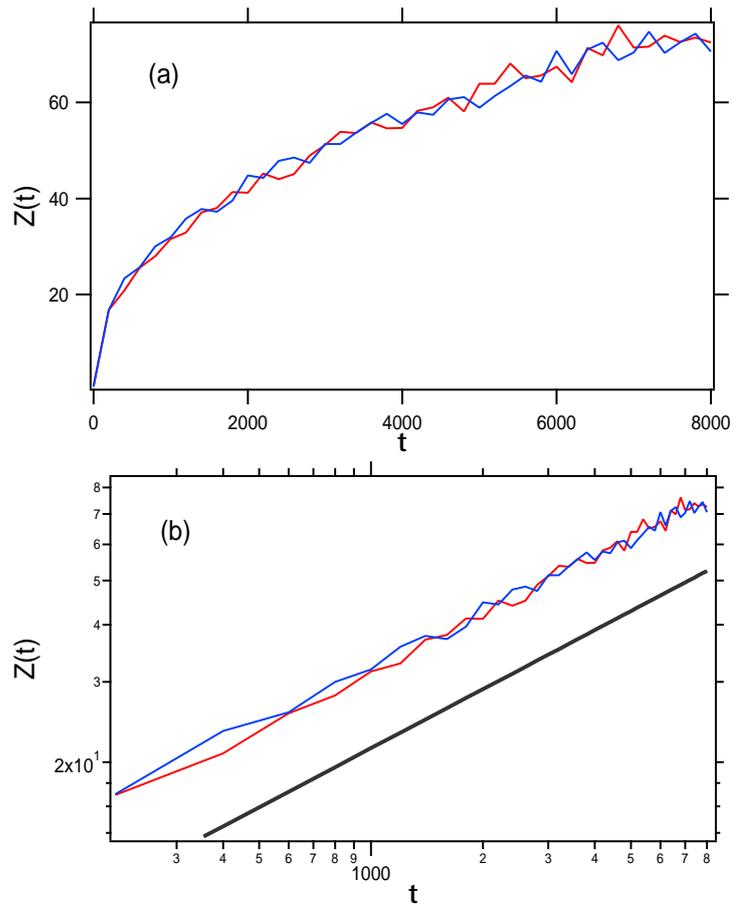


図 9: 図 6(b) の PKAM の節点の数 $Z(t)$ の時間変化。赤は実部 $Re\Psi_t(\theta)$ 、青は虚部 $Im\Psi_t(\theta)$ に対応し、10 個のサンプル平均をしてある。(b) は両対数表示。黒の実線は $t^{0.45}$ を表示したものである。

次に、 θ の相関関数 $C_t(\varphi)$ との関係から、この結果の意味することを考えよう。

$$C_t(\varphi) = \langle \text{Re}\Psi_t(\theta + \varphi)\text{Re}\Psi_t(\theta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \text{Re}\Psi_t(\theta + \varphi)\text{Re}\Psi_t(\theta) \quad (24)$$

を用いて m 空間 weight は

$$|\Psi_t(m)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi e^{-im\varphi} C_t(\varphi), \quad (25)$$

と表される。ここで $\langle \dots \rangle$ は θ 平均を意味する。サンプル平均も実行する場合には $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ を使う。この事は次の事実とも consistent である。即ち、 θ に共役な m -空間では、次のような正常なガウス分布に従う拡散がおこるとする。

$$\langle\langle |\Psi_t(m)|^2 \rangle\rangle_x \sim e^{-m^2/D_{ph}t} \quad (26)$$

これは、当然 θ の相関関数に反映されて

$$\langle\langle \text{Re}\Psi_t(\theta)\text{Re}\Psi_t(\theta') \rangle\rangle_{n_0} = e^{-(\theta-\theta')^2 D_{ph}t} \quad (27)$$

となる。このとき、 θ の相関距離は $\sim 1/\sqrt{t}$ で減る。このとき、相関を支配するのはゼロ点の間隔であろう。よって θ 軸上でのゼロ点の数が $\sim \sqrt{t}$ で増えること、ゼロ点の位置がランダムになることを強く示唆する。

この節では、PKAM を用いて、初期局在波動関数の $\text{Re}\Psi_t(\theta)$ 、 $\text{Im}\Psi_t(\theta)$ の初期位相 θ 依存性を調べた。(ハーバーモデルの静的ポテンシャル内の位相依存性も類似の傾向があった。) この激しい振動構造から、 $\Psi_t(\theta)$ の θ に関する解析性を考えると、 $t \rightarrow \infty$ では θ 平面内で自然境界が存在することを示唆している。前稿 [II] で議論した、ランダムポテンシャル列 V_n の母関数 $f(z) = \sum_n V_n z^n$ やフーリエ級数 $f(\theta) = \sum_n V_n e^{in\theta}$ が自然境界を持つことと対応する。

3.4 多色摂動 Kicked Anderson Model の位相ゆらぎ

結局、非局在化している PKAM 系の波動関数 $|\Psi_t(n, m)|$ は m が大きい極限で、常に指数減衰以上 (大体、ガウシアンで減衰する) で減衰する傾向が判明した。ここでは、具体的に、波動関数を

$$\Psi_t(\theta) = A_t(\theta) e^{iS_t(\theta)} \quad (28)$$

とにおいて位相部分に注目しその詳細を調べる。図 10 が実測された摂動周期系の場合と PKAM での波動関数の位相 $S(\theta)$ の初期位相 θ 依存性である。図 10(a) の周期系の場合には時間経過により特に質的变化はなくなめらかである。一方、PKAM の場合は θ 依存性は時間とともに複雑な変動を示していくことがわかる。さらに、 $S(\theta)$ の θ に関し数値的に微分した $S'(\theta)$ をプロットしたものが図 11(a) であり、

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta} = m, \quad (29)$$

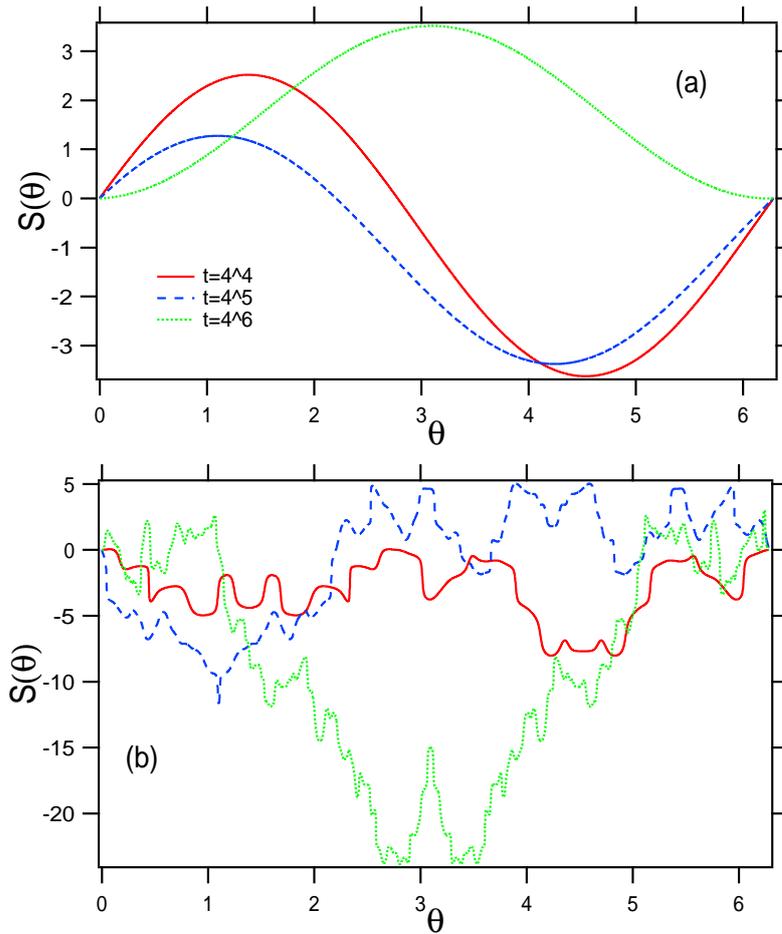


図 10: 波動関数の位相 $S(\theta)$ の初期位相依存性、 $t = 4^4$ (red), 4^5 (blue), 4^6 (green)。(a) 周期系 ($V(n) = 1$) に摂動の場合、(b)PKAM の場合、どちらも $L = 1, \epsilon = 0.2$ 。前節の波動関数の振幅の実部や虚部の位相敏感性の計算に比べて、 θ に関し 10 倍以上の細かい mesh を用いてある。補間データでの再チェックも行い、この細かさで十分であることも確認した。

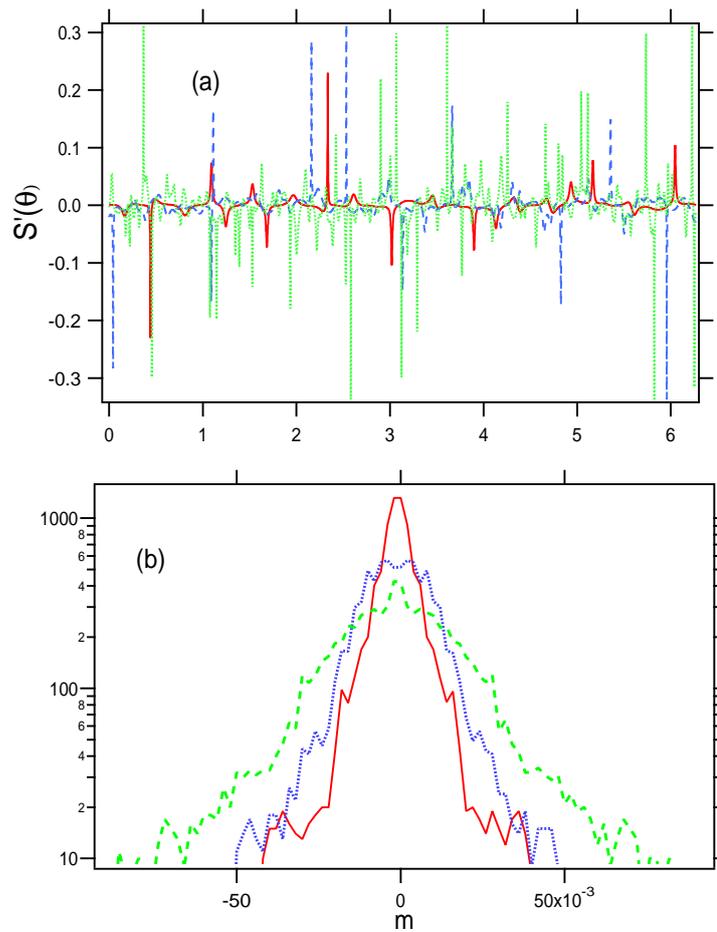


図 11: (a) 波動関数の位相 $S(\theta)$ の初期位相に関する数値微分 $S'(\theta)$ の時間変化 ($t = 4^4$ (red), 4^5 (blue), 4^6 (green)). $L = 1, \epsilon = 0.2$. 前節の波動関数の振幅の実部や虚部の位相敏感性の計算に比べて、10 倍以上の細かい θ に関する mesh を用いている。(b) $S'(\theta) = m$ を満たす実根の数に関する度数分布。

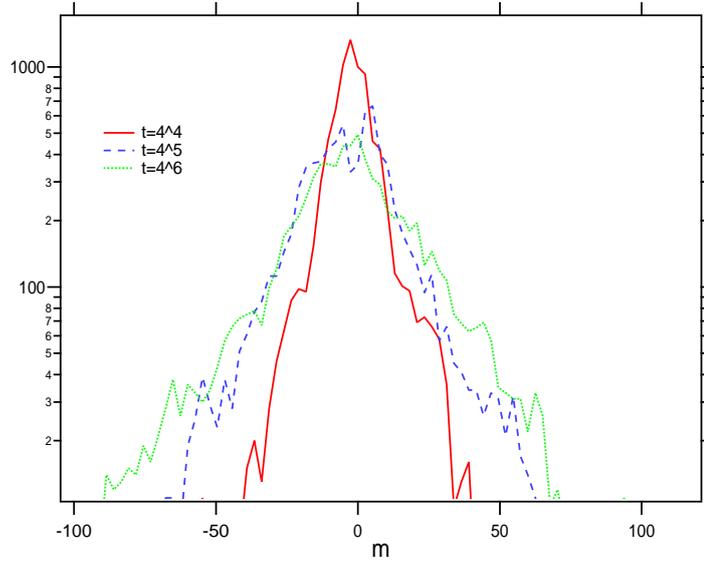


図 12: 図 11(b) と同じデータを用いて n_0 近傍の 10 サイトに関し平均を行ったもの。横軸 $\times 10^3$ してある。数サイトでの分布を重ねてみると、サンプル平均に相当するものを効率よく行うことが可能である。

を満たす実根の数の分布をプロットしたものが図 11(b) である。これによると、 m 空間の広い域において指数関数的減衰が観測されている。

さらに精度を上げた計算の結果、「 m の大きいところの実根領域で指数分布がみえる。」したがって、その先のトンネル領域 ($|\Psi(m)|^2$ で m の大きい分布の裾野) で減衰が指数関数よりも急峻であることも確実である。

実際、トンネル的な部分は local には (θ_0 まわりで展開して)

$$S'(\theta) = S'(\theta_0) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2 S''(\theta_0) + \dots \quad (30)$$

と表せる。 $(S'(\theta_0) = m_0$ とする) また、 $\theta - \theta_0 \sim (m - m_0)^{1/2}$ より、式 (30) を積分すると

$$S(\theta) = S(\theta_0)\theta + \frac{1}{6}(\theta - \theta_0)^3 S''(\theta_0) + \dots \quad (31)$$

$$\sim \frac{1}{6}(m - m_0)^{3/2} S''(\theta_0) \quad (32)$$

と成る。つまり、 $\Psi_t(m)$ は少なくとも指数関数より強く減衰するといえる。従って前節の実際の波動関数の m -表示の結果と無矛盾である。図 12 にいくつかのサイトでの初期位相依存性を重ね合わせて、平均化した安定なデータを示した。指数関数的減衰は見られるが、それ以上の判別は難しい。フーリエ変換での m -表示とその半古典近似がどこまで一致するか興味深い問題である。実根のみでよいのか、トンネル領域はどうか、振幅因子を入れないとだめなのか？ 残る問題である。次節で、半古典論的考察により波動関数の複素ゼロ点が位相の敏感性を生じせしめている可能性も議論する。また、この θ 平面内で

自然境界と複素ゼロ点の関係を再び6節で考察しよう¹²。

4 θ 依存性に関する半古典論的考察

波動関数 $\Psi_t(\theta)$ の位相部分 $S(\theta)$ の θ 依存性は、振幅部分 $Re\Psi_t(\theta)$ などと比較してもより激しい振動構造が確認された。この節では、半古典論的考察により波動関数の複素ゼロ点がこの位相部分の敏感性を生じせしめている可能性を具体的に考察する。

4.1 半古典論的予想

この波動関数 $\Psi_t(\theta)$ が整関数ならば、位相 $S_t(\theta)$ の特異点は $\Psi_t(\theta)$ のゼロ点 ($|\Psi_t(\theta)| = 0$ または $Re\Psi_t(\theta) = Im\Psi_t(\theta) = 0$) に限られる。(これは対数的特異点つまり、波動関数に位相を導入したことによる。)

時間連続な系であれば波動関数のゼロ点がある時刻に $\theta \in R$ (R は実数) に出現する。するとその時刻の前後で位相差 $S_t(2\pi) - S_t(0)$ は $\pm 2\pi$ の整数倍だけ跳ぶ。このような波動関数のゼロ点の出現によって位相差は複雑に変動すると期待できる。実際 Anderson map のような系では、位相差は複雑に変動した。今の場合でも、波動関数のゼロ点は θ の複素面内に存在すると期待できる。

このような振舞がおこる起源を鞍点法により評価してみよう。 $S'_t(\theta^*) = m$ をみたす各鞍点 θ^* からの寄与を explicit に書いて位相部分を取り出すと次のようになる¹³。

$$\Psi_t(m) \sim \sum_{\theta^*} A_t(\theta^*) \frac{e^{iS_t(\theta^*)}}{\sqrt{S''_t(\theta^*)}}. \quad (33)$$

この原稿では、関数 $f(x)$ の変数 x に関する一階微分や二階微分を $f'(x)$ や $f''(x)$ と表すことにする。もし位相 slip が存在しなければ、 $|S'_t(\theta)|$ は有界であるから $S'_t(\theta^*) = m$ を満たす実根は $|m|$ が増大するに従い減少し、ついには存在しなくなる。¹⁴ 従って、ある m_0 があってその彼方 $m > m_0$ では、 $S'_t(\theta^*) = m$ の複素根になりそれからの寄与は実根の寄与とは異なる可能性もある。まず、**実根を持つ領域に注目しよう**。 $|m| < |m_0|$ の範囲では、位相の相関を無視すれば、つまり θ の離れた点を考えると、大きな m に対して、

$$|\Psi_t(n, m)|^2 \sim \sum_{S'_t(\theta^*)=m} \frac{|A_t(\theta^*)|^2}{|S''_t(\theta^*)|} = |A_t(\theta^*(m))|^2 P(m) \quad (34)$$

である。ここで、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に一様な分布 $1/2\pi$ を仮定し、微係数 $y = S'_t(x)$ の関数値の分布関数を

$$P(y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S'_t(x)=y} \frac{1}{|S''_t(x)|} \quad (35)$$

¹²生の初期位相変化が不安定で扱いにくいいため、前節で考えた、初期位相相関関数 $C(\varphi)$ や m -表示であるパワースベクトル $|\Psi_m|^2$ は、なんらかの意味で平均化した量を調べていることになる。

¹³ $S''_t(\theta) = 0$ をみたす θ を caustics という。

¹⁴ $S'_t(\theta)$ は大きくなるような擬似的位相の slip は無いとはいえない。

で導入し、振幅因子 $A_t(\theta)$ と位相 $S_t(\theta)$ による寄与を無理やり分解している。

前節で観測した、 m 空間での分布 $|\Psi(m)|^2$ がガウシアンであることを認めるならば、**Amplitude factor** の効果が無視できたと仮定して式 (34)(35) から局所微分 $S'_t(\theta)$ の統計が

$$P(m) = \exp\{-(m/\bar{m})^2\} \quad (36)$$

である公算が強くなる。(注：一般には積分した $S_t(\theta)$ の統計がガウシアンになることは言えるだろうが、 $S'_t(\theta)$ の統計がガウシアンである必要は無い。上記のようないくつかの仮定のもとでは、 m -空間分布に基づく整合性からガウシアン的減衰をもつ振る舞いが要請されるのみである。) このように実根からの寄与は関数 $S'_t(\theta) - m = 0$ の根の数が m とともにガウス分布している事の反映であろう。問題は複素根があらわれる $|m|$ のトンネル領域であり、その指数減衰が (もし存在すれば) $|\Psi_t(m)|^2$ の指数型スペクトルをもたらすと思われる¹⁵。

4.2 位相時間発展のマルコフ化と量子状態の複雑さの解釈

位相時間発展 $S_t(\theta)$ のマルコフ化とゼロ点の数変化の考察しよう。前節までに見たように、波動関数の初期位相に関するゼロ点の数が概ね $t^{1/2}$ に比例して増大するならば、位相差の発展過程でエントロピー生成がおきているとみなすことができる。**ふたつの連続変数 (t, θ) をもつ量子状態 $\Psi_t(\theta)$ に基づき、2通りの量子状態の複雑化に関する解釈が可能である。**

一つ目は θ 方向に対する運動である。すなわち、 θ を N 分点に粗視化して、 s 番目の θ_s の位相を $S_t(s)$ とすると適当に粗視化すれば $S_t(n)$ はあたかも独立変数とみなせて一ステップ当たり $\pm\Delta\theta$ 変化するがその変化は確率的で $+$ に進むも $-$ に進むも $1/2$ の確率で起きているという一番シンプルな確率過程でモデル化できるような Brown 運動をしていると予想できる。図 10 のように蛇状にうねっている場合、波動関数の位相差を $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の極端に離れた 2 点で観測すれば、 $S_t(\pi) - S_t(0)$ は

$$\int_0^\pi \frac{dS_t(\theta)}{d\theta} d\theta = S_t(\pi) - S_t(0) \quad (37)$$

であたえられ、適当な step 間隔で見た場合、拡散過程になっている。即ち

$$\langle (S_t(\pi) - S_t(0))^2 \rangle = D_{st}, \quad (38)$$

ここで、平均は電子側の初期波束のアンサンブルでとる。古典論と異なり、一般に軌道が存在しない量子論では波動関数に関する二乗平均 (例えば波束の空間拡散) は計算可能だが、直接的に Brown 運動を観測する事はないと言っていい。しかし、上で示した解釈では量子論としては珍しくも Brown 運動が <軌道的に> 見えていることになる。それを使うとちょうど古典カオスが粗視化によって「情報生成=軌道パターンの多様性」が定常的

¹⁵ $y = S(x)$ が時間に関して $S_t(\theta) - S_t(0) = \bar{S}(\theta\bar{m}(t))$ のように scale できると仮定すれば、実数部分、トンネル部分に拘わらず実測された式 (112) の $\bar{m}(t)$ による scale 性が説明できる。

に生成される様相を見せたように、時空粗視化によってマルコフ化と時空的多様さ生成している事を直接的に示している。さらにマルコフ的な酔歩運動が起きているならそこで entropy 生成も起きている筈である。上の式を認めれば、位相差は $t^{1/2}$ で増えるため、波動関数の実(虚)成分のゼロ点も概ね $t^{1/2}$ で増加するはずであり、実際に、前節の PKAM の結果はこれを支持している。

もうひとつは、時間 t に関する変動である。位相差 S の空間を例えば $[0, \pi], [\pi, 2\pi]$ に粗視化して $[0, \pi]$ にくれば 0, $[\pi, 2\pi]$ にくれば 1 と coding すれば、時間発展の binary coding が 0,1,0,0,1..... のようになるが、様々な初期波束に対して、コード列を採集して異なるコード列の数をカウントしたとき、異なるコードを持つ軌道の数 t (ステップ数) と共に、指数関数的に増えるならばその数の自然対数を t で割ったものが、非常に便宜的なエントロピー生成率という事になる。もし時間連続な系を Anderson map の代わりにとれば時間的に連続的に $S_t(\theta)$ のた打ち回りが観察される。この場合連続観察すると位相 $S_t(\theta)$ の slip が観察される。つまり空間 (t, θ) の関数として位相 $S_t(\theta)$ を観察すると、位相が 2π 不連続に飛ぶような点がポツポツ現われるはずである。空間 (t, θ) でその点を囲む経路を考えて連続的に辿り、位相は連続的に 2π 変化するのが、点をよぎるような経路に沿って進むとその点上で位相が 2π だけ不連続的な変化をしている。むしろ波動関数 $\Psi_t(\theta) = |\Psi_t(\theta)|\exp^{iS_t(\theta)}$ そのものは (θ, t) に関して連続なので、その点では振幅が $|\Psi_t(\theta)| = 0$ にならざるを得ない。つまり波動関数のゼロ点になっている。そういう位相 slip が時間連続系ではランダムにおきておりそれが位相の Brown 運動の根底にあると思われる。Anderson map ではそれが観察できないが、結果的にそれに相当する事がおきていると期待できる。¹⁶

5 解析接続された波動関数とゼロ点及び、自然境界

この節では、複素 θ 平面内のゼロ点分布と $\Psi_t(\theta)$ の自然境界との関係を再び考察してみよう。サイト表示の離散変数 n を q と表示している。

5.1 ゼロ点分布の挙動

初期位相 θ の摂動が印加された Anderson map 系 (PKAM) の時間発展波束 $\Psi_t(q, \theta)$ を考える。量子波束が非局在化した拡散発生時において、その m 表示、

$$\Psi_t(m) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_t(q, \theta) e^{-im\theta} d\theta \quad (39)$$

は指数関数的減衰ではなく、

$$\Psi_t(q, m) = e^{-cm^2} \quad (40)$$

のガウス型であった。(以下で、空間を表す離散変数 q は省略する。) これは、 $\Psi_t(\theta, q)$ は当然 θ の解析関数であるので、 m が大きいところでもガウス型になる傾向があり、連続系

¹⁶位相欠陥のあるところで回転数をかせぐことに対応し、またこの欠陥の並び方がランダムでガラス的ということになる。

の多色 Anderson モデルや多色 Anderson 写像系で、波束 $\Psi_t(\theta, q)$ が非局在化する場合に広い q 領域で見られる $\Psi_t(q)$ の Gauss 分布型と consistent である。 $\Psi_t(\theta)$ の位相欠陥は、

$$\Psi_t(\theta) = A_t(\theta)e^{iS_t(\theta)} \quad (41)$$

と書いた場合 $S_t(\theta)$ に対数的特異性をもたらす $\Psi_t(\theta)$ のゼロ点により生じるものである。(以下では、 t も省略する。) このとき、

$$\frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} = \frac{A'(\theta)}{A(\theta)} + iS'(\theta) \quad (42)$$

より、位相変化は

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta} = \text{Im} \left[\frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} \right] \quad (43)$$

で与えられる。故に、 $\Psi(\theta)$ のゼロ点を $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\ell, \dots, \theta_L$ とすれば (L は経路で囲まれる θ 空間中のゼロ点の数を示す)、

$$0 = \int_C d\theta \frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} - \sum_\ell \int_{C_\ell} d\theta \frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} = \int_C d\theta \frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} - 2\pi i L \quad (44)$$

つまり、

$$\int_C d\theta \frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} = 2\pi i L, \quad (45)$$

となる。ここで、 ℓ 番目のゼロ点近傍において、

$$\Psi(\theta) \sim (\theta - \theta_\ell) f_\ell(\theta), \quad (46)$$

を用いて、

$$\int_{C_\ell} d\theta \frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} \sim \int_{C_\ell} \frac{d\theta}{(\theta - \theta_\ell)} = 2\pi i, \quad (47)$$

となることを使った。(図 13 参照。)

複素 $\theta = \theta^R + i\theta^I$ 平面内で境界は 2π だけずれているので、虚数軸 (θ^I) に平行部分はキャンセルして、

$$\int_{i\eta}^{2\pi+i\eta} d\theta \frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} - \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} = 2\pi i L \quad (48)$$

となる。つまり、

$$\text{Im} \int_{i\eta}^{2\pi+i\eta} d\theta \frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} - \text{Im} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} = 2\pi L. \quad (49)$$

さらに (43) 式を用いて、

$$\Delta S(\theta^I = \eta) - \Delta S(\theta^I = 0) = 2\pi i L \quad (50)$$

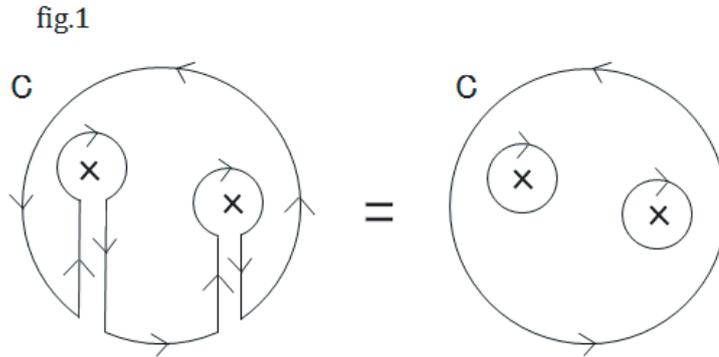


図 13: 複素 θ 平面内のゼロ点と積分経路。

となる。ここで、 $\Delta S(\theta^I = \eta)$ は $\theta^I = \eta$ に沿った位相差、 $\Delta S(\theta^I = 0)$ は $\theta^I = 0$ に沿った位相差を表す。要するに、極を持たない整関数に対しての複素関数論での偏角の原理（ルーシェの定理）に相当する。

例えば、複素ゼロ点 $a = a^R + ia^I \in C$ が 1 個あると、実軸に沿う位相の微分、 $S'(\theta)$ は

$$\Psi(\theta) = (\theta - a)f(\theta), \quad (51)$$

として、

$$S'(\theta) = \text{Im} \left[\frac{\Psi'(\theta)}{\Psi(\theta)} \right] \sim \frac{a^I}{(\theta - a^R)^2 + (a^I)^2}. \quad (52)$$

とローレンツ型になる。モデル的に表現すれば 1 個のゼロ点は、幅 $\sqrt{\pi}|a^I|$ に渡り大きさ $1/a^I$ だけ位相 $S'(\theta)$ に寄与する。実際には、多くのゼロ点からの寄与はこれらの重ね合わせになる。（ここでは、 $a^I > 0$ の正のみ考えたが $a^I < 0$ なら負になる。） 実軸に近いゼロ点は $S(\theta)$ に π のスリップを寄与するだろう。位相差 $S(\theta + \Delta\theta) - S(\theta)$ がランダム状に運動するのは、このゼロ点の分布がほぼランダムなことによる可能性を示唆している。

5.2 複素 θ 平面の自然境界とゼロ点数

波動関数 $\Psi(\theta) (\theta \in C)$ のゼロ点と複素 θ 面内 $\theta = \theta^R + i\theta^I$ の自然境界との関係は次のように存在すると予測される。図 14 の (a),(b),(c) が以下の (A),(B),(C) の場合に対応する。

- (A) 波動関数に収束半径 θ_c^I が存在しても孤立特異点が原因で θ_c^I が決まっている場合（例えば、不純物局在状態の固有関数など）、時間発展波動関数（無論、時刻ゼロでは問題の局在固有関数を掴んでいるとする）のゼロ点数（実軸と $\theta^I = \eta$ が囲む四角形中ゼロ零点数）は、 η が θ_c^I の内外に拘わらず、それほど増大も減少もせず、オーダーは同じであろう。
- (B) 局在状態においては、 θ_c^I が自然境界で決まり、 θ_c^I を境としてゼロ点の集積の仕方が変わると思われる。 $\eta < \theta_c^I$ では初めゼロ点は四角内に進入してきても十分時間

が経つとある一定数の周辺をゆらぐだけであろう。実軸に沿って波動関数の位相差 $\Delta S = S(2\pi) - S(0)$ は、定常値に達する。おそらく、ゼロ点分布も固定するのではなかろうか？ ところが、 $\eta > \theta_c^I$ になると、時間と共にゼロ点は遠方から次々と接近してくるかのよう増大していく。

- (C) 一方、非局在状態では、 $\theta^I = \eta$ のラインの如何に拘らずゼロ点は四角形内にどんどん増えていくのではないか。これは既に観測した通りである。

この考察がうまく機能するならば、量子状態の位相 $S(\theta)$ の初期位相 θ 依存性の時間変化がゼロ点のランダムな集積という観点から理解できることになる。

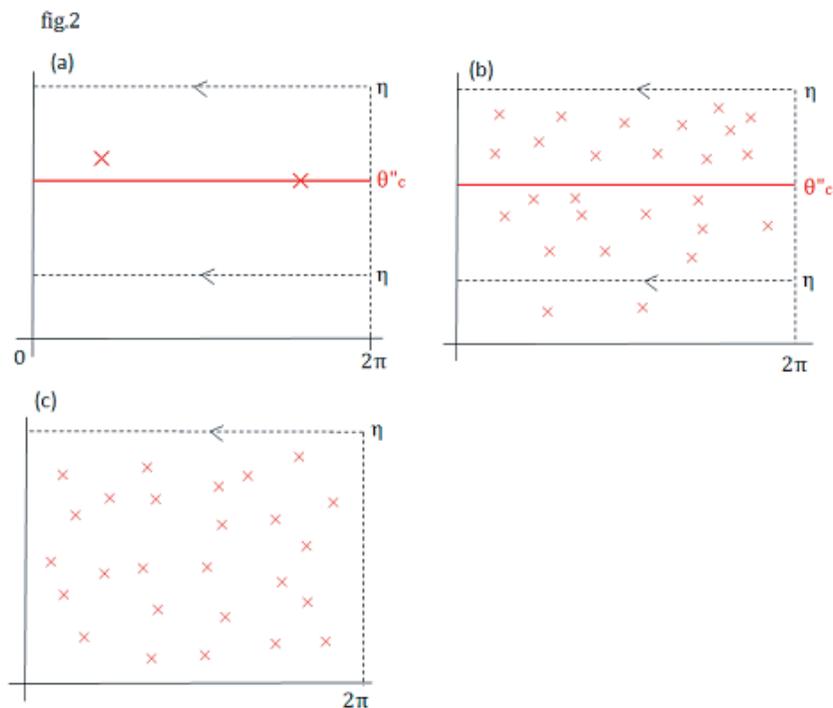


図 14: 複素 θ 平面内のゼロ点分布と積分経路の想定図。

これまで観測したのは量子状態 $\Psi_t(q, \theta)$ は拡散的な時間発展状態場合であった。一方、局在する場合 (B) を考えれば、線形振動子に関して局在していてその m 像が指数関数的に減衰しておれば、収束半径 θ_c^I が存在する ($\Psi_t(q, m) \sim e^{-m\theta_c^I}$) ので $\eta < \theta_c^I$ にとると、ゼロ点の数はそれほど変化しないと思われる¹⁷。しかし、どうせ局在状態を調べるのならば、線形振動子と結合しない、生の Anderson 写像での時間発展状態 $\Psi(t, n)$ も局在するので、その局在状態のフーリエ変換をし p 像をとって解析接続すると同様の挙動が観測されると期待できる。この局在のリュプノフ指数が p 像の収束半径ということになり、それが、上記の θ_c^I の役割を果たし、同様の p 像におけるゼロ点の挙動が観測される可能性がある。これを次節で調べることにする。前稿 [II] で示したように、サイト表示 (q 像) と

¹⁷ $\theta_c^I = \eta$ のライン上での波動関数を直接計算により得る方法が次節で議論する「複素化ダイナミクス」である。

は異なり、 p 表示 $\Psi(t, p)$ がサイズ無限大で実変数 p の連続関数とみなせて $p \in C$ に解析接続できることに注意しよう。

6 時間発展波動関数の特異性

ここまでは、摂動により非局在化する波束の時間発展に対し連続変数としての初期位相 θ に対する依存性を見てきた。この節では、局在状態と非局在化した状態がどのように関わるのかを、時間発展する局在状態側から考察していく。局在状態が自然境界を内包していることが、ここまでの結果や考察からも示唆されるので、それを時間発展した量子状態の中に具現化するダイナミクスを考える。そのためには連続変数 p の複素化を伴うので、仮に「複素化ダイナミクス」と呼ぶことにする。この節でもサイト表示の離散変数 n を q と表示している。

6.1 サイト表示しか存在しない系の複素ダイナミクス

改めてサイト表示の量子状態 $\Psi_t(q)$ の 1-step 時間発展 ($U = K(p)P(q)$ で時刻 $t \rightarrow t+1$ への変化) を次のように表せる。

$$\tilde{\Psi}_{t+1}(p) = K(p)\tilde{\Psi}_t(p) \quad \text{free} \quad (53)$$

$$\Psi_t(q) = P(q)\Psi_t(q) \quad \text{kick} \quad (54)$$

where $K(p) = e^{-\frac{i}{\hbar}a \cos p}$, $P(q) = e^{-\frac{i}{\hbar}V(q)}$. ここで、 $p = 2\pi k/N, k = -N/2 \sim N/2$ すなわち $-\pi \leq p \leq \pi$ 。 $\Psi(q) = \sum_p e^{ipq}\tilde{\Psi}(p)$ であり、 $\tilde{\Psi}(p)$ は状態 Ψ の p 表示とする。(以下では一般に外力は入れないので前節まで用いた変数 θ も省略する。) 例えば、アンダーソン局在系ではサイト表示 $\Psi_t(q)$

で、時間無限大での局在の様相が非常に大きなサイトまでわかる場合もある。このとき、直接自然境界に向かって解析接続した解を、時間発展で生成できるはずである。もし局在系であるならば $N \rightarrow \infty$ にいくことによって $\tilde{\Psi}(p)$ は連続関数と見られる。

一回の写像 $\tilde{\Psi}_t(p) \rightarrow \tilde{\Psi}_{t+1}(p)$ ($\tilde{\Psi}_{t+1}(p) = K(p)P(q)\tilde{\Psi}_t(q)$) を考えると、

$$\tilde{\Psi}(p) = \langle p | K(p)P(q) | 0 \rangle \quad (55)$$

$$= \sum_{p', p''} \langle p | K(p) | p'' \rangle \langle p'' | P(q) | p' \rangle \langle p' | 0 \rangle \quad (56)$$

一方、

$$\langle p | P(q) | p' \rangle = \sum_{q, q'} \langle p | q \rangle \langle q | P(q) | q' \rangle \langle q' | p' \rangle \quad (57)$$

$$= \sum_q e^{i(p'-p)q} P(q) \quad (58)$$

と表示されるので、 p -表示での時間発展は次式で与えられる。

$$\tilde{\Psi}_{n+1}(p) = K(p) \sum_{p'} \sum_q e^{i(p'-p)q} P(q) \tilde{\Psi}_n(p') \quad (59)$$

ここで $p \rightarrow p + i\eta$ と解析接続 (虚軸シフト) する。また、 $N \rightarrow \infty$ において、 $\sum_{p'} \rightarrow \int dp'$ ゆえに、

$$\tilde{\Psi}_{n+1}(p + i\eta) = K(p + i\eta) \int_{-\pi}^{\pi} dp' \sum_q e^{i(p'-p-i\eta)q} P(q) \tilde{\Psi}_n(p') \quad (60)$$

と書ける。ここで、 $P(p' - p) = e^{i(p'-p)q} P(q)$ であり、この $\tilde{\Psi}_n(p')$ は当然 $(p' - p)$, p' の解析関数である。従って、実軸に沿う p' 積分は実軸に平行な $p = i\eta$ に沿う積分に変更して、

$$\tilde{\Psi}_{n+1}(p + i\eta) = K(p + i\eta) \int_{-\pi}^{\pi} dp' \sum_q e^{i(p'+i\eta-p-i\eta)q} P(q) \tilde{\Psi}_n(p' + i\eta) \quad (61)$$

$$= K(p + i\eta) \int_{-\pi}^{\pi} dp' \sum_q e^{i(p'-p)q} P(q) \tilde{\Psi}_n(p' + i\eta) \quad (62)$$

$$= K(p + i\eta) P(q) \tilde{\Psi}_n(p + i\eta) \quad (63)$$

となる。($\langle p|P(q)|p' \rangle$ の式変換と同じものを使った。) つまり、自由運動演算子及び写像前波動関数を $K(p) \rightarrow K(p + i\eta)$ 及び $\tilde{\Psi}(p) \rightarrow \tilde{\Psi}(p + i\eta)$ と変更すればよい。

$$\tilde{\Psi}_{n+1}(p + i\eta) = K(p + i\eta) P(q) \tilde{\Psi}_n(p + i\eta). \quad (64)$$

t -step 時間発展は上の連鎖で起こるわけであり、虚軸方向への解析接続は容易にできる。すなわち $T(p)$ を $T(p + i\eta)$ にして初期条件を

$$\Psi_0(p) = \sum_q \Psi_0(q) e^{ipq/\hbar} \Rightarrow \Psi_0(p + i\eta) = \sum_q e^{-q\eta/\hbar} \Psi_0(q) e^{-ipq/\hbar}, \quad (65)$$

と変えればいだけである。この時間発展演算はユニタリーではないため、このままでは初期状態を規格化してあってもその後の時間発展で確率が保存することはない。ここでは、1-step ごとに波束を数値的に再規格化しながらその発展を追っていくことにする。

さらにこの複素シフトのダイナミクスは以下のように解釈することもできる。 t -step の時間発展演算子

$$\Psi_t(q) = \langle q|U^t|\Psi_0 \rangle = \langle q|[e^{-iV(\hat{q})/\hbar} e^{-iT(\hat{p})/\hbar}]^t|\Psi_0 \rangle, \quad (66)$$

において複素シフト $p \rightarrow p + i\eta$ を考える。初期状態 $|\Psi_0 \rangle$ の p 表示、 $\langle p|\Psi_0 \rangle = \Psi_0(p)$ が整関数ならば $e^{-iT(p)/\hbar} \Psi_0(p)$ も整関数である。そのとき展開

$$e^{-iT(\hat{p})/\hbar} \Psi_0(p) = \sum_q \Psi_0(q) e^{ipq/\hbar} = \sum_{m \in Z} \Psi_0(m\hbar) e^{imp} \quad (67)$$

の展開係数 $\Psi_0(q)$ は $|q| = |m|\hbar$ とともに超指数関数的に小さくなる。これに $e^{-iV(q)/\hbar}$ を作用すると

$$e^{-iV(q)/\hbar} e^{-iT(\hat{p})/\hbar} \Psi_0(p) = \sum_q \Psi_0(q) e^{-iV(q)/\hbar} e^{ipq/\hbar}, \quad (68)$$

となる。従って、展開係数 $\Psi_0(q) e^{-iV(q)/\hbar}$ は q に関し超指数関数的に小さくなり、

$$e^{-iV(q)/\hbar} e^{-iT(p)/\hbar} \Psi_0(p), \quad (69)$$

は p の整関数である。以下これを繰り返せば明らかに時間発展した $\Psi_t(p)$ も p の整関数である。つまり、時刻 $t=0$ で整関数なら有限の step である限り、時間発展した量子状態はいつでも整関数ある。すなわち、整関数であるなら複素ダイナミクスで得られる状態は、初期状態を $\Psi_0(p)$ とし実数変数 p で計算した結果を複素シフト ($p \rightarrow p + i\eta$) すれば、同様の結果が得られるはずである。このことは次節で具体的に確かめられる。

6.2 具体例: ハーパーモデルの複素化時間発展

具体的に、局在する場合のハーパーモデルの複素化時間発展をみてみよう。図 15 に、局在ハーパーモデルでの複素ダイナミクスと通常のダイナミクスで得た状態が重ねて描いてある。この計算では局在長が解析的にわかっているため、最大シフト量を $\eta_c \equiv \log V$ として適当な大きさ $\eta (< \eta_c)$ を p 空間で虚軸方向にシフトして計算した結果である¹⁸。図 16 は、 $t=50$ の一部を拡大したもの。通常のダイナミクスのほうは、複素化に相当する分を通常の時間発展計算の後に傾けた（かさ上げした）ものである。ここで用いたパラメータでは $t=50$ では、既に指数関数的局在が完成している時刻である。ピークから $n \sim 700$ くらいのところまで複素化ダイナミクスで得た結果と通常ダイナミクスで得た結果は完全に一致している。 $n > 700$ のかさ上げで出現した部分はオリジナルの指数減衰よりもやや強い指数減衰にみえる。これが、ガウシアンをしているものかどうかは、おおいに興味があるため、後節で詳しく check する。図 17 はかなり局在の強い場合 ($V=1.5$) でのハーパーモデルの複素ダイナミクスの結果である。左側の指数減衰が時間に寄らず重なっているのは、この表示した時刻では局在状態が既に完成していることを表す。右側に膨らんで立ち上がっていく部分は虚軸へのシフト効果により通常の時間発展ならば出現し得ない埋もれた部分が引き上げられたものである。

かさ上げにより引きずり出された部分を拡大したものが、図 18 である。 $\log |\Psi_t(n)|$ とそれを二次関数で fitting したものが plot されている¹⁹。ガウシアン（ガウス分布）のパラメータが 2 つと、ガウシアンが規格化されている必要はないのでその係数もパラメータになるので合計 3 つのパラメータで、fitting の二次関数の 3 つのパラメータ (A, B, C とする) と数を合わせて対応させることができる。すなわち、 $|\Psi_t(n)|^2 = Ae^{-Bn^2+Cn}$ での最小

¹⁸ この場合、局在長が解析的にわかり、しかも全ての固有状態の局在長が同じなので、すぐに虚数軸方向への最大シフト量 η_c を決めることができる ($\eta < \eta_c$)。シフト量 η を「指数関数的減衰率」の本の少し低め（数パーセント）に設定して行っている。ぴったりにすると、あっという間にシステムサイズの端まで波束の振幅が上がり破たんしてしまう。

¹⁹ 対数を取った後にやらないとゆらぎが大きすぎて、安定した fitting は困難。

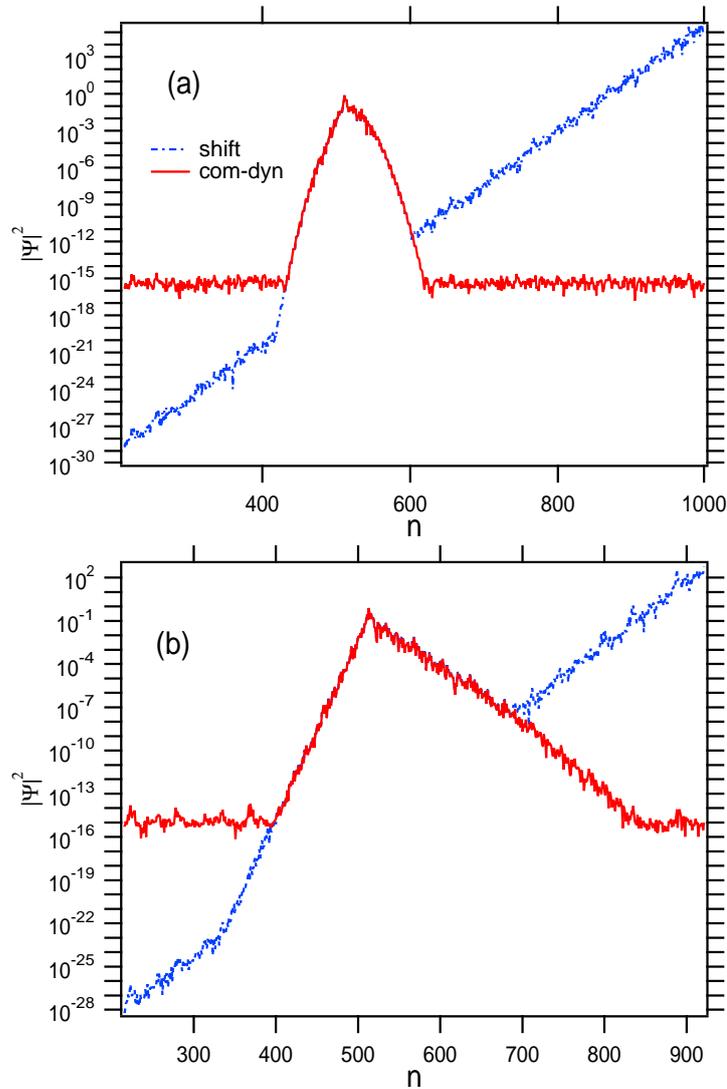


図 15: 局在状態 $V = 1.2$ のハーバーモデルで $p \rightarrow p + i\eta$ で $\eta = 0.1$ とした複素ダイナミクスの様子。(局在長は $1/\ln|1.2| \sim 0.18$ 。) (a) $t = 5$, (b) $t = 50$ に対応。赤で表示したものが複素ダイナミクスの結果、青で表示した斜めになっているものは、通常ダイナミクスの結果を傾けたものである。右側の青からずれた部分は複素ダイナミクスにより引き上げられた（掘り起こされた）下方部分を表す。 $n = q$ である。

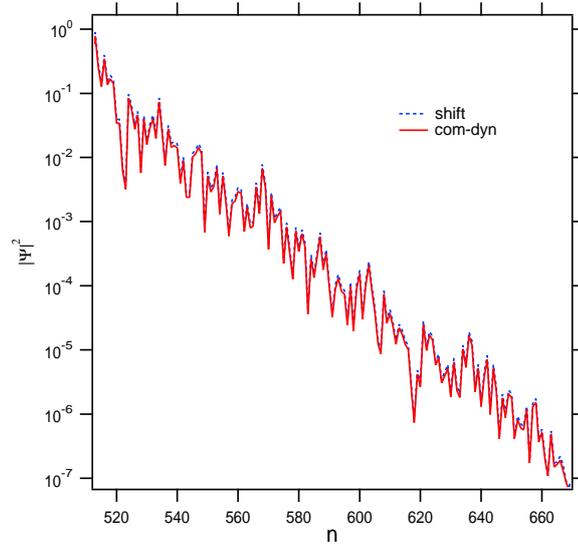


図 16: 図 15(b) の局在状態 ($V = 1.2$) のハーバーモデルでの複素ダイナミクスの拡大図 ($t = 50, p \rightarrow p + i0.1$)。 $n = q$ である。

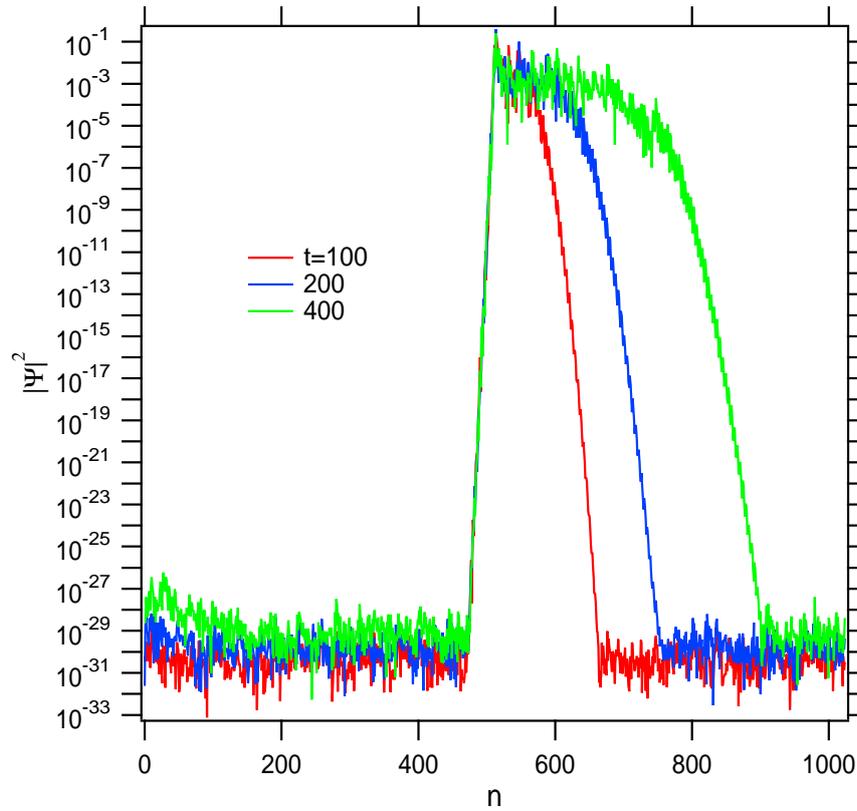


図 17: 局在状態 $V = 1.5$ のハーバーモデルで $p \rightarrow p + i\eta_c$ とリアプノフ指数ギリギリまで虚数軸方向へシフトした複素ダイナミクスの実験結果。 $t = 100, 200, 400$ での $|\Psi_t(n)|^2$ の表示。 $n = q$ である。

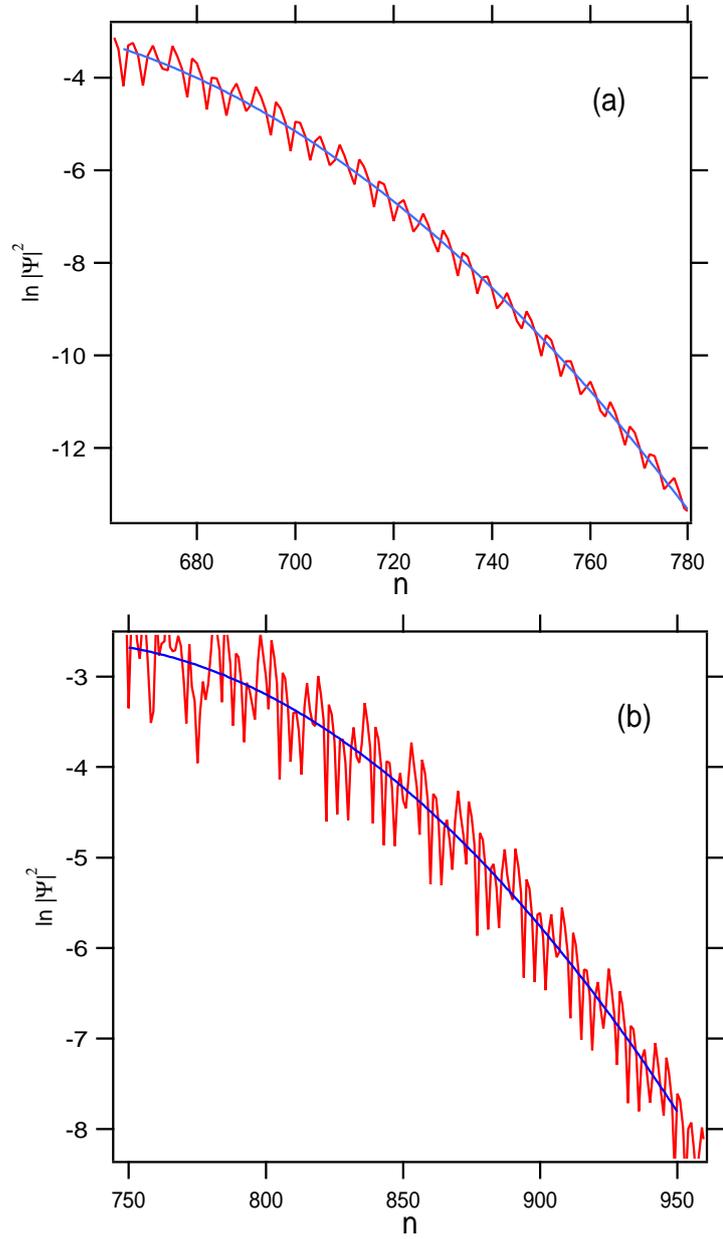


図 18: $V = 1.5$ の図 17 の分布関数 $|\Psi_t(n)|^2$ のガウシアン fitting。(a) $t = 400$, (b) $t = 1200$ に対応。中心のピーク右側の部分のみを fitting に使っている。 $n = q$ である。

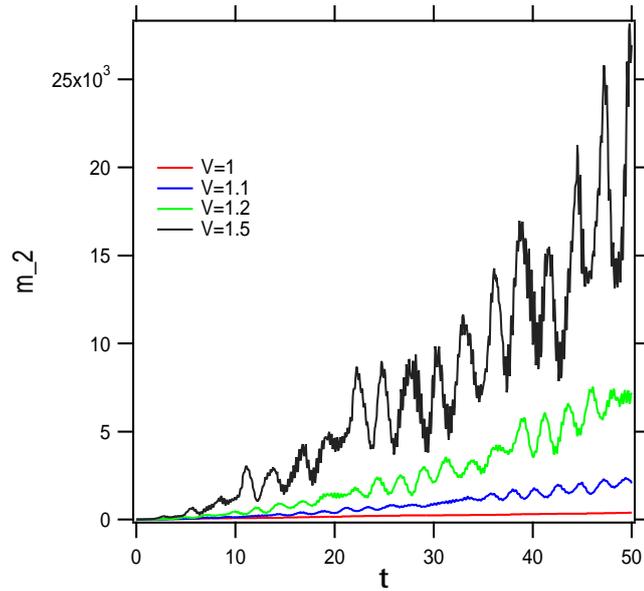


図 19: 局在状態のハーバーモデルでの複素ダイナミックスの平均二乗変位の時間変化。虚軸方向へのシフト量は其々 $\eta = \gamma = \log |V|$ で、下から、 $V = 1.0, 1.1, 1.2, 1.5$ に対する結果を表示している。

二乗 fitting である。これをみれば、かさ上げで引きずり出された領域の分布形はほぼガウシアン型といえる。図 19 は、様々な V に関して、上記の複素化ダイナミックスで計算した平均二乗変位の時間変化を示す。この様に、平均二乗変位がおおよそ t -linear で増大することは複素ダイナミックスでの分布関数がガウシアン型であり、ガウス過程のように拡散していく傾向を持つことと無矛盾である。

これに対し、指数関数的局在におけるリャプノフ指数がダイナミックでの結果でしか評価できないアンダーソンモデルなどで、複素シフトをして引き上げて埋もれた部分の様子を確認しようとするれば、その操作は 2 段階になる。ハーバーモデルよりもゆらぎが大きいので、シフトなしのダイナミックスで局在まで走らせ、数値的に分布関数による局在長を決めて、それを基に多少の try and error でシフト量 η を決めて、複素ダイナミックスを行う必要がある。²⁰ 試みとして、図 21 に、アンダーソンモデルでの複素ダイナミックスの結果を示す。青の通常時間発展波束を単純に傾かせたものが赤で表示してある。赤と複素ダイナミックスの結果である緑の右側のフラットになった部分は単純傾斜による部分とかなりよく対応していることが確認できる。ハーバーモデルの場合より一致が良くない理由は固有関数の局在長も様々なためと思われる。

結局、実軸上で任意精度で波動関数が計算できるならば複素ダイナミックスも必要はなく、虚軸シフトは単に実軸 q での発展 $\Psi_t(q)$ に $e^{\eta q}$ をかけ算することと同等であることは、前記の議論のとおりである。これは、初期状態を整関数とすれば、有限時間の時間発展により特異性が生み出されないことから当然の結果である。しかし、ここで用いた倍精度

²⁰そもそも、中心がどうあるべきかが判然としない点、さらにデータが曲がっていて一部分しか得られていないという状況や fitting 領域に対する繊細さもあり、さらに工夫がいるかもしれない。

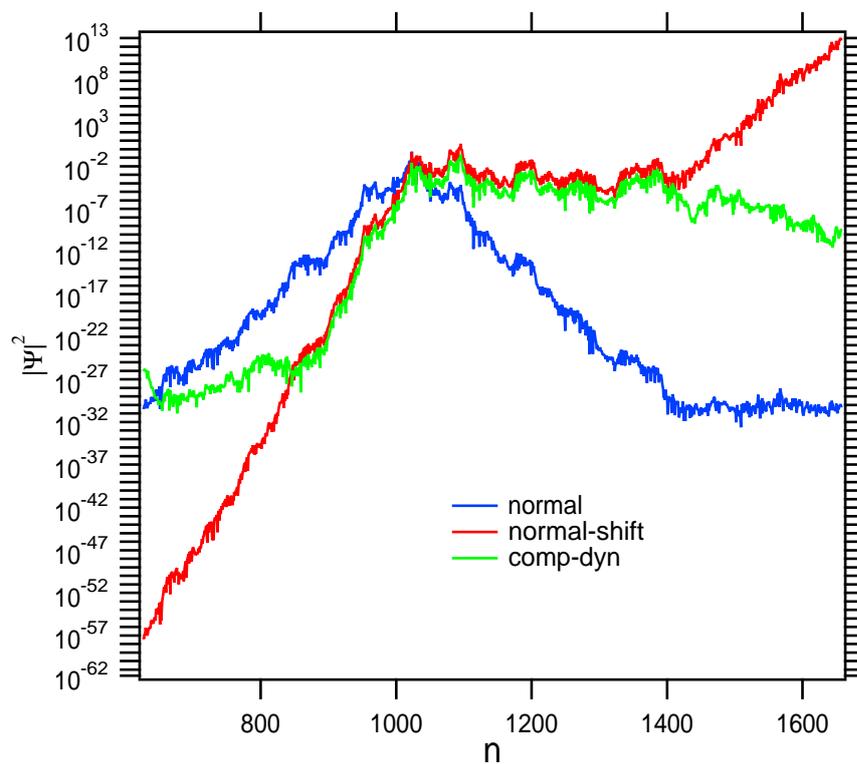


図 20: $W = 1.5$ のアンダーソンモデルでの複素ダイナミクスの実験 (緑)。 $t = 100$ における $|\Psi_t(n)|^2$ を表示。パラメータは、 $N = 2^{11}$, $\hbar = 1/8$ である。複素化 $p \rightarrow p + i\eta$ の虚数軸方向へシフト量 η は、 $\eta = 0$ の通常ダイナミクス (青) の $|\Psi_t(n)|^2$ の指数関数的減衰部分の fitting により決めている。緑は青を傾けたもの。右側の赤からずれた部分は複素ダイナミクスにより引き上げられた (掘り起こされた) 部分を表す。 $n = q$ である。

での計算精度の限界内に埋もれた波束の部分を引き出してみるには、この複素ダイナミックスは有効である。(このことの物理的意味は次節で再び検討する。) さらに、4倍精度の計算でこの複素ダイナミックスを行えば、より広範囲にわたり精度限界に埋もれて表に出ない波束の減衰部分を引き上げてより詳しくその特性を確認することができると期待される。

6.3 局在化過程と複素ダイナミックス

ここでは、前節でみた時間発展波動関数の局在化過程を局在長相当分を複素化したダイナミックスから考えてみよう。これを通して、複素化時間発展で引き上げられた部分のダイナミックスは何であるのかを考察する。

局在状態の時刻 t での波動関数 $\Psi_t(q)$ は対数傾斜を $e^{-|q|/\ell}$ (ℓ を局在長とした) とし、一般に次のように表せる。

$$\Psi_t(q) = e^{-|q|/\ell} \text{ for } |q| < q_c(t), \quad (70)$$

$$\Psi_t(q) = e^{-f_t(q)} \text{ for } |q| > q_c(t), \quad (71)$$

ここで、 $f_t(q)$ は線形よりもっと鋭く立ち上がる関数、すなわち $\Psi_t(q)$ のテイル部に潜む観測不能な強い減衰部分を表すものとする。 p 方向の虚軸に $i\eta$ 入り込む事によって普通は計算精度内に埋もれてしまうこの $|q| > q_c(t)$ にある「超減衰域」ダイナミックスが観測可能世界に掘り起こされるものと考えられる。予想できることは、(i) 時間が経過する程、指数局在域 $|q| < q_c(t)$ は増大する。よって $q_c(t)$ は時間の増加関数である。(ii) 超減衰の特性関数 $f_t(q)$ の勾配は時間が経過する程小さくなる。これらを表現するモデルとして、例えば、

$$f_t(q) = \frac{(q - q_c(t))^2}{a(t)} - \frac{q}{\ell}, \quad (72)$$

とする。ここで、 $a(t)$ は時間の増加関数、超減衰域領域がガウシアンと仮定した。この様子は図 21 に示したように、殆ど臨界シフト $\eta = 1/\ell$ まで虚軸に入り込み指数減衰部分をプラトーに変換すれば更に明確になる。

$\eta > 1/\ell$ とするという事は図 21 のように沈んでいる超減衰部分をかさあげする事になり、この時かさあげされた波動関数のピーク付近部分は普通の局在ダイナミックスと見る場合、指数減衰の彼方にある部分として無視されている部分が extend した挙動を示す。この挙動が前節でみた平均二乗変位の時間に関する増大部分に対応し、実空間で<非局在化>がおきた時のダイナミックス (例えば、 $v < 1$ でのハーパーモデル) を先取りしたものであるのという事が示唆される。その意味で、“局在は潜在的に非局在である”という直接証拠をこの複素ダイナミックスは表現している。

前節でも用いたこの複素ダイナミックスの展開表示

$$\Psi_t(p) = \sum_q \Psi_t(q) e^{ipq/\hbar} = \sum_{m \in Z} \Psi_t(m\hbar) e^{imp}, \quad (73)$$

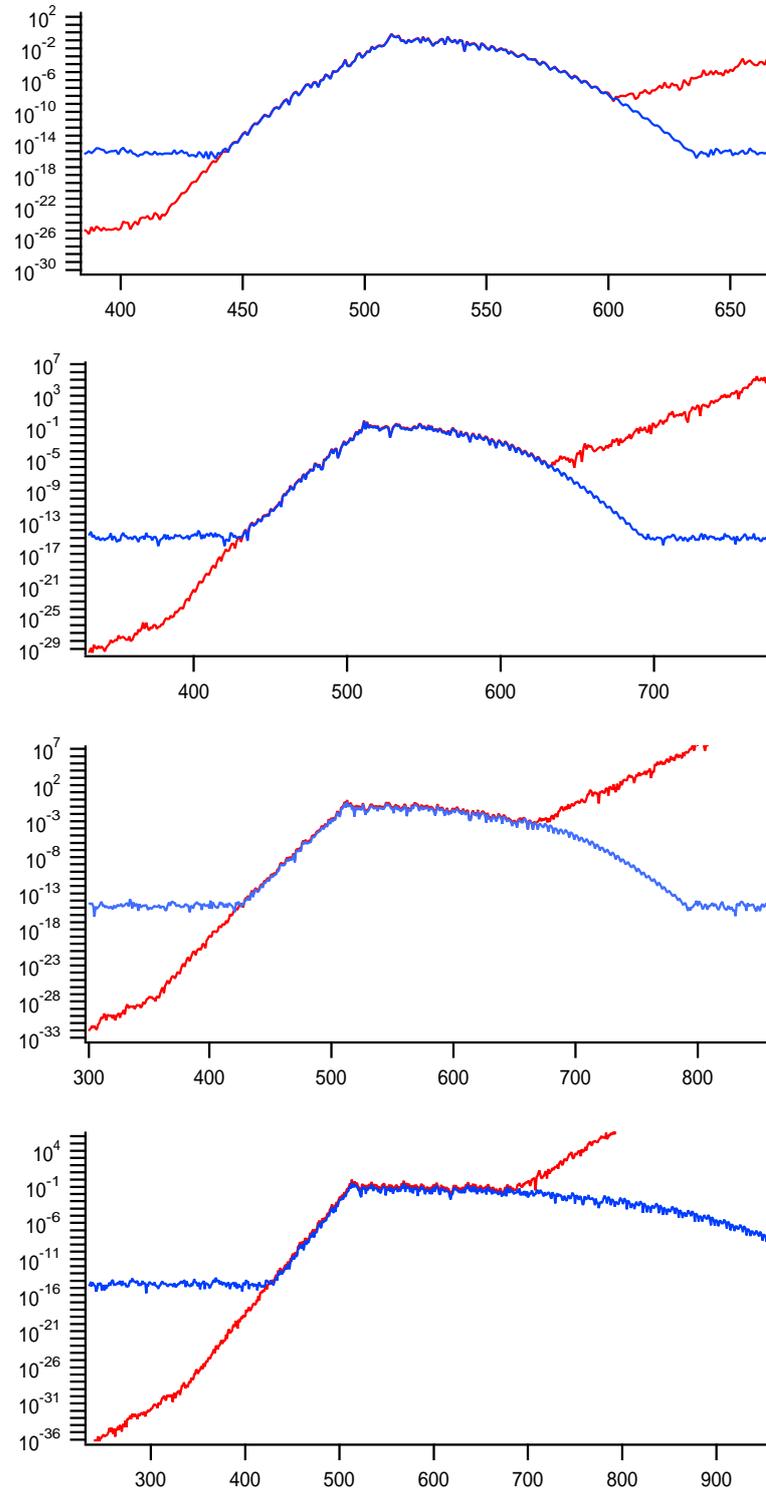


図 21: $V = 1.2$ の局在ハーバーモデルでの複素ダイナミクス実験の分布図 $|\Psi_t(n)|^2$ の表示 (青)。赤は通常のダイナミクスの結果を傾けたもの。上から、 $t = 100, 200, 400, 1000$ の結果。 $p \rightarrow p + i\gamma$ で、 $\gamma = 0.18$ としてある。(リャプノフ指数 $\gamma = \ln|1.2| \sim 0.19$ 。) 他のパラメータは $N = 2^{11}, \hbar = 1/8, \delta = 0.05$ である。右側の赤からずれた部分は複素ダイナミクスにより引き上げられた (掘り起こされた) 部分を表す。

を使って、時間と共に局在が完成する過程を次のように表現することもできる。この展開係数が

$$\Psi_t(m\hbar) = e^{-|q|\eta + f_t(q)}, \quad (74)$$

と表されたとする。ここで、

$$|f_t(q)| \sim q^\alpha (\alpha > 1), \quad (75)$$

と書けるだろうから $p \rightarrow p + i\eta$ とシフトすれば

$$\Psi_t(p + i\eta) = \sum_{q=m\hbar > 0} e^{f_t(q)} e^{ipq/\hbar} + \sum_{q=m\hbar \leq 0} e^{-|q|\eta + f_t(q)} e^{ipq/\hbar}, \quad (76)$$

となり、負の q の奇与は殆どないので、正の q の残余項 $f_t(q)$ が見えてくる。前節の結果から残余項は $|f_t(q)| \sim q^2$ になることが示唆される。局在する量子状態をもつ系の空間次元の増大や他自由度との結合がこの空間での自然境界の実軸降下をうながし、実軸上における正常拡散現象や時間反転不可逆性などにみられる「不可逆現象」を具現化するものと考えられる。

結局、このシナリオが正しければ、複素化なしでは量子状態の時間発展が局在化するモデルにおいて、リャプノフ指数相当を運動量空間で虚軸方向にシフトした複素ダイナミクスを用いれば、式 (72) で指数関数的部分が局在で止まった後にガウシアン相当部分が引き出されるということになる。

これらの結果は前稿 [II] で示した解釈（妄想）の一部を量子状態のダイナミクスにより具体的に示したことになる。以下に、前稿 [II] での解釈を再掲しておく。

解釈: ハーパーモデルは、 $V > 1$ では自然境界が実面から複素空間に移行するだけで固有関数の特異性が殆ど不変である事を考えると、複素空間では実は不可逆的な拡散的運動がおきていても不思議はない。即ち $V = 1$ の臨界状態でのみ不可逆的拡散運動をおこすわけではなく、実面で観測される現象が局在的に見える $V > 1$ においても、複素空間での運動は既に**不可逆の様相を備えている**と考えるべきである。更に大胆に言えば、局在状態は実は潜在的に拡散状態であると言うべきなのかも知れない。局在が発生すると自然境界が発生し、その境界上では運動は既に不可逆的である。自然境界が実軸に接近してくる事によって複素面に潜在した拡散が顕在化する。

7 まとめと予想と妄想

まず、局在・非局在転移や前稿までの結果をまとめる。局在状態は点スペクトル、非局在状態は連続スペクトル、特に、臨界状態では特異連続スペクトルになることが示され、時間発展した波束のも局在、拡散、Ballistic 伝播と対応する。物理的には、絶対零度で静的ポテンシャル内の一電子問題を考えた場合、局在状態では電気伝導度がゼロ、ブロッホ状態なら電気伝導度無限大、に対応する。この一電子系とエネルギーのやり取りをする素

直な外部の系（典型的には一自由度系、決して熱浴になりえない系）を考えた場合、連続スペクトルの場合のみ一方的エネルギーの流れを生じせしめることが可能である [5, 19]。しかしながら、ブロッホ状態に対応する絶対連続スペクトルの状態ではこのエネルギーの流れはリカレントになり散逸的現象は生じえない。つまりスペクトルのみから散逸状態を定義するのは不都合がある。この散逸的状态は一電子系の量子状態としてどのように記述されるのか、このことを摂動としての外部振動の初期位相敏感性と解析接続した運動量空間の変数の複素ダイナミクスに基づく量子状態の特異性から引き出すことを本稿において試みた。

前稿 [II] では、不純物状態は極で表され、ハーバーモデルの固有状態やアンダーソン局在状態は自然境界もつことを示唆した。一般にアンダーソンモデルの局在固有関数はサンプル平均しない場合、フラクタル的ゆらぎを持ち、裾野のほうで指数関数的減衰をするという見方や指数関数を因子化して除いたゆらぎがマルチフラクタルになる傾向が知られている [17]。この固有関数の振幅を係数として使った Z 変換やフーリエ変換 (母関数) は自然境界をもつということである。

本稿においては、局在・非局在転移を生じる一次元強結合モデルにおいて、時間発展した波動関数の解析性を議論した。そのために、局在・非局在転移を生み出すモデルとして、外摂動 kicked Anderson model とハーバーモデルを使った。局在・非局在状態の違いによる初期位相敏感性をゼロ点の数の増大の質的变化として調べた。量子拡散領域では、波動関数の初期位相に関するゼロ点の数はおおよそ \sqrt{t} で増大することを示した。また、半古典論的考察により波動関数の複素ゼロ点が位相の敏感性を生じせしめている可能性を議論した。この初期位相変化に関する敏感性は、「断熱性」という言葉を使って表すこともできる。局在・非局在転移は初期位相変化に対する波動関数の断熱性の転移としてとらえられる。局在状態では初期位相敏感性は時間発展とともに定常的な変動に収束していくが、非局在状態においては、いくらでも細かな変動が生じ収束しないという現象である。重要なことは、原理的な波動関数の解析性の破れは時間無限大で初めて現れる現象であり、有限時間では精々それに通じる可能性のある尻尾が取らえられるということである。すなわち、時間無限大での非解析的量子状態は解析接続で行けない自然境界の向う側にあり、断熱性が破れ「熱」が発生した手に負えない状態である。ブロッホ状態では時間無限大でこの複雑さを生成することはできない。それゆえ、これまで見てきた局在・非局在転移を「散逸転移」とみなすことが可能になり、時間の矢の発生の根幹にかかわる現象と位置付けられる。

妄想的シナリオ: 初期局在波束のダイナミックスで指数関数的局在が生成されるという事実を次のようにとらえる。アンダーソンモデルであれハーバーモデルであれ、対応するポテンシャルを持つような古典系の場合は Brown 運動的なものを生じさせガウス分布を生み出すが、それが量子論の規則で時間発展をさせられるが故に、波束は指数関数的に閉じ込められ局在現象を生じる。拡散空間でいえば、指数関数的広がりの内側が量子領域、外側は（まだ広がっていない初めに用意された）古典領域とみなせよう。つまり、「量子拡散は、量子性の中に古典領域を取り込んでいく動作であり、局在はそれがストップしたもの」とみなせる。すると、かさ上げされた複素ダイナミックスは量子論の閉じ込め効果を外し、元の古典のガウス分布を前面に出すものという解釈も可能になる。また、ガウシアン（の部分、またはガウシアン片割れ部分）であれば、平均二乗変位は t -linear 状に増大していくことも理解できる。

アンダーソンモデルで用いたランダムポテンシャル $V(n)$ の Z 変換（母関数）は、自然境界を持つ。これが量子系での時間発展のポテンシャルとして組み込まれ、時間発展量子状態となって局在する。この局在は波動関数の収束半径を大きくし量子系を散逸から遠ざける効果（自然境界から遠ざける効果）がある。それを取り除くと、再び古典のポテンシャルの効果が露呈し、散逸的現象を間直にみることができ。散逸現象を生み出すための「種」であるポテンシャルが持つ特異性を量子発展が覆い隠し、量子状態が出来上がる。従って、複素ダイナミックスはその量子状態から「複素」または「虚軸」に入り覆い隠された部分を露出させ、個性を引きずり出すという操作をしたことになる。

「自然な量子系とは自発的にコヒーレンスを喪失する契機を内包する脱可干渉的な系である」、とみる根拠が正当化できるならば量子系に対する見方も一変する。量子系ではコヒーレントな運動がむしろ稀であり、不可逆的に見える複雑な運動（ダイナミックス）がむしろ普遍的であるように見える。一般的に、マルチフラクタルな波動関数はその要件を満たしていると思われる。これは、マルチフラクタル的波動関数のシュレーディンガー方程式による時間発展の不可逆性として現れる可能性が期待できる。一例は、既に示されている Harper 臨界状態での時間反転特性にみることができ。

また、田崎秀一氏は、非平衡な輸送現象において、その時間発展演算子の固有関数のフラクタル性が時間反転不可逆性と密接に関連していることをいくつかのモデルで示している。発展方程式は全く異なるが、一次元（高次元でも）局在・非局在転移点近傍の量子状態はマルチフラクタル状態であることが多くの系で知られている。本稿で議論した量子系の場合でも、この波動関数が自然境界を特異性としてもっていることが時間発展における不可逆性を生み出す布石になるのではないであろうか [39, 40, 41]。

この原稿では一次元系のみを扱ったが、多次元ランダム系の局在・非局在転移（アンダーソン転移）や多自由度の量子カオス系（結合量子カオス系）でも非局在状態化への転移現象が、実験的にも数値計算においても観測されている。もちろんこれらの場合も、転移点上での固有関数はマルチフラクタル状になっており、局在側では自然境界が存在すると考えられる。

●最後に、本稿で用いた「自然な量子系」や「自然な摂動」などという場合の「自然」

について、文化的背景により理解の仕方や意味するところが大きく異なるかもしれないので、この言葉の概念を整理しておくことにする [42, 43, 44, 45, 46, 47]。西洋においては、「自然」とは脅威でもあり克服し服従させ制御すべきものであり、神がつくりし「人」の下に位置付けておく存在であった。一方、日本ではこれに対応する「自然」という概念は存在せず、もともと、明治20年代になり始めて名詞としての「自然」が輸入され西洋の「nature」の訳語として使われるようになった。それ以前には、(安藤昌益の様な例外的人物を除き) 名詞としての「自然」(の概念) は存在せず、「自然な」や「自然に」という形容詞や副詞としての「おのずから」(内在する) という意味であった。元来、「人」と「自然」の区別など必要なく一体の存在であることが当たり前根付いていた日本人にとって、これはもっともなことであろう。西洋の学問や文化の輸入とともに、西洋的な意味での「人工」「自然」と区別する使い方が広がっていき今日に至るものと思われる。我々になるべくありふれた「自然なモデル」としてアンダーソンモデルや標準写像などを用いているが、これは西洋的見方からすれば計算に使うための人工的モデルにすぎず、「自然なモデル」とは程遠いものとしてみなされても仕方あるまい。しかし、アンダーソンモデルや標準写像などには計算に使う都合のいいモデルとしての側面も存在するが、その局在状態はおのずから散逸的現象の種を内在しておりその種の正体を探索するための最小限のモデル言う意味において、「自然なモデル」とみなせるのである。

A 時間領域グリーン関数による局在・非局在の記述

グリーン関数 $G(E) = (E - H)^{-1}$ のフーリエ変換は、時間領域でのダイナミックスの情報を与える。ハミルトニアン H の $\{E_n\}$, $\{|\phi_n\rangle\}$ を固有値、固有状態として固有値方程式を $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$ とする。具体的に、量子系の初期状態として $t = 0$ で、1つのサイト n_0 (典型的には原点なので $n_0 = 0$ とする) に局在した波束の時間発展を考える。すなわち、 $\Psi(t = 0, n) = \delta_{n,0}$ とする。この場合次の関係式が成立する。

$$G_{0,0}^{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int G^{\pm}(0,0,E) e^{-iEt/\hbar} dE \quad (77)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_n \int \frac{\langle 0|n\rangle \langle n|0\rangle}{E - E_n \pm is} e^{-iEt/\hbar} dE \quad (78)$$

$$= \langle 0|e^{-iHt/\hbar}|0\rangle. \quad (79)$$

このとき、局在・非局在の判断を、ゼロ点振幅 (再帰確率) $P_{0,0}(t) \equiv |G_{0,0}^{\pm}(t)|^2$ という量で行うことがある。例えば、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{0,0}(t) > 0, \quad (80)$$

という条件が満たされれば、「拡散不在」という。これは時間無限大でも再帰確率が残るという意味で、「あきらかな局在」である。また、この条件を弱めたもの、

$$\int_0^{\infty} P_{0,0}(t) dt = \infty, \quad (81)$$

を「弱い拡散不在」という。(一次元ランダム系における局在に関する石井の証明でも使われている [15].)

実際には、 $P_{0,0}(t)$ はゆらぎが大きいので、有限時間の数値的解析において、時間平均した再帰確率、

$$C(t) \equiv \frac{1}{t} \int_0^t P_{0,0}(t') dt' \quad (82)$$

を用いることが多い。このとき、次の関係式が厳密に証明されている。(漸近形はスペクトルと関連する。)

$$C(t) \sim t^{-D_2}, \quad (83)$$

ここで、 D_2 はスペクトル測度 (物理では局所状態密度ともいう) の相関次元である²¹。(情報次元 D_1 は局在に対応する点スペクトルの場合は、 $D_1 = 0$ 、絶対連続スペクトルの場合は $D_1 = 1$ となる。) さらに、極限、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \sum_{E_n} | \langle \phi_n | \Psi(t=0) \rangle |^4 \quad (84)$$

$$= \sum_{E_n} | \langle 0 | \phi_n \rangle |^4 \quad (85)$$

を参与率 (participation ratio) R という。絶対連続スペクトルで状態が一様に系を覆っている場合は $R = N$ 、局在に対応する点スペクトルの場合は $R = 1$ になる²²。

B (拡張型) ハーパーモデルの導出

一様磁場中の二次元正方格子における、強結合モデルにおいて、ランダウゲージを採用すれば一体波動関数は、ハーパーモデルに従うことがわかる [48, 49]。この二次元系の波動関数を、 $\Psi(n, m) \equiv \Psi(n) e^{ik_y m}$ とおき、パラメータを適当にスケールすれば、

$$\Psi(n+1) + \Psi(n-1) + \lambda \cos(2\pi\alpha n + k_y) \Psi(n) = E \Psi(n) \quad (86)$$

を得る。無理数 α は、 $\alpha = \Phi/\Phi_0$, $\Phi_0 \equiv hc/2e$ 、つまり単位格子を貫く磁束と磁束量子の比であることがわかる。ハーパーモデルのポテンシャルの初期位相 θ は y 方向の運動量成分 k_y であり、実験的にもコントロールしやすいパラメータである。

また、基本格子系を正方格子から三角格子に変えた一様磁場系の場合の波動関数の従う式は、

$$[1 + \mu e^{2\pi i \alpha(n+1/2) - ik_y}] \Psi(n+1) + [1 + \mu e^{-2\pi i \alpha(n-1/2) + ik_y}] \Psi(n-1) + \lambda \cos(2\pi\alpha n + k_y) \Psi(n) = E \Psi(n), \quad (87)$$

²¹ ボックス次元 D_0 、情報次元 D_1 、相関次元 D_2 などは、オーダー q の一般化されたレニー次元 D_q の連続したスペクトルの特別な場合 ($q = 1, 2, 3$) とみなせる。 D_q は q の単調減少関数ゆえ、 $D_1 > D_2 > D_3$ である。

²² 状態密度 (DOS) の解析性の話としては、ランダム系のコヒーレントポテンシャル近似 (CPA) の「ずれぼけ理論」や Lifshitz tail の特異性、高次元周期系での van-Hope 特異性がなどと関連させた議論がある。

となる。さらに、正方格子に一様磁場の場合でも、第二近接格子点までの hopping を許すことにより、

$$[1 + \mu \cos 2\pi\alpha(n + 1/2) + k_y]\Psi(n + 1) + [1 + \mu \cos 2\pi\alpha(n - 1/2) + k_y]\Psi(n - 1) + \lambda \cos(2\pi\alpha n + k_y)\Psi(n) = E\Psi(n), \quad (88)$$

が得られる。これらは、パラメータ空間 (λ, μ) で局在、臨界、非局在状態の転移が起こることが知られている。ただし、ハーパーモデル同様、固有状態が一斉に転移しエネルギー軸上での移動度端は存在しない。

C 数値的に波束の自然境界に迫るには

前稿 [II] では、ランダム系の固有関数は特異性として自然境界を持つことが数学的に強く示唆され [17]、局在ハーパーモデルでの固有状態も数値解析より自然境界を持つことが示唆された [2]。主にパデ解析を用いて特異性解析を行ったが、ここでは [II] でも一部に用いた直接法により、ハーパーモデルなどの時間発展局在状態における自然境界を示す。

C.1 数値的に θ 平面で自然境界に迫る方法

$\Psi_t(q, \theta)$ を計算し時間依存データを使って数値的に複素 θ 面で自然境界に迫る一アイデアを示す。

もちろん、有限時間なので本当の自然境界ではなく、そこに近づいた場合の「擬特異点」の挙動をみることになる。時間発展演算子 $U(p, q, \theta)$ を $\Psi_0(q, \theta)$ に t 回施して $\Psi_t(q, \theta)$ を計算し、 θ を解析接続することを考える。(離散系では、 q はサイト座標 n のことであり、 θ は時間摂動の初期位相である。)

$$\Psi_t(q, \theta = \theta^R + i\theta^I) = U^t(\hat{p}, \hat{q}, \theta = \theta^R + i\theta^I)\Psi_0(q), \quad (89)$$

ここで、 $U^t(\hat{p}, \hat{q}, \theta)$ は Fourier 展開できて、

$$U(\hat{p}, \hat{q}, \theta) = \sum_m e^{im\theta} U_m(\hat{p}, \hat{q}), \quad U^\dagger(\hat{p}, \hat{q}, \theta) = \sum_m e^{-im\theta} U_m^\dagger(\hat{p}, \hat{q}). \quad (90)$$

である事を考えると、 θ を解析接続することは全く問題ない。Unitary 性の条件から

$$\sum_m U_m^\dagger U_{m+k} = \delta_{k,0}$$

が課せられる。何故なら、

$$1 = U^\dagger U = \sum_{m,n} e^{i(n-m)\theta} U_m^\dagger U_n \quad (91)$$

$$= \sum_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} U_m^\dagger U_{m+k}. \quad (92)$$

である。\$t\$が進むと\$\theta^I\$が大きい程\$\Psi_t(q, \theta)\$は\$\theta^R\$の関数として益々激しい振動を示す。しかし、自然境界を超えない範囲(\$\theta^I < \theta_c\$)ならば、いかに時間が経過してもこの振動のオーダーは同じ程度である。上記の計算において、計算量などから現実的ではないので、付録C.2で\$p\$空間での直接法による自然境界を見たわけである。

自然境界が存在する場合(つまり、phononの階段表示(\$m-\$表示)が局在する場合)、その自然境界の存在を証明する最も素朴な方法は、次のように展開の中心を\$z\$から\$z_0\$に移動して、\$(z - z_0)\$のベキ関数で再展開することである。

$$f(z) = \sum_m a_m z^m \Rightarrow f(z) = \sum_m b_m (z - z_0)^m. \quad (93)$$

この方法を実行するには、\$\Psi(m, q)\$あるいは\$a_m\$を計算しておき、それを用いて\$b_m\$を計算することが必要である。これが、文献[2]で詳細に議論した直接法(expansion-center-shift)である。そこで、\$\Psi(\theta, q)\$のデータが正しく計算できたとして、直接\$b_m\$に相当する係数を計算する方法を考えよう。\$\Psi(\theta, q) \equiv f(z)\$は\$e^{i\theta} = z\$とおいて\$z = 0\$を除き、\$z\$の解析関数であるので、従って、\$z_0 = e^{i\theta_0}\$の近傍で

$$f(z) = f_0 + (z - z_0)f_1 + (z - z_0)^2 f_2 + \dots \quad (94)$$

とテーラー展開できる。両辺を\$(z - z_0)^{n+1}\$で割ると、

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f_0}{(z - z_0)^{n+1}} + \frac{f_1}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{f_n}{(z - z_0)} + f_n + f_{n+1}(z - z_0) + \dots, \quad (95)$$

となる。次に、\$z_0\$を囲む十分小さな円(\$z_0\$周りの\$z\$に関して解析的な領域内の閉曲線)で1周積分すると\$\frac{f_n}{(z - z_0)}\$の1周積分のみが残り、Cauchyの積分公式を用いると、

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0)} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (96)$$

とLaurent展開の係数を与える公式を得る。すなわち、これは、\$z_0 = 0\$とおくと、

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \frac{f(z)}{z^{n+1}} \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \quad (97)$$

となる。この式(96)は一般化されたFourier係数に他ならない。

すなわち、\$f(z) = \Psi(\theta, q)\$が、ある\$z = z_0 = e^{i(\theta_0^R + i\theta_0^I)}\$とその近傍で精度良く計算できるならば、式(97)を用いて\$z_0\$まわりの\$f_n\$すなわち式(93)の\$b_n\$が計算でき、\$z_0\$まわりの収束半径を直接知ること、自然境界の存在を直接確認することができる。

C.2 直接法による局在状態の自然境界

当然、本文でみたようなハーバーモデルやアンダーソンモデルでの時間発展波束も自然境界を持つことが予想できる。ここで用いる直接法とは、例えば、収束半径が\$R_c = 1\$である関数\$F(z)\$の展開中心を\$|z| = 1\$の近傍\$\omega = (1 - \epsilon)e^{i\theta}\$に移動させ、その点での収束半

径を改めて評価する方法である。ここで、 ϵ は正の小さな数とする。この新たな展開中心 w でのこの関数の展開は、

$$F(z) = \sum_{n=0} b_n (z - w)^n \quad (98)$$

とあらわされ、新たな展開係数 b_n による $F(z)$ の収束半径は、

$$R_c(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{-1/n} \quad (99)$$

により決定される。さらに、 w を半径 $|z| = 1 - \epsilon$ に沿って回転した時、任意の偏角 θ でその収束半径が $R_c(w) = \epsilon$ となれば、半径 $|z| = 1 - \epsilon$ の円上の至るところの ϵ 近傍で特異点が存在することがいえる。従って、単位円 $|z| = 1$ は関数 $F(z)$ の自然境界であろうと推定できる。

時間発展して指数関数的局在した状態において、その局在長の逆数 ($\eta = 1/\xi$) を用いて指数関数的部分相当を次のように因子化する。

$$\Psi(n, t) = e^{\eta|n-n_0|} u(n, t), \quad (100)$$

局在完成後のゆらぎ部分 $u(n, t)$ の定性的な様子は時刻に依らない。(一般に $n_0 = 0$ とする。) これに対し、母関数

$$F(z) = \sum_n Re[u(n)] z^n. \quad (101)$$

が $|z| = 1$ を自然境界に持つかどうかを直接法で調べる。

図 22 は、局在ハーバーモデルの場合に関する実際に用いた波束とスケールした振幅 $u(n, t)$ の実部と、直接法による結果を示している。(簡単のため波束の右半分 ($n > n_0$) を使い、スケールされた量子状態の実部を用いてある。) $w = (1 - \epsilon)e^{i\theta}$ における様々な偏角 θ への展開中心のシフトに対して、 $R = |b_n|^{-1/n}$ の収束半径 ϵ への収束が確認できるため、このハーバー局在状態での波束のゆらぎが $|z| = 1$ に自然境界を持っていると言える。図 23 は、アンダーソンモデルの局在波束に関し同様の確認を行った結果である。ハーバー局在の場合同様の収束が確認でき波束のゆらぎが特異性として自然境界を持っていると言える。

D 実格子空間の節数変化

ここでは、波束の拡散に伴う実格子空間での節数の変化を示す。図 24 は PKAM と二元周期系 ($v, -v, v, -v, v, \dots$) の場合の実空間 (離散変数) 節の数の時間変化を平均二乗変位の変化とともに示したものである。二元周期系では波束が Ballistic にあつという間に増大し、境界の影響で飽和する事がわかる。節数変化では、波束の先端が境界までたどり着いたらその後ランダムな変動が継続する。一方、PKAM の場合は波束の広がり正常拡

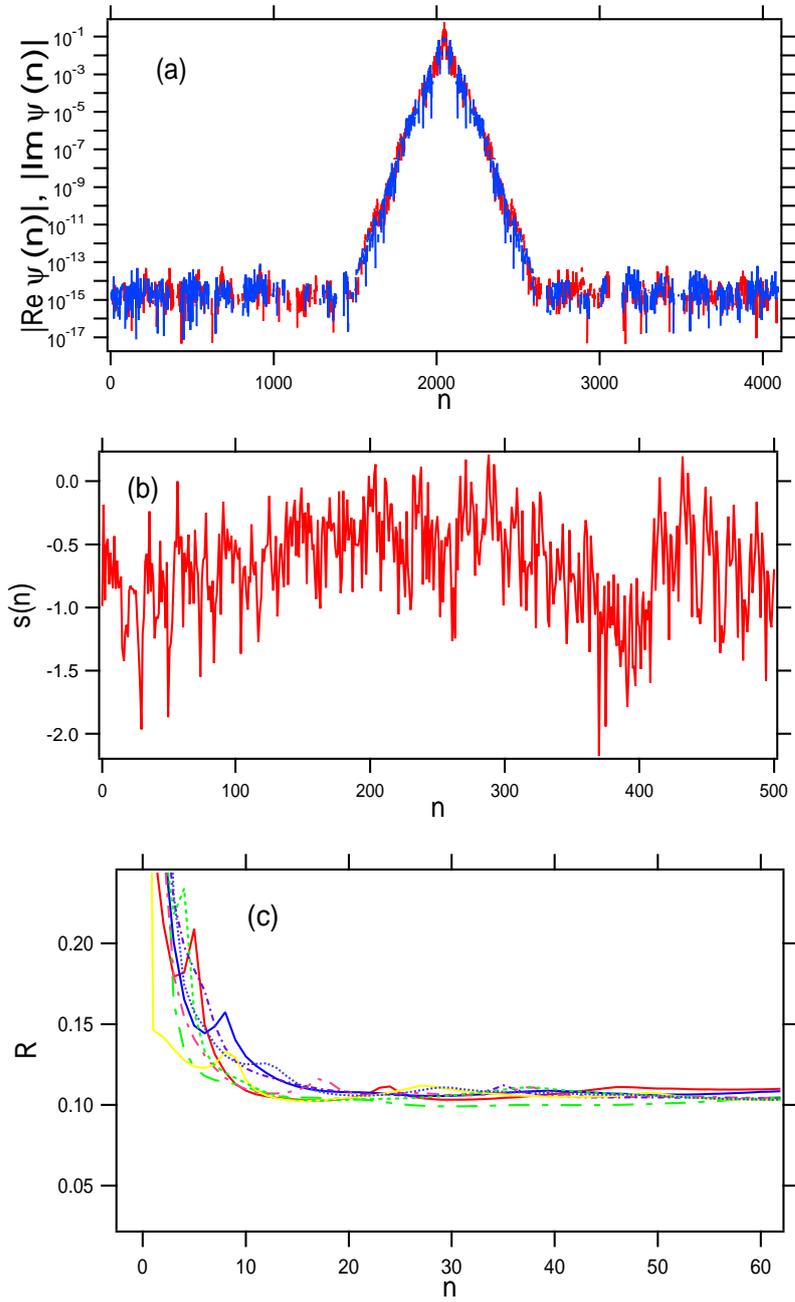


図 22: $V = 1.04$ のハーパーモデルの局在状態の波束の様子。(a) $t = 200$ での分布関数の実部 $|Re\Psi_t(n)|$ 、虚部 $|Im\Psi_t(n)|$ の大きさ。縦軸は対数表示。(b) $|Re\Psi(n, t)|$ を局在長相当分をスケールした後の $Re[u(n)]$ の表示。(c) 母関数に対する直接法で展開中心を $|z| = 1$ の内側 $\omega = (1-\epsilon)e^{i\theta}$ ($0 < \epsilon < 1$) で $\epsilon = 0.1$ とし、 n を動かした場合の $R = |b_n|^{-1/n}$ の収束半径 $R_c = 0.1$ への漸近の様子。適当ないくつの偏角 θ に対する結果を表示してある。

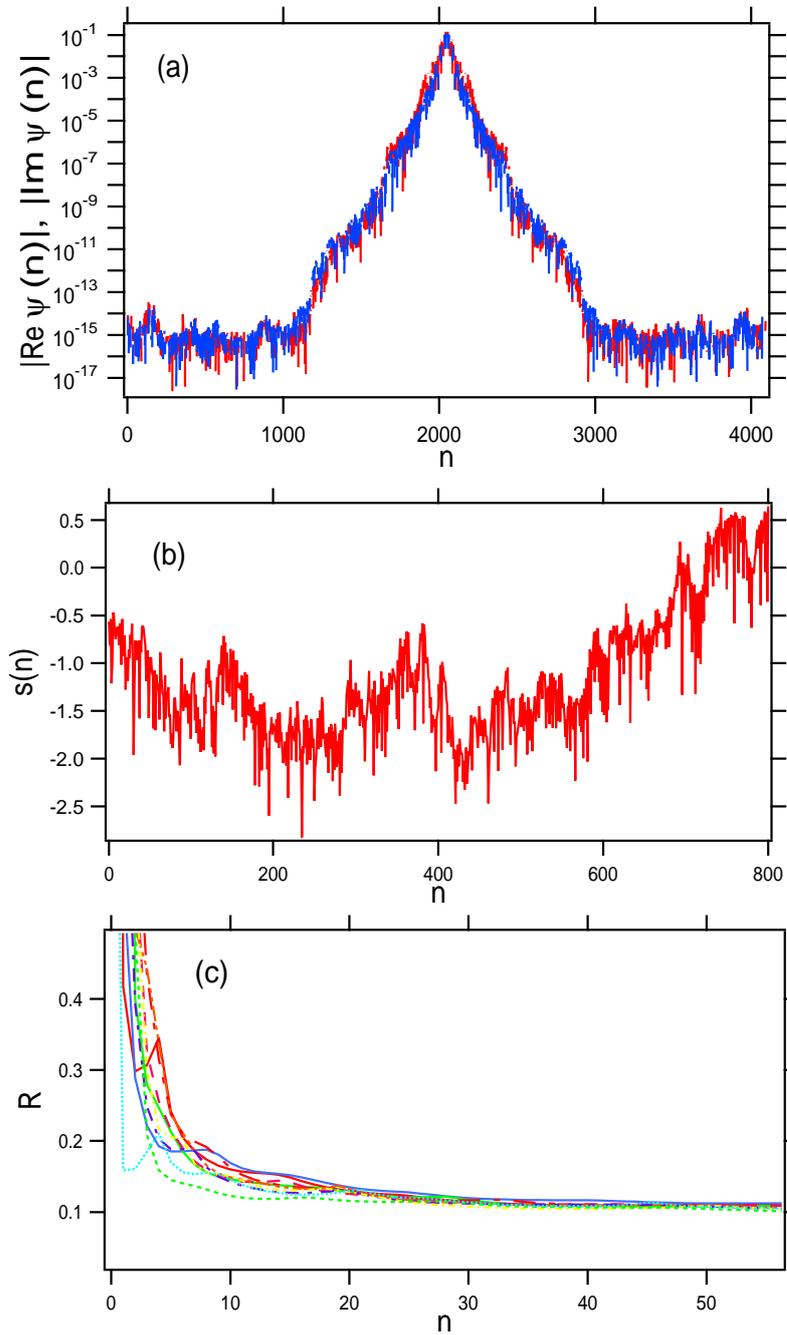


図 23: アンダーソンモデル ($W = 1$) の局在状態の波束の様子。(a) $t = 200$ での分布関数の実部 $|\operatorname{Re} \Psi_t(n)|$ 、虚部 $|\operatorname{Im} \Psi_t(n)|$ の大きさ。縦軸は対数表示。(b) $|\operatorname{Re} \Psi(n)|$ を局在長相当分をスケールした後の $\operatorname{Re}[u(n, t)]$ の表示。(c) 母関数に対する直接法で展開中心を $|z| = 1$ の内側で $\epsilon = 0.1$ とし、 n を動かした場合の $R = |b_n|^{-1/n}$ の収束半径 $R_c = 0.1$ への漸近の様子。適当ないくつかの偏角 θ に対する結果を表示してある。

散 ($\langle n^2 \rangle \sim t$) で徐々に広がっていく途中をみている。その過程での節数変化 $Z(t)$ はゆらぎを伴いながらも

$$Z(t) \sim \sqrt{t}, \quad (102)$$

に従いゆっくりと増大していくように見える。もちろん、この場合も有限系の有限時間の計算ゆえ、この振る舞いが精々波束がシステムサイズの境界に達する時刻で観られなくなるが、システムサイズ無限大の極限では継続的になると期待できる。この拡散に伴う量子波束の節数変化が本文中の外摂動の初期位相 θ 依存性の節数変化 (この場合は $t^{0.45}$ であったが) と類似の振る舞いするということは興味深い。

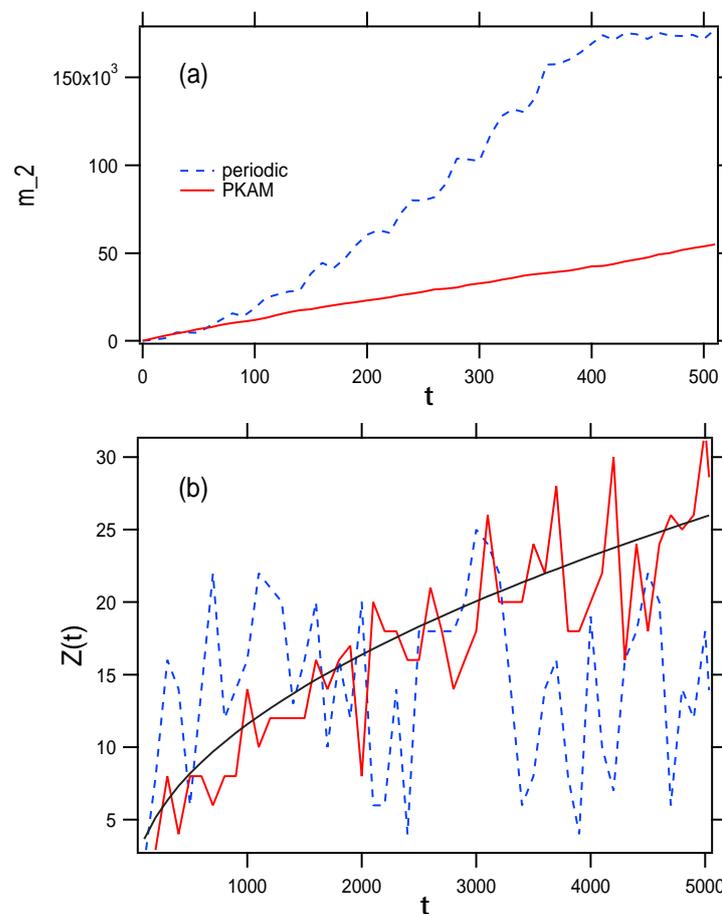


図 24: (a) アンダーソンモデル (青、 $W = 1$ 、サンプル 1 個) の平均 2 乗変位の時間変化、(b) 実格子空間での節の数の時間変化。時間大では壁にぶつかっている。赤は比較のための 2 元周期系での結果を表す。(b) の横軸 (時間) は $\times 10^2$ で表示してある。黒の波線はアンダーソンモデルの結果を $\sim \sqrt{t}$ で fitting したものの。

E ガウス型 - 指数型移行と相関関数

本文で見たように、量子状態の m 像 $\Psi_t(n_0, m)$ の初期位相 θ 依存性は、 $m \gg 1$ でガウシアン的な減衰を示した。これは、この量子状態が有限時間内で整関数であることと無矛盾であるが、もし時間無限大でこの波動関数の解析性が変化し非解析的な状況が生じる場合に可能なシナリオを考察しておく。次のように、領域を別ける境界 $m_c(t)$ があり、二つの領域が、

$$\begin{aligned} |\Psi_t(m)| &= \text{const.} e^{-\gamma(t)m} \quad \text{for } |m| \gg m_c(t), \\ |\Psi_t(m)| &= \text{const.} e^{-m^2/D_{ph}t} \quad \text{for } |m| \ll m_c(t), \end{aligned} \quad (103)$$

のようにクロスオーバーするとしよう。この場合、 $m_c(t)$ が時間とともに変化し、systematic に m の大きい側にずれて行けば、次のシナリオが可能になる。もし、 $m_c(t)$ が時間と共に増大し、 $t \rightarrow \infty$ で $\Psi_t(m)$ はガウシアンで減衰し $\Psi_t(\theta)$ は θ の整関数になるが、 $m_c(t)$ が時間に依存しなければ、 $t \rightarrow \infty$ で $\Psi_t(\theta)$ の θ に関する特異性が生じる傾向を示すことに対応する。²³ この付録では θ -空間相関関数、複素 θ 空間の特異性の変化を通して、これを考察しよう。

E.1 θ -空間相関関数

次式 (104) の θ 空間相関関数 $C(\varphi)$ を考える。

$$C(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_m |\Psi(m)|^2 e^{-im\varphi} \quad (104)$$

$$|\Psi(m)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi C(\varphi) e^{-im\varphi} \quad (105)$$

これは、 $\Psi(\theta) = A(\theta)e^{i\theta}$ を使って次のように近似される。

$$C(\varphi) \sim \langle A(\theta + \varphi) A^*(\theta) \rangle \langle e^{i(S(\theta+\varphi) - S(\theta))} \rangle \quad (106)$$

ここに、 $\langle \dots \rangle$ は θ に関する平均である。ゼロ点による位相スリップが入るとこの鞍点近似が破綻する。ここでは、時間変数 t を省略してある。 θ 空間での短距離相関は

$$\langle e^{i[S(\theta+\varphi) - S(\theta)]} \rangle = \langle e^{iS'(\theta)\varphi} \rangle \quad (107)$$

より、もし $S'(\theta)$ の値分布が式 (36) のように、 $P(S') = \exp\{-S'^2/\bar{m}^2\}$ の形で与えられるならば、

$$\langle e^{i[S(\theta+\varphi) - S(\theta)]} \rangle = \langle e^{-iS(\theta)'\varphi} \rangle = e^{-(\varphi\bar{m})^2/4} \quad (108)$$

となり、式 (25) の関係を使うと本文の (27) を得て、たしかに無矛盾であることがわかる。

²³これは、 $n = m/\sqrt{Dt}$ と scale すれば裾の指数減衰はどう見えるか? 完全に位相に関する拡散係数 $D_{ph}t$ で scale されるのか?(時間に依存した自然境界に対応) といった問題が残る。

次に長距離相関を考える。

$$\langle e^{i[S(\theta+\varphi)-S(\theta)]} \rangle = \langle e^{+i \int_{\theta}^{\theta+\varphi} S(s)' ds} \rangle \quad (109)$$

である。微分 $S'(\theta)$ と $S'(\theta+\varphi)$ が差 $|\varphi| \gg \delta\varphi_t$ で統計的に独立であると仮定する。 $t \rightarrow \infty$ で $\delta\varphi_t$ が非常に小さくなって

$$\int_0^{\varphi} \int_0^{\varphi} ds' ds \langle S'(\theta+s') S'(\theta+s) \rangle = \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} ds \langle S'(\theta+s) S'(\theta) \rangle \quad (110)$$

と収束すれば

$$\langle e^{i[S(\theta+\varphi)-S(\theta)]} \rangle = \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} ds \langle S'(\theta+s) S'(\theta) \rangle \varphi\right\} \quad (111)$$

となって、相関は指数関数的に減衰する。実際は、統計誤差があるので指数関数的落下は $|\delta\varphi_t/2\pi|$ くらいで止まる。

結局、 ℓ を $O(1)$ の定数として φ -表示での相関関数で、

$$\begin{aligned} C(\varphi) &= e^{-(\varphi\bar{m}(t)/2)^2} (\varphi\bar{m}(t) \ll \ell) \\ C(\varphi) &= e^{-b(\varphi\bar{m}(t)/2)} (\varphi\bar{m}(t) \gg \ell) \end{aligned} \quad (112)$$

が成り立つ。 m -表示の式 (103) と双対の関係である。また、相関の落下が $1/\bar{m}(t)$ でおこるので

$$\delta\varphi_t = \frac{1}{\bar{m}(t)} \quad (113)$$

である。ここで、 $\ell \sim O(1)$ と時間に依存しない定数であるならば、統計的に $S(\theta+\varphi)-S(\theta)$ が $\varphi\bar{m}(t)$ の形で scale される。

E.2 相関関数 $C(\varphi)$ のガウス型 - 指数型移行が示唆する事

相関関数がガウス型から指数関数型に移行することは何を意味するのか？指数関数型へ移行するという仮定には θ 空間で統計的分割 $\delta\varphi_t$ がおこる、つまり相関が切れるという量子論の世界にあっては異常な仮定をしている。この異常な仮定の結果、ガウス \Rightarrow 指数への変化が当然の如くでてきたのである。このような移行は相関関数の解析性に何を要求するだろうか？相関関数は偶関数であることから

$$C(z) \sim \exp\{-z^2 f(z^2)\}, \quad z = \varphi\bar{m}(t)/2 \quad (114)$$

と書くと

$$\begin{aligned} f(z^2) &= 1 (|z| \ll \ell) \\ f(z^2) &= b/|z| (|z| \gg \ell) \end{aligned}$$

という漸近的挙動を示すことになる。この挙動を示すような解析関数を作ろうとすれば、整関数では不可能である。もし $f(z^2)$ が整関数と仮定すれば $|x| = R$ に沿って解析接続可能である。それに沿って実軸上 $z = \infty$ 側から負方向へ $\pi/2$ 回転した値と、実軸上 $z = -\infty$ から $-\pi/2$ 回転した値が一致しないためには、半径 R の円内に特異点が存在せねばならない。そのような関数のモデルとして

$$f(z^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2/b^2}} \quad (115)$$

が考えられる。²⁴ この関数は $z = \pm ib$ で特異点を持つ。このような関数を仮定してそのフーリエ変換、

$$|\Psi(m)|^2 = \int_0^{2\pi} C(\varphi) e^{-im\varphi} \quad (117)$$

から $|\Psi(m)|^2$ を鞍点法で計算してみよう。鞍点条件

$$\frac{dz^2 f(z^2)}{d\varphi} = -mi \quad (118)$$

から、 m が増大すれば、解は虚軸に沿って $z = \pm 2im/\bar{m}$ のように走り、最後に特異点 $z = \pm ib$ で停止する。鞍点解

$$z^* = \pm im (|m| \ll b) \quad (119)$$

$$z^* = \pm ib (1 - [b\bar{m}(t)/m]^{-2/3}) (|m| \gg b) \quad (120)$$

を使って、

$$|\Psi(m)|^2 \sim e^{-z^{*2} f(z^{*2})} \times e^{-i(2m/\bar{m})z^*} \sim e^{-(m/\bar{m})^2} (|m| \ll b) \quad (121)$$

$$|\Psi(m)|^2 \sim e^{b^{5/3}(4m/\bar{m})^{1/3} - 2b(m/\bar{m})} (|m| \gg b) \quad (122)$$

となり、 m 空間分布におけるガウス関数 \Rightarrow 指数関数移行を再現する。ここで、 $(m/\bar{m})^{1/3}$ の項は無視する。指数減衰をもたらすのは上の式の $e^{-i(2m/\bar{m})z^*}$ の項の部分であり $e^{-z^{*2} f(z^{*2})}$ の部分からの寄与は殆どない。一言で言えば鞍点近似から得られる指数減衰領域の分布関数は

$$|\Psi(m)|^2 = \exp\{-mC(\varphi)\} \quad (123)$$

となる。すなわち、 $C(\varphi)$ の特異点虚部とは z^* で決まっているわけである。(もちろん指数減衰が続くと仮定しての話である。) このように θ 空間でのガウス関数 \Rightarrow 指数関数移行は m 空間でのガウス関数 \Rightarrow 指数関数移行と dual な関係にある事がモデルから示唆さ

²⁴指数関数型からガウス分布型を内挿する関数として、次のようなものもある [50]。

$$C(\theta) = \exp\{-k^2(|\theta| - (1 - e^{-|\theta|}))\}. \quad (116)$$

これを用いても $\theta \ll 1$ で $e^{-k^2\theta^2}$, $\theta \gg 1$ で $e^{-k^2(\theta-1)}$ を得る。これは、 $\dot{x} = u(t)$ で $u(t)$ が定常ガウス過程である場合の相関関数である。しかし、 $\theta = 0$ に特異性があるゆえ、今の目的としては使いづらい。

れる。むろん既にのべたように、有限時間では、 $\Psi_t(q, \theta)$ は整関数であり、真正自然境界は存在しないので、観測されるものは全て特異点紛いの「擬特異点」の集合であろう。

いずれにせよここで強調しておきたいことは「ガウス関数 \Rightarrow 指数関数移行を保証する相関関数の複素面での擬特異構造が存在する。」ということである。つまり、

- (1) θ - 像特性とそのもっともらしい統計性
- (2) その統計性を用意する複素 θ 面での特異性
- (3) m - 像での観測結果

の間に無矛盾な描像が得られた事になる。

E.3 θ - 空間関数、 $S'(\theta) = m$ の数値計算における技術的な注意

$S'(\theta)$ (差分) を計算する前に $S(\theta)$ の補間を行い、その後差分を取ったほうが正確である。その際、波動関数 $\Psi(\theta)$ は整関数ゆえスリップは入っていないのでその実部、虚部を補完してから位相を決めて差分する。補間には多項式補間（定性的結果は補間点の数には依らない）を用い、差分には中央差分 ($\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$) を用いた。ただし、フーリエ変換を計算する場合は補間が有意に働くとは限らない。なめらかに補間できる部分もあるが、どこかでトビが出るとそれによるギブス現象が効き、より精度を落とす場合がある。このギブス現象が分離できないとガウス - 指数分布転移を m - 空間で鮮明に示すことは難しい。また、データの端点の取り扱いにも注意が要る。

F 非エルミート行列との関係

この節では変数を複素化したダイナミックスと非エルミート演算子による時間発展との関係を整理しておく。

F.1 非エルミート行列の固有値問題

ここでは、ハミルトニアン $H(q, p)$ を

$$H(q, p) = T(p) + V(q) \tag{124}$$

として、固有関数の解析性を再び議論する。まず、その q 表示及び p 表示での直交固有関数系を $\{u_n(q)\}$ 、 $\{u_n(p)\}$ とする。すなわち、

$$u_n(p) = \sum_q u_n(q) e^{ipq}, \tag{125}$$

そこで、 $p \rightarrow p + i\eta$ とした場合のハミルトニアン $H(q, p + i\eta) (\equiv H_\eta(q, p))$ 、

$$H_\eta(q, p) = T(p + i\eta) + V(q) \tag{126}$$

を直接対角化して、(右側)固有関数系 $\{u_n(p+i\eta)\}$ を求めることができる、もちろん、この場合、 $H_\eta(q,p)$ は非エルミートであり、 $\{u_n(p+i\eta)\}$ は直交性を持たなくなる。また、 $\eta=0$ の場合の直交固有関数系 $\{u_n(p)\}$ を解析接続することにより、 $\{u_n(p+i\eta)\}$ を求めることもできる。これらの二つの方法で得られた固有関数を比較する事により、 p 空間での解析性も議論できる。例えば、具体的に、変数を $p \rightarrow p+i\eta$ として、複素 p 平面で考えると、経路に singularity がなければ、そのまま解析接続可能である。

前節まで用いたように、ハーバーモデルの局在状態 ($V > 1$) に対して、指数関数部分をスケールした固有関数

$$s(n) = e^{\eta n} u(n), \quad (127)$$

をシュレーディンガー方程式

$$u(n+1) + V_n u(n) + u(n-1) = E u(n), \quad (128)$$

に代入すれば、 $s(n)$ の従う方程式は次のようになる。

$$e^{-\eta} s(n+1) + V_n s(n) + e^{\eta} s(n-1) = E s(n), \quad (129)$$

[51, 53]²⁵。式(129)は、次の非エルミート行列 H_s (非対称行列) 固有値問題に他ならない。

$$H_s = \begin{pmatrix} V_0 & e^\eta & 0 & \dots & \dots & \dots \\ e^{-\eta} & V_1 & e^\eta & 0 & \dots & \dots \\ 0 & e^{-\eta} & V_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & e^\eta & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\eta} & V_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (130)$$

固有値問題として複素エネルギー面でのグリーン関数の解析性や状態密度の特異性として、局在・非局在転移を特徴づけることもできる。

図 25 に非エルミートにしたハーバーモデルの場合 ($V = 1.2, \eta > 0$) の複素固有値の分布を示す。エルミートの場合の実エネルギー固有値が非エルミート性が大きくなるほど大きな虚数成分を持ち、細かなゆらぎ構造が消えてバンドが繋がる傾向がわかる。図 26 にいくつかの右側固有状態を示す。図 26(a) から、バンドの端付近の固有関数が非エルミート性を大きくしていった場合に非局在化していく様子がわかる。もちろん、一般に固有値は複素数なのでバンドという表現は正しくないが、複素固有値 $E_n = \text{Re}E_n + i\text{Im}E_n$ の実数部分の大きさの順に並べて実軸上での端や中心をバンド端、バンド中心などと表現している。特に、 $\eta_c \equiv 1/|\log V| \sim 0.18$ として、 $\eta > \eta_c$ では完全に非局在化していることがわかる。また、図 26(b) に、 $\eta = 0.15$ と固定した場合のバンド端とバンド中心での右側固有関数を示す。これをみると、複素エネルギー固有値に関わらず同じ傾きかたをしていることがわかる。これは、ハーバーモデルにおける局在の場合、全ての固有状態の局在長が同じという性質から、局在長をスケールアウトした場合もきれいなゆらぎ構造をみることができると対応するものと思われる。

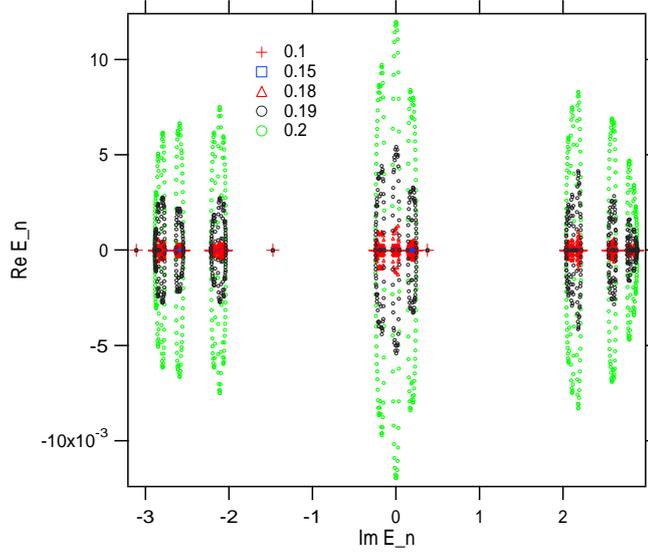


図 25: 非エルミート局在ハーパーモデルでの複素固有値の分布。 $V = 1.2$ でシステムサイズ $N = 2F_{14} = 1220$ で対称にし周期的境界条件を用いた。 $\eta = 0.1, 0.15, 0.18, 0.19, 0.2$ の場合を表示。

対角項 V_n がランダムな場合の (ランダム非エルミート行列の) 固有値問題は局在・非局在転移の問題としても良く研究されている [53, 54, 55]。図 27 に非エルミートにしたアンダーソンモデルの場合 ($W = 0.5, \eta > 0$) の複素固有値の分布を示す。 η が有限になると、バンド端は実固有値でもバンドの中心付近から複素固有値が生まれ η がさらに大きくなるとバンド全体が複素固有値を持つようになる。虚部が大きい固有値に対応する固有状態ほど非局在化する。図 28 にいくつかの右側固有状態を示す。図 28(a) では、ハーパーモデルの場合と同じく非エルミート性を表す η が大きくなるに従い、指数関数的部分の傾きが小さくなり非局在化していく様子が見られる。しかし、図 28(b) を見ると、ハーパーの場合とは異なり、バンドの端や中心により固有関数の非局在化の程度は様々であることがわかる。

これをハミルトニアンに見立てた系の時間発展はユニタリー性を失っている。我々が運動量表示で p を虚軸方向へ $p + i\eta$ と shift (かさ上げ) させてみたハーパーモデルの局在状態に対する複素ダイナミクスは、定常状態で式 (129) に従う非エルミート系の時間発展版を見ていることに相当する。アンダーソンモデルでの複素化ダイナミクスも式 (129) でポテンシャル $V(n)$ をランダムにした非エルミートランダム系の時間発展に対応するといえる。その見かたに従えば、 p 空間の虚軸方向へのシフトは虚数ベクトルポテンシャルの導入や複素ゲージ変換に相当している。

さらに、Jazaeri と Satija は、次のようなポテンシャルの位相 θ の複素化をした複素ポテンシャル版の拡張型ハーパーモデルの研究も行っている [56, 57, 58]。

$$u(n+1) + u(n-1) + 2[\lambda_r \cos \theta_n + i\lambda_i \sin \theta_n]u(n) = Eu(n) \quad (131)$$

²⁵Ketoja らは、ハーパーモデルの固有関数を二次元 circle map に変換して、不変曲線が崩壊し strange nonchaotic attractor の出現する現象として局在・非局在転移を記述した [51]。写像化して一次元の振幅、位相のマップにして、力学系の軌道を考えることに関して、Izrelev [52] らは、局在の量子状態の局在長などを評価している。

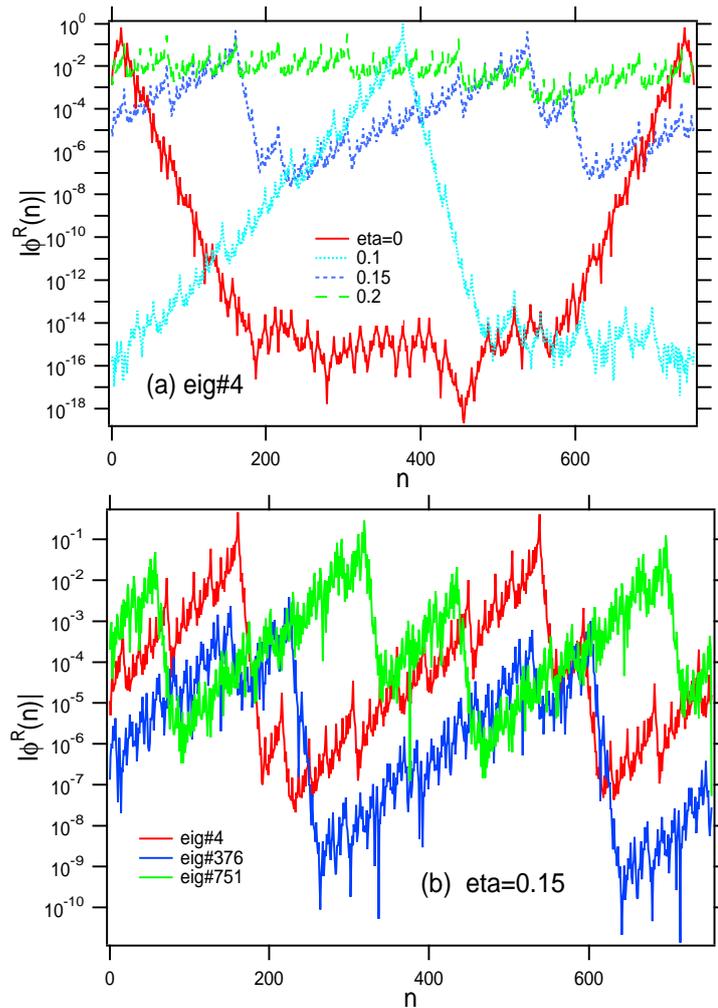


図 26: (a) 非エルミート局在ハーバーモデルでの $\eta = 0, 0.05, 0.1, 0.2$ に対応するバンド端付近（固有値の実部 ReE_n の大きさの順で 4 番目）の固有値に対応する右側固有状態。(b) $\eta = 0.15$ と固定した場合のバンド端とバンド中心での右側固有関数。

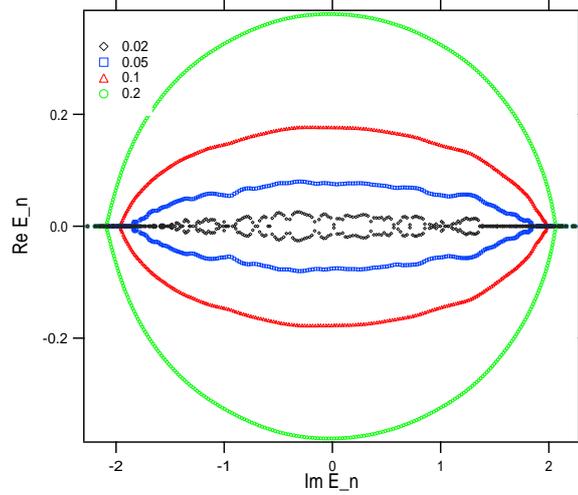


図 27: 非エルミートアンダーソンモデル ($\eta = 0.02, 0.05, 0.1, 0.2$) での複素固有値の分布。 $W = 0.5$ でシステムサイズ $N = 2^9$ で対称にし周期的境界条件を用いた。

ここで $\theta_n = 2\pi\sigma n + \theta$ である²⁶。この場合は、行列の対角項が複素になり $|\lambda_r| + |\lambda_i|$ の大きさにより局在・非局在転移が生じる。 $|\lambda_r| + |\lambda_i| = 1$ が臨界で、 $|\lambda_r| \geq |\lambda_i|$ で広がった状態全てが実固有値をもつ。また、この非エルミート性はデコヒーレンスや散逸と関係する。その場合、 $\lambda_r = 0$ を強散逸極限、 $\lambda_r = \lambda_i = \lambda$ を弱散逸極限とよび $\lambda = 1/2$ で広がった状態になる。

F.2 非エルミート格子系のダイナミクス

非エルミート行列に対して全ての複素固有値 E_m と右側・左側固有状態、 $\{\phi_m^R(n)\}$ 及び $\{\phi_m^L(n)\}$ を計算すれば、初期状態 $\Psi(t=0)$ に始まる任意の時刻 t での時間発展状態 $\Psi(t)$ を

$$\Psi(t, n) = \sum_m C_m e^{E_m t / \hbar} \phi_m^R(n), \quad (132)$$

ここで、

$$C_m = \sum_n \Psi(t=0, n) \phi_m^L(n), \quad (133)$$

である。これによる具体的な非エルミートハーバーモデルでの波束の時間発展の様子を図 29 に示す。hopping が左右非対称な非エルミート性のため正規化しながらの時間発展した波束の形状も歪んでいき、システム全域に広がってしまう。その飽和現象が生じる直前までは、6 節での複素ダイナミクスによる波束と類似のゆらぎを示すと思われる。波束の観到達領域では本来振幅ゼロのはずだが、非エルミート行列の固有値問題の数値計算が倍

²⁶ ハーパーモデルでのポテンシャルの位相を複素化したものもこの形になる。

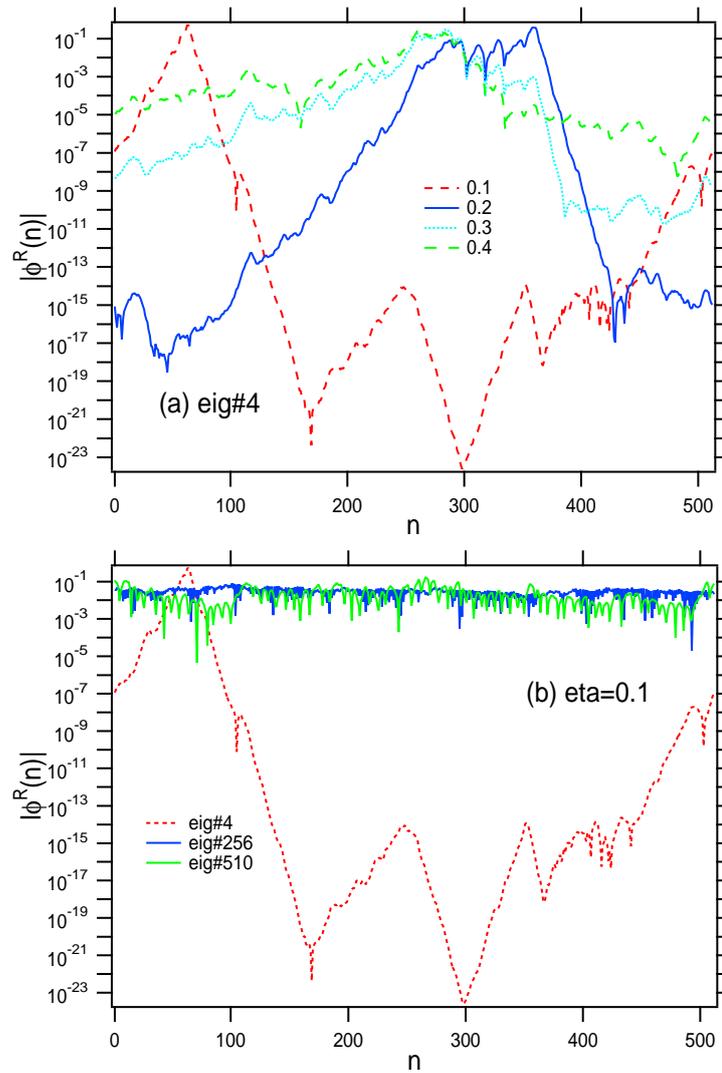


図 28: (a) 非エルミートアンダーソンモデルでの $\eta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ に対応するバンド端付近（固有値の実部 ReE_n の並びで 4 番目）の固有値に対応する右側固有状態。(b) $\eta = 0.1$ と固定した場合のバンド端とバンド中心でのいくつかの右側固有関数。

精度であるため、固有関数展開からゼロ振幅であるはずの領域にも誤差が入り込んででいる。非エルミート系の量子ダイナミクスに関しては、最近の文献 [59, 60] も参照。

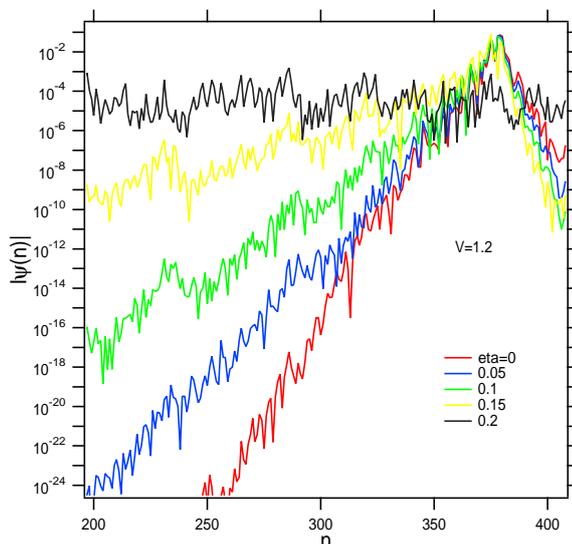


図 29: 非エルミートハーパーモデルでの時間発展状態

●**著者の貢献:**

山田弘明：研究構想、計算の実行、文章の執筆

池田研介：研究構想、文章の執筆

●**利益相反:** 本原稿にかかわる開示すべき利益相反関連事項はない。

謝辞

この原稿の一部は、2005年に立命館大学で開かれた国際会議 “International Symposium of Complexified Dynamics, Tunnelling and Chaos” の際に準備したものである。この研究には、部分的に日本の税金が使われています。納税者である日本国民に感謝します。また、この研究の一部は、河原屋セミナーハウスと、越後小池記念館を利用し遂行されました。関係者に深謝します。

参考文献

- [1] 山田弘明, 池田研介, 「パデ解析による波動関数の特異性診断-その壱-」、物性研究・電子版 **2**, No. 3, 023101(2013年8月号). (本稿で [I] として引用している。) また、International Journal of Computational Mathematics, Article ID 587430(2014), "A Numerical Test of Pade Approximation for Some Functions with Singularity" も参照されたい。
- [2] 山田弘明, 池田研介, 「パデ解析による波動関数の特異性診断-その壱-」、物性研究・電子版 **2**, No. 3, 023102(2013年8月号). (本稿で [II] として引用している。) また、Eur. Phys. J. B **87**, 208 (2014), "Analyticity of Quantum States in One-Dimensional Tight-Binding Model" も参照されたい。
- [3] H.S. Yamada and K.S. Ikeda, Phys. Rev. E **82**, 060102(R)(2010).
- [4] S. Adachi, M. Toda, and K. Ikeda, Phys. Rev. Lett. **61**, 659 (1988); M.Sakagami, H.Kubotani and T.Okamura, Prog. Theor. Phys. **95**, 703(1996); K Furuya, M C Nemes and G Q Pellegrino, Phys. Rev. Lett. **80**, 5524 (1998); P A Miller and S Sarkar, Phys. Rev. E **60**, 1542 (1999); H Fujisaki, T Miyadera and A Tanaka, Phys. Rev. E **67**, 066201 (2003).
- [5] K.S. Ikeda, Ann. Phys. **227**, 1(1993).
- [6] 松井文宏 修士論文 (立命館大学 2012); 松井文宏, 山田弘明, 池田研介「少数自由度量子カオス系における Von-Neumann エントロピーと非可逆相転移」日本物理学会第 67 回年次大会, 関西学院大学 (2012年3月).
- [7] H.S. Yamada and K.S. Ikeda, Bussei Kenkyu, **97**, 560 (2011).
- [8] H.S. Yamada and K.S. Ikeda, Eur. Phys. J. B **85**, 41(2012).
- [9] H.S. Yamada and K.S. Ikeda, Eur. Phys. J. B **85**, 195(2012).
- [10] A.O. Caldeira and A.J. Leggett, Annals of Physics **149**, 374(1983).
- [11] Ch. Skokos and S. Flach, Phys. Rev. E **82**, 016208(2010); I. Garcia-Mata and D.L. Shepelyansky, Phys. Rev. E **79**, 026205 (2009); H. Veksler, Y. Krivolapov, and S. Fishman, Phys. Rev. E **80**, 037201(2009); M. Larcher, F. Dalfovo, and M. Modugno, Phys. Rev. A **80**, 053606(2009); Z. Zhang, P. Tong, J. Gong, and B. Li, Phys. Rev. E **83**, 056205(2011); J.D. Bodyfelt, T. Kottos, and B. Shapiro, Phys. Rev. Lett. **104**, 164102(2010); G. S. Ng and T. Kottos; Phys. Rev. B **75**, 205120(2007).
- [12] E. N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics*, (Spring-Verlag, Berlin, 1983).

- [13] See, for example, L.M. Lifshiz, S.A. Gredeskul and L.A. Pastur, *Introduction to the Theory of Disordered Systems*, (Wiley, New York,1988).
- [14] P.Stollmann, *Caught by Disorder: Bound States in Random Media* (Birkhauser 2001).
- [15] K. Ishii, Prog. Theo. Phys. Suppl. **53** , 77-138(1973).
- [16] Abrahams E. edited, *50 Years of Anderson Localization* (World Scientific, 2010).
- [17] C. M. Soukoulis and E. N. Economou, Phys. Rev. Lett. **52**, 565-568 (1984); L. Pietronero and A. P. Siebesma, E. Tosatti, M. Zannetti, Phys. Rev. B **36**, 5635-5638 (1987); A. P. Siebesma and L. Pietronero, Europhys. Lett. **4** 597(1987).
- [18] H.Yamada and K.S. Ikeda, Phys. Rev. E **59**, 5214-5230(1999).
- [19] H. Yamada and K.S.Ikeda, Phys. Rev. E **65**, 046211-1-17(2002).
- [20] H.Yamada and K.S.Ikeda, Phys. Lett. A **328**, 170-176(2004).
- [21] G.Casati, I.Guarneri and D.L.Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 345.
- [22] F. Borgonovi and D.L. Shepelyansky, Particle propagation in a random and quasiperiodic potential, Physica D, **109**, 24-31(1997).
- [23] Delande らの非局在化 Rodriguez *et al*, Phys. Rev. Lett. **102**, 106406(2009); Lemarie *et al*, Between a metal and an insulator: the critical state of the Anderson transition, Phys. Rev. Lett. **105**, 090601(2010); G. Lemarie *et al*, Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor, Europhys. Lett. **87**, 37007(2009).
- [24] V N Kuzovkov, W. Niessen, V Kashcheyevs and O. Hein, J. Phys.: Condens. Matter **14** 13777(2002); V.N. Kuzovkov, W. Niessen, Eur. Phys. J. B, **42**, 529(2004); Physica A **369**, 251(2006).
- [25] I. M. Suslov, JETP, **101**, 661(2005) [Zh.Eksp.Teor.Fiz., **128**, 768(2005)]; JETP, **102**, 938-948 (2006) [Zh.Eksp.Teor.Fiz. **129**, 1064(2006)].
- [26] V. Gasparian and A. Suzuki, J. Phys. Condens Matter. **40**, 405302(2009); V. Gasparian, Phys. Rev. B **77**, 113105(2008); ;M. Goda, M. Ya. Azbel and H. Yamada, Int. J. Mod. Phys. B **21/22**, 2705(1999).
- [27] P.G.Harper, Proc. Phys. Soc. London, Sect. A **68**, 874(1955).
- [28] S. Aubry and G. Andre, Ann. Isr. Phys. Soc. **3**, 133(1980).
- [29] S. Ostlund and R. Pandit, Phys Rev. B **29**, 1394(1984),
- [30] H. Hiramoto and M. Kohmoto, Int. J. Mod. Phys. B **6** (1992) 281.

- [31] J.F.Weisz, M.Johansson and R.Riklund, Phys. Rev. B **41**, 6032(1990).
- [32] S.D.Sarma, S. He and X.C. Xie, Phys. Rev. B **41**, 5544(1990).
- [33] A. M. Garcia-Garcia and E. Cuevas, Phys. Rev. B **79**, 073104 (2009); Phys. Rev. B **82**, 033412 (2010).
- [34] J. Liu, W. T. Cheng, C.G. Cheng, Comm. Theor. Phys. **33**, 15 (2000).
- [35] A. M. Garcia-Garcia and J. Wang, arxiv.0412367v1, The Anderson transition in quantum chaos; arxiv.0707.3964v1, Universality in quantum chaos and the one parameter scaling theory.
- [36] F.A.B.F.de Moura, and M.L.Lyra, Phys. Rev. Lett. **81** 3735(1998); F.M.Izrailev, and A.A.Krokhin, Phys. Rev. Lett. **82** 4062(1999); L.Y. Gong, P.Q. Tong, and Z.C. Zhou, Eur. Phys. J. B **77**, 413-417(2010); Chao-Sheng Deng, and HuiXu, Physica E **44** 1473-1477(2012).
- [37] C.R. de Oliveira and G.Q. Pellegrino, "(De)Localization in the prime Schrodinger operator", J. Phys. A **34**, L239-L243 (2001).
- [38] C. Albrecht and S. Wimberger, Induced delocalization by correlation and interaction in the one-dimensional Anderson model, Phys. Rev. B **85**, 045107 (2012).
- [39] S.Tasaki and P.Gaspard, J. Stat. Phys. **81**, 935-987(1995).
- [40] S.Tasaki and P. Gaspard, Bussei Kenkyu, **66**,21-44(1996); *ibid*, **64**,199-258(1995).
- [41] Bussei Kenkyu, **97**(2011). 田崎秀一追悼論文集
- [42] E.ハーバート ノーマン, 「忘れられた思想家—安藤昌益のこと 〈上巻〉〈下巻〉」(岩波新書 1950).
- [43] 寺田寅彦「日本人の自然観」(寺田寅彦随筆集第5巻、1948) .
- [44] 丸山 真男「日本の思想」(岩波書店 1961)
- [45] 柳父章『翻訳の思想—「自然」と nature—』(平凡社 1977)
- [46] 源了園「日本人の自然観」(『新岩波講座哲学5 自然とコスモス』)(岩波書店 1985)
- [47] 伊東 俊太郎(編集)「日本人の自然観—縄文から現代科学まで」(河出書房新社 1995)
- [48] M. Kohmoto and Y. Hatsugai, Phys. Rev., B **41**, 9527 (1990).
- [49] G. Wang, N. Li, and T. Nakayama, arxiv.1312.0844v1, Appearance of Mobility Edge in Self-Dual Quasiperiodic Lattices.
- [50] 久保亮五 他,「統計物理学」岩波講座 現代物理学の基礎 (第2版 1978).

- [51] J.A. Ketoja and I.I. Satija, Phys.Rev. Lett. **75**, 2762(1995).
- [52] F. M. Izrailev, S. Ruffo and L. Tessieri, J. Phys. A **31**, 5263-5270(1998).
- [53] N. Hatano and D.R,Nelson, Phys. Rev. Lett. **77**, 570(1996); Phys. Rev. B **56**, 8651(1997); J. Feinberg and A. Zee, Phys. Rev. E **59**, 6433(1999); F. Dominguez-Adame, Physica B **307** 247(2001); A. V. Kolesnikov¹ and K. B. Efetov, Phys. Rev. Lett. **84**, 5600(2000) ; T. Kuwae and N. Taniguchi, Phys. Rev. B **64**, 201321(R) (2001).
- [54] N. M. Shnerb and D. R. Nelson, Phys. Rev. Lett. **80**, 5172(1998); Da. A. Kessler and N. M. Shnerb, arxiv.0808.2484; K.A. Dahmen, D. R. Nelson and N.M. Shnerb, J. Math. Biol. **41**, 1(2000); N. M. Shnerb, Physica E **9** 621(2001).
- [55] C. M. Bender, Rept.Prog.Phys. **70**, 947(2007); C. M. Bender and S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243(1998).
- [56] J.A. Ketoja and I.I. Satija, Physica D**109**, 70(1997).
- [57] I.I. Satija, B. Sundaram, J.A. Ketoja, Phys. Rev. E **60**, 453(1999).
- [58] A. Jazaeri and I.I. Satija, Phys.Rev. E **63**, 036222(2001).
- [59] Eva-Maria Graefe and Roman Schubert, Phys. Rev. A **83**, 060101(R) (2011).
- [60] Stefano Longhi, Phys. Rev. B **103**, 054203 (2021).