

多色摂動 Kicked Anderson 系の局在・非局在現象

山田物理学研究所 山田弘明¹

立命館大学 理工学部 池田研介

abstract: 1D 量子 Anderson map (kicked Anderson model) を用い、ノイズや熱浴などのない少数個のモードからなるコヒーレントな摂動による量子ダイナミクスの非局在化現象を調べる。特に、モード数（色数） M に関する局在・非局在転移に関する臨界現象における拡散指数 α や空間指数 β の変化を示す。臨界点での局在長（相関長）の発散を特徴づける臨界指数 ν の M 依存性は、平均場理論や修正された半古典理論の結果から有意にズレるように見えることが示される。また、臨界摂動強度 ϵ_c はモード数に対して $\epsilon_c \sim (M - 1)^{-1}$ と減衰する。

Keywords: 量子輸送 (Quantum transport)、ランダム系 (disordered systems)、アンダーソン局在 (Anderson localization)、量子カオス (Quantum chaos)、局在状態 (localized states)、スケーリング理論 (scaling theory)、臨界現象 (critical phenomenon)

1 はじめに

一次元不規則系では任意の強度の乱れが存在すれば、量子状態の指数関数的局在現象が安定的に存在する [1, 2, 3]。しかし、空間次元 d を増した 3 次元不規則系では、空間の乱れ強度 (W とする) の減少により指数関数的局在は不安定化し局在・非局在転移が生じる。この局在・非局在転移に関しては、4 人組の one-parameter scaling theory (OPST) などに基づき数値的にも解析的にも多くの研究がある [4, 5, 6, 7, 8, 9]。この原稿では局在・非局在転移を LDT(localization-delocalization transition) と呼ぶことにする。物性論では、MIT(metal-insulator transition) や AT(Anderson transition) として用いることもある [10, 11, 12]。しかし、臨界次元とされる $d = 2$ の二次元ランダム系に関しては DLT の存在自体も微妙な問題点が残る [14, 15, 16]、実験や理論による研究が現在でも行われている。 $d \geq 3$ の高次元ランダム系についての LDT や臨界指数について数値実験による研究が始まったばかりといえる [8, 9]。これらについて本文中で言及する。付録 A にアンダーソン局在に関するいくつかの気になる点を収納してある。一方、準周期的摂動下での kicked rotor (KR) に存在する局在・非局在現象が Casati や Delande らにより理論的に調べられて、Anderson 転移との類似性も報告されている。この系はメリーランド変換

¹責任著者。E-mail:hyamada[at]uranus.dti.ne.jp

(Maryland transformation) により一次元ランダム系や高次元ランダム系にマップされる [17, 18, 19, 20, 9, 21, 22, 23]。また、このモデルは、optical lattice における cold atom を用いて実験的な検証もされ注目されている [21]。しかし、そこでの解析は、KR に対し 2 色摂動系が中心であり、色数 M を増大させた場合の局在・非局在転移に関する系統的で詳細な結果は殆どない [20, 24, 25, 26, 27, 28]²。

本稿では、時間的な多色準周期摂動下の 1D Anderson Map Model での局在・非局在転移現象を報告する。本稿は、文献 [29, 30, 31, 32] などの結果を補強する計算結果を与え、波束の空間分布についての考察をすることが目的である。本稿で用いているアンダーソン局在や量子波束の拡散について既に知られている事項をいくつかに分けて付録に示してある。

2 モデルと計算量

コヒーレントな摂動による非局在化現象を調べるため、準周期的摂動下の一次元ランダム系を用いる。長時間の計算を容易にするため本稿で中心的に扱う map 化したアンダーソンモデルの m th ステップは次の時間発展演算子で与えられる。

$$\hat{U}_m = e^{-iT(\hat{p})/2\hbar} e^{-if(t_m)V(\hat{q})/\hbar} e^{-iT(\hat{p})/2\hbar}, \quad (1)$$

離散空間 $q(=n)$ を考え、 $T(\hat{p}) = 2 \cos(\hat{p}/\hbar) = e^{-d/dq} + e^{+d/dq}$ は隣接サイト間 n and $n \pm 1$ のシフト演算子であり、 $V(q)(=V(n))$ はサイト n ごとに独立な $[-W, W]$ の範囲の一様分布に従う乱れとする。 $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ であり、 $\hat{n} = |n\rangle\langle n|$ は量子粒子のサイト演算子を表す。また M 個の独立な成分を持つコヒーレントな準周期的摂動 $f(t)$ は、

$$f(t) = 1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{M}} \sum_{k=1}^M \cos(\omega_k t), \quad (2)$$

とする。 ϵ は摂動強度であり、振動数の組はインコメンシュレートで $O(1)$ とする。 $f(t)$ の中の 1 はあくまで $\epsilon = 0$ で局在状態がベースに、摂動印加により非局在化状態の形成を観ていくための設定である。また、独立なモードが全て独立なノイズになった場合に長時間平均 power が M に依存しないように取ってある。これは、次節において臨界強度のモード数依存性などを議論する場合に重要である。実際、周期が非整合ならば摂動振動数 ω_k の取り方には依存しないくらいの長時間データを見ていく。多色になればなるほど ϵ が小さな局在に近い側での転移が生じるので、大きな揺らぎを抑えるため多くのサンプルに対する平均を取ることが必要になる。一次元強結合モデルのハミルトニアンは

$$H_{PKA}(\hat{p}, \hat{q}) = 2 \cos(\hat{p}/\hbar) + f(t) \sum_n V(n) \hat{n} \delta_t, \quad (3)$$

ここで、 $\delta_t = \sum_m \delta(t - m)$ である。

²本稿で扱うノイズや熱浴がない量子ダイナミックスにおける LDT とデコヒーレンスの発生との関係は非常に興味深い、ここでは扱わない。

式 (1) において、 $2 \cos(\hat{p}/\hbar) \rightarrow \hat{p}^2/2$ and $V(n) \rightarrow K \cos(q)$ とすれば、量子標準写像 (KR:kicked rotor) の時間発展演算子になる。その場合のハミルトニアンは、

$$H_{PKR}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{\hat{p}^2}{2} + f(t)K \cos \hat{q} \delta_t, \quad (4)$$

であり、 $\hbar = \frac{2\pi N}{2^{14}}$ とする。この系はメリーランド変換で M 色系を $(M+1)$ 次元アンダーソンモデルに対応させることができる。それにより多次元アンダーソンモデルにおける LDT の臨界現象の研究が Casati('89) を始め、Sheplensky, Delande, Garcia, Altland などにより行われている [18]。

局在・非局在転移を調べるために、初期局在波束 $\Psi(t=0, n) = \delta_{n, n_0}$ の時間発展を計算し、平均二乗変位の時間変化 $m_2(t)$ (MSD)

$$m_2(t) = \langle (\Delta n)^2 \rangle, \quad (5)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n - \langle n \rangle)^2 |\Psi(n, t)|^2, \quad (6)$$

をモニターし、「局在長」のパラメータ依存性を評価する。全パラメータは、 $\hbar, \epsilon, \omega, W$ で、特に、kicked Anderson 系の場合は $\hbar = 0.125$ とする。

局在長を数値的に正確に見積もれるパラメータ領域は制限される。例えば、 W が小さく、 ϵ が大きな場合は、局在長が大きくなるため、計算時間やシステムサイズを大きくしなければならぬなどの制限がある。また、 W が大きく、 ϵ が小さな領域では、局在長が小さいため局在長の揺らぎが大きくなり正確なパラメータ依存性を決められなくなる。改善策として、例えば、

$$m_2(t) = m_2(\infty) \left(1 - \frac{1}{1 + (t/\tau)^b} \right) \quad (7)$$

と局在への過渡現象を想定し、Levenberg-Marquard 法などの非線形 fitting でパラメータ $m_2(\infty)$, b , τ を決定し、局在長を

$$\xi = \sqrt{m_2(\infty)} \quad (8)$$

と決めることができる³。

注意すべきこととして、「局在長」の定義には異なるものがいろいろ存在するのである。例えば、指数関数的局在ならば、波束の tail を指数関数で fitting して求めることもできる

³band random matrix での量子拡散の数値計算では、長時間ではいずれは局在することが分かっているので、(7) 式タイプの fitting で局在長を調べている (Izrailev 1997)[33]。また、2DDS のモデルでは、よりシンプルな

$$m_2(t) = m_2(\infty) \left(1 - \frac{a}{t} \right), \quad (9)$$

での fitting がよく合うという報告もある (Sebban 1993)[34, 35]。Motto は、 $\log t/t$ 型の収束性として、

$$m_2(t) = m_2(\infty) \left(1 - \frac{1 + A \log(1 + t/\tau)}{1 + t/\tau} \right) \quad (10)$$

を用いている [10]。

が、MSDによる定義とは異なる値になる。すなわち、各固有関数（局在長は指数関数的局在を想定した場合のリュプノフ指数の逆数）やフロケ状態のものとも異なる値になる。また、もし分布関数 $P(n, t)$ が逆ベキ関数的局在状態であっても、その平均二乗変位が有限値に収束するという場合もあり得る。その場合、確率分布関数の tail で決めるリュプノフ指数に相当する量の値は0であり、対応する局在長は無限大となる。さらに、固有関数がベキ的減衰の場合でも規格化可能でありさえすれば、平均二乗変位は有限の値になり有限の局在長を与えることになるので、そもそも量子拡散現象を通して固有状態のベキ局在や指数関数的局在の判別をすることに大きな困難があるのかもしれない [36, 37]⁴。

また、スペクトルやリュプノフ指数のみではその特性を判別不可能な量子局在状態も存在する。時間に依存しない一次元ランダム系の場合でいえば、「リュプノフ指数ゼロで点スペクトルを持つ」量子状態もある。二次元ランダム系の弱乱れの極限がこれに相当するという予想もある。このことは、局在・非局在転移のところで今一度議論する。数学的には、弱乱れ極限、低エネルギー領域での指数関数的局在状態の存在は証明されているが、ベキ局在の存在が否定されているわけではない。さらに、1DDSでの固有関数のベキ局在状態の存在や易動度端の存在も数値的なデータのみであり、数学的証明はない。

アンダーソン局在の存在を判別する指標（リュプノフ指数など）やその問題点などについて付録 A に与えてある。

2.1 2DDS の局在長に関する弱局在理論からの考察など

一次元ランダム系、二元ランダム系での局在長を ξ_{1d} , ξ_{2d} として、アンダーソン局在の弱局在理論でのポテンシャル強度と局在長の関係式は、次の様に評価されている [6]。

$$\xi_{1d} \sim \ell, \quad (11)$$

$$\xi_{2d} \sim \ell \exp\{\ell\}, \quad (12)$$

ここで、 ℓ は平均自由行程であり、摂動論では $\ell \sim 1/W^2$ となる。（弱局在理論の自己無撞着近似による導出は付録にある。）もちろん、どれも ℓ の前には係数が存在するが略して記述している。あくまで弱局在理論ゆえ $W \ll 1$ (Born 近似) で成立し、強局在領域 $W \sim 1$ で成立する必要はない。式 (12) の $\ell \ll 1$ の極限（強く局在する領域、 $W \gg 1$ でもある）では、 $\xi_{2d} \sim \ell$ となり、一次元系でのものと同じ W 依存性になる。これらは、初期局在波束の量子拡散に関する結果ではないが、kicked Anderson モデルの無摂動系での結果はこの一次元での結果と無矛盾であった。

そもそも二次元量子パーコレーション [41, 42, 43] なども含めて二次元ランダム系の局在はよくわかっていない [36, 37, 47, 48]。例えば、extended state にはならなくともベキ関数的局在のように指数関数的局在から逸脱する局在領域では「局在長」が well-define でなく局在現象を「局在長」で記述すること自体が問題となる。

⁴ちなみに、定常ポテンシャルの on-site randomness のモデルでベキ局在が示されているものは、何らかの特異性をもつポテンシャルのみである [38, 76, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46]。もちろん、電場の入ったモデルや random hopping model ではベキ局在が存在し、one-parameter scaling が成立しない場合は多く存在する [47, 48]。

3 多色摂動 Kicked Anderson 系の局在・非局転移

1色摂動の場合 ($M = 1$) での局在長 ξ のパラメータ W, ϵ 依存性は文献 [31] に詳しく報告してある。本節では、ポテンシャル強度を $W (= 0.5)$ に固定し、 ϵ 依存性から LDT を調べる。付録 B に臨界点での平均に乗変位の異常拡散についてのスケール則を与えてある。

3.1 2色摂動 KA 系の非局在化転移

$M = 2$ の場合の結果を図 1 に示す。 $\epsilon = 0.07 \sim 0.08$ の前後で MSD の log-log が下反り (局在) から上反り (正常拡散) へ転移している、とみなせる。そしてこの $\epsilon_c = 0.075$ での log-log-plots の直線の傾きが $\alpha \sim 0.66..$ 位であることがわかる。

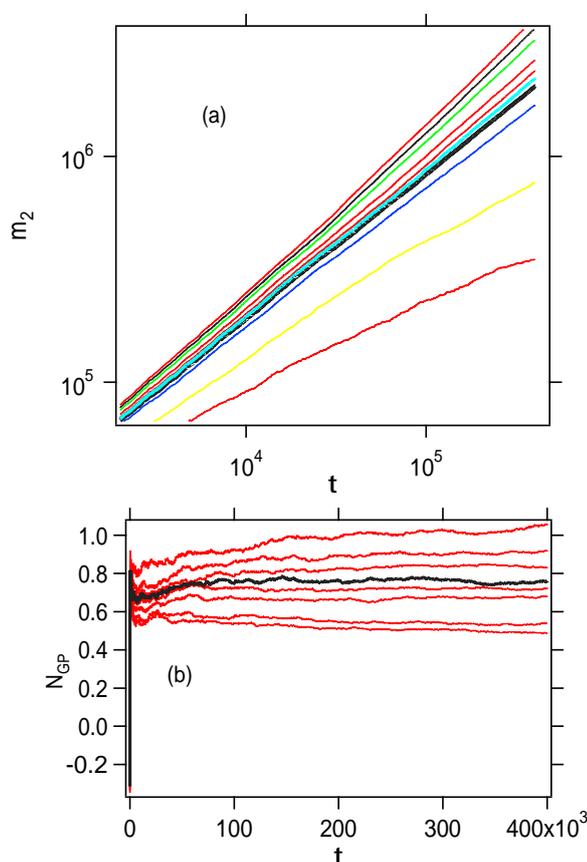


図 1: (Color online) (a)kicked Anderson model における 2 色摂動の平均二乗変位の log-log 表示。 $W = 0.5$ で ϵ を変化させた。 $\epsilon_c \simeq 0.075$ であり、これを黒実線で表示して、おおよそ $m_2 \sim t^{2/3}$ である。(b)NGP の時間変化。

この局在・非局在転移が不変的に起こるかどうかを調べる手段の一つとして、ランダム系の乱れ型の異なるモデルとの比較も不可欠である。本文における一様乱数のランダムポテンシャル部分 (Anderson model) を $-W$ or W の random binary ポテンシャルに変更

して2色摂動系での転移現象の普遍性を check した。⁵ 図2に示した MSD の変化でわかるように、転移点においてきれいな異常拡散の”2/3 乗法則”が確認できる。さらに、転移後の大きな ϵ に対して、徐々に正常拡散になっている様子もわかる。無摂動 ($\epsilon = 0$) での2値系の局在長は $\xi_0 \sim 280$ であり、Anderson model(同じ $W = 0.5$) の場合の $\xi_0 \sim 140$ より大きいというのは kick 系の特徴であろう。静的な系の固有関数の局在長や時間連続の場合の量子拡散での局在長は effective な乱れ強度は $\langle W^2 \rangle$ で決まるので、同じ W なら $V_n \in -W \text{ or } W$ の2値系の方が、 $V_n \in [-W, W]$ の Anderson model よりも小さくなる。

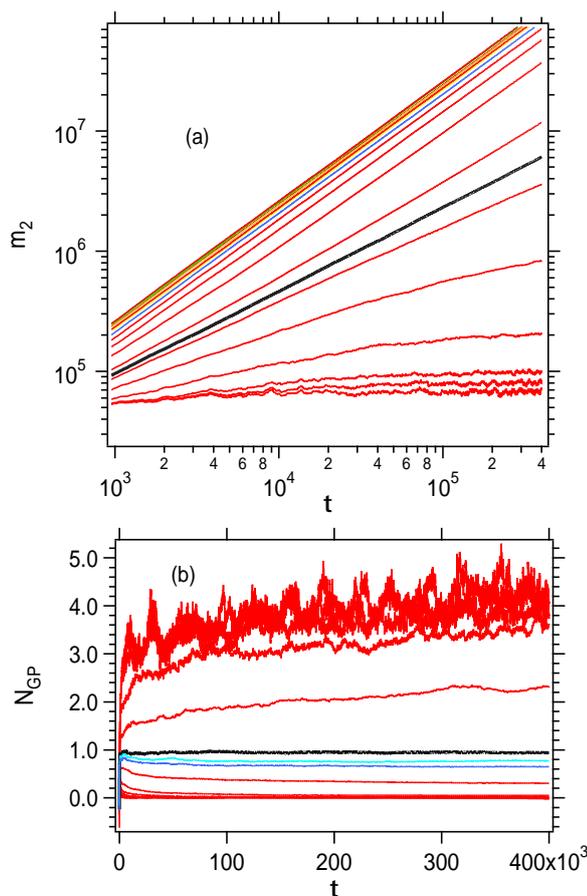


図2: (Color online) (a) Random binary model における二色摂動系の平均二乗変位 $m_2(t)$ の log-log 表示。 $W = 0.5$ で ϵ を変えたもの。 ϵ を変化させた。 $\epsilon_c \simeq 0.0165$ であり、これを黒実線で表示して、おおよそ $m_2 \sim t^{2/3}$ である。(b) NGP の時間変化 $N_{GP}(t)$ 。 $\epsilon_c = 0.0165$ 。

3.2 non-Gaussian parameter(NGP)

MSD が log-log で直線になる ϵ の値を転移点 ϵ_c として、そのときのベキ指数 $\alpha(M)$ を決めていたが、MSD の時間変化の定常性を確認するために、non-Gaussian parameter (NGP)

⁵このタイプのランダム系を数学では、(kicked) Bernoulli Anderson model ということがある。また、0 と W のような2値にしたランダム系を量子パーコレーションモデルと呼ぶこともある。

N_{GP} が一定値になっているか否かを check する⁶。NGP は、確率分布関数の 4 次モーメントを用いて、ガウス分布からのズレを表す指標の一つであり、1D の場合は次式で定義する。

$$N_{GP}(t) = \frac{1 \langle (\Delta n)^4 \rangle}{3 \langle (\Delta n)^2 \rangle^2} - 1, \quad (13)$$

ちなみに、式 (31) の場合の N_{GP} (non-Gaussian parameter) は、

$$N_{GP} = \frac{1 \Gamma(1/\beta) \Gamma(5/\beta)}{3 \Gamma(3/\beta) \Gamma(3/\beta)} - 1 \quad (14)$$

という値になる。 $\Gamma(x)$ はガンマ関数である。この β の関数は図 3 を参照。⁷

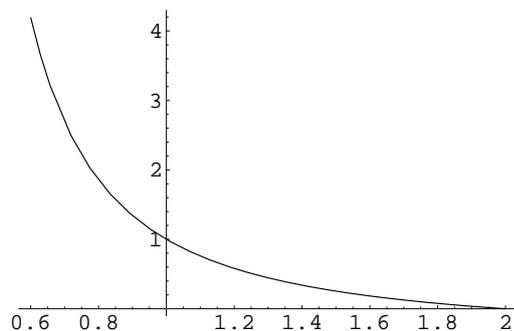


図 3: (Color online) 式 (14) の N_{GP} (縦軸) を β (横軸) の関数として表示。

図 1(b) と図 2(b) は 2 色摂動系 ($M = 2$) の其々の場合の NGP の時間変化である。NGP も安定で定常的なことが伺える。このモデルの方が本文の Anderson model よりも、 t の小さな立ち上がりの領域から現象全域が綺麗にみえている。

3.3 局在・非局在転移点における拡散指数 α

この値 $\epsilon_c = 0.075$ の臨界値前後で 2 色摂動系の量子拡散における局在・非局在転移の様子を、スケーリング仮説の儀式に従い解析するために、改めて、記号の整理をする。平均二乗変位を $m_2(\epsilon, t)$ として、スケールした平均二乗変位、

$$\Lambda(\epsilon, t) \equiv \frac{m_2(\epsilon, t)}{t^\alpha}, \quad (15)$$

を定義する。ここで、 t^α は臨界値 ϵ_c での subdiffusion $m_2(\epsilon_c, t) \sim t^\alpha$ を示す。2 色摂動系についての $\Lambda(\epsilon, t)$ を両対数表示で plot したものが図 4 である。 $t \rightarrow \infty$ で、 $\epsilon < \epsilon_c$ では局在へ、 $\epsilon > \epsilon_c$ では正常拡散に漸近する。2 色摂動系なら W を変えても二元ランダム系に変えても臨界点で $m_2 \sim t^{2/3}$ は変わらないことが確認されている。

⁶統計学では excess kurtosis(尖度)ともいう。臨界現象の理論での Binder parameter (Binder 指数) も同じタイプの量である [49]。

⁷定常性 check のために計算している NGP を用いて、この式 (14) で β を逆に求めても、 $\beta - \alpha$ 関係式 (34) を満たさない場合が多い。

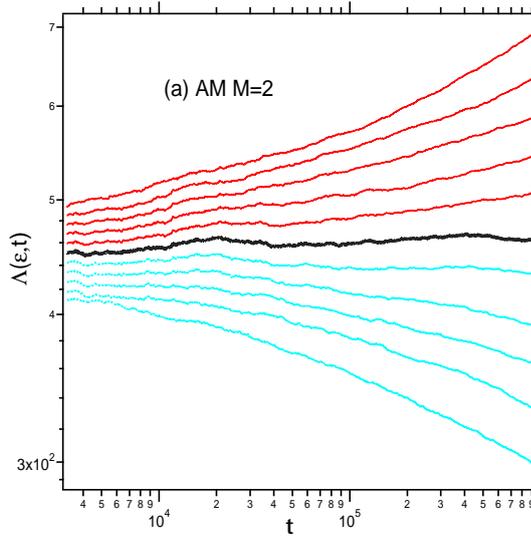


図 4: (Color online) 図 1 の 2 色摂動系の場合 ($W = 0.5$), ϵ 変化での scaled MSD. $\epsilon_c = 0.075$ が黒実線で表示。

平均場近似理論では、局在・非局在転移点 $\epsilon = \epsilon_c$ ただ一点でのみ、平均二乗変位 $m_2(t)$ が subdiffusion (power-law asymptotic behavior) $m_2(t) \simeq Dt^{\alpha(\epsilon_c)}$ を示すものと仮定すると、空間次元 $3 \leq d < \infty$ (モード数 $2 \leq M < \infty$) に対し、

$$\alpha(\epsilon_c) = \frac{2}{d} = \frac{2}{M+1}, \quad (16)$$

と予想されている。導出は付録 C などを参照。subdiffusion を特徴づける指数 α を拡散指数 (diffusion exponent, diffusion index) とよぶ。 $M+1$ を effective な次元と解釈すれば、 M モードの摂動下の kicked Anderson 系は $(M+1)$ 次元系とみなせる。

図 5 は、平均場近似の式の比較である。 M が増大してもよく一致していると言える。一般に平均場近似は空間の次元が高くなるほどよく成立する。ランダム系では系の次元を d として、 $2 < d < 4$ で成立し、平均場近似が exact に成り立つ上部臨界次元が $d_c^u = 4$ であろうという予想がある。(付録 C で具体的に議論しているが、 $d \geq d_c^u$ では局在長の発散などを特徴づける臨界指数が次元に依らない値になるということである。) しかし、数値計算では、臨界指数の値や上部臨界次元の存在に関し異なる結果が出ている。⁸

3.4 局在・非局在転移の臨界摂動強度 ϵ_c

多色摂 kicked Anderson 系と kicked rotor 系の場合における臨界強度 ϵ_c の色数 M 依存性を図 6 に示す。図では、kicked rotor 系の結果、kicked Anderson 系での $W = 0.5$ と $W = 0.8$ の場合の他に、二元ランダム系に多色摂動を加えた場合の結果も表示してある。

⁸autonomous 系で考えれば、全空間波動関数の性質を 1D 実空間に射影して観ていることになるため、この格子空間での subdiffusion を反映し、摂動としての線形振動子の作用空間でも subdiffusion が同様に生じているであろう。

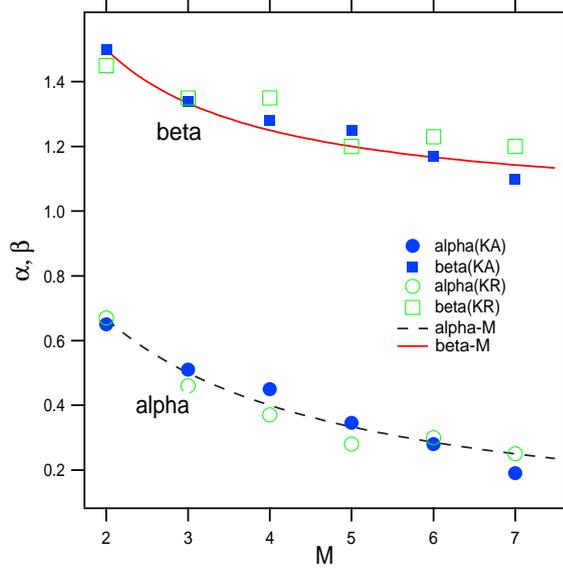


図 5: (Color online) 多色摂動の場合における拡散指数 α 、分布の指数 β の M 依存性。kicked Anderson ($W = 0.5$) の α は青丸, kicked rotor の α は緑丸. kicked Anderson ($W = 0.5$) の β は青四角, kicked rotor の β は緑四角. 黒破線は式 (16), 赤実線は式 (35) を示す。

M が増加するとともに臨界値 ϵ_c はべき関数的に減少する傾向が、あらゆるモデルにおいて確認できる。すなわち、

$$\epsilon_c \propto \frac{1}{(M-1)^\delta}, \delta = 1 \sim 1.1, \quad (17)$$

で減少する結果を得た。この関係は、数値的に M を変えた場合の臨界点 ϵ_c の探索を行う場合に役立つものである。より正確な 3 つのパラメータ (k_0, k_1, k_2) を用いた次のべき関数による fitting も行った。

$$\epsilon_c = k_0 + k_1 \left(\frac{1}{M-1} \right)^{k_2}. \quad (18)$$

kicked Anderson 系では $k_2 = 1.14$ 、kicked rotor 系では $k_2 = 1.02$ という結果になり、べき指数がやや異なる。また、kicked Anderson ($W = 0.8$) では $k_2 \sim 1.07$ 、kicked Bernoulli model (KB model) では $k_2 = 1.06$ となる。

我々 $M = 1$ の場合の $\epsilon_c = \infty$ であることを考慮して ϵ_c vs $M - 1$ の plot にしてある。このことは M-modes perturbation による 1-mode あたりの delocalization threshold power が 1-mode perturbation のわずか $1/M^2$ 倍になるという目覚しい効果を意味し、摂動効果が additive でない事を示唆する。このことの解明には、 $M = 2$ から $M = 3$ で急激に臨界値が小さくなることの理由を探る必要がある。時間変動のみを考えても、もし $\cos(\omega_k t)$ による摂動が全てノイズ時系列 $n_k(t)$ ならば、すなわち M が独立な M 本のノイズ時系列の和である場合、その効果は、

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{M}} \sum_{k=1}^M n_k(t) \Leftrightarrow An(t) \quad (19)$$

より、 $A = \epsilon$ という強度のノイズ $n(t)$ に対応するであろう。この形でのその換算後の実効強度は $\epsilon \sim M^0$ となり、 M 依存性がなくなる。すなわち、 $\delta = 0$ であるが、多色摂動 KA 系や多色摂動系などの局在・非局在転移現象での臨界強度の変化を特徴づける指数 δ の値は、この値よりはるかに大きく、 $\delta \sim 1$ である。

この M 依存性における指数 δ の違いは重要である。もし、データから得た $\epsilon_c \sim (1/M)^\delta$ で $\delta \sim 1$ が確かならば、臨界点においてコヒーレントな摂動が相乗効果をもたらし、系の dynamics に劇的な変化を起こしていることを示唆する結果であり、臨界点固有の現象と言える。いずれの場合も、 $\delta \sim 1$ に近い値となるため、なんらかの普遍的なベキ則があると思われるが、理論的な考察は今後の問題である。

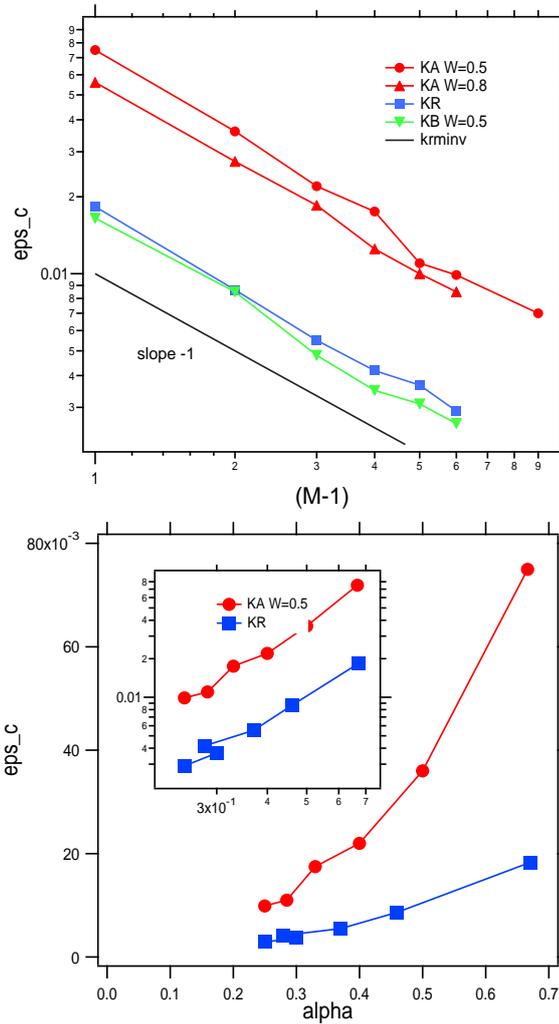


図 6: (Color online) 多色摂動の場合における臨界強度 ϵ_c の色数 M に対する依存性。 $(M - 1)$ に対して両対数 plots してある。kicked Anderson ($W = 0.5$ は赤丸、 $W = 0.8$ は赤三角)。青四角は KR の場合。緑逆三角は、kicked Bernoulli model での結果。 $\epsilon_c \sim 1/(M - 1)^\delta$ で $\delta = 1 \sim 1.1$ である。下図は α に対して ϵ_c を plots したものの。赤が KA、青が KR の場合。

4 局在・非局在転移のスケーリング (臨界解析)

有限サイズスケーリング仮説 (拡散の場合は、有限時間スケーリング仮説) は、局在長よりも小さなシステムサイズ (有限な時間) の計算からでも局在長 ξ を評価できる。そしてこの局在長で局在現象が全てスケールされ記述されてしまうというのが one-parameter scaling 理論 (OPST) である。本節では転移点の普遍的性質を特徴づける臨界指数 ν を有限時間スケーリング (臨界解析) により調べ、他の研究結果と比較する。付録 C に平均場近似での局在長や局在長の発散を特徴づける臨界指数 ν に関する議論を示してある。

4.1 平均場近似による臨界指数

ランダム系の場合を含め、アンダーソン転移 (MIT) の臨界現象に関する他の研究結果と直接比べるためには、スケーリングによる臨界解析を行い臨界指数 ν を求めることが必要になる。これを以下に整理しておく。局在長 ξ が MIT の臨界点 ϵ_c において

$$\xi \simeq |\epsilon - \epsilon_c|^{-\nu} \quad (20)$$

と発散するとした指数 ν について、アンダーソン転移の実験や理論においてこれまでに研究されている結果を表 1 に示す。ここでは転移を引き起こす連続パラメータとして摂動強度 ϵ を用いたが、局在・非局在転移を起こすパラメータならなんでもよい。例えば、乱れの強さ W_c やエネルギー E_c 、また実験的には不純物濃度 n_c 、散乱強度 $(kl)_c$ などでもよい。

表 1: アンダーソンモデルの平均場近似で予想される局在・非局在転移点における臨界指数 ν と次元 d (KR や KA では $d = M + 1$) の関係。VW は式 (21)、GG は式 (22) を意味する。Exp1 は AT の実験、Exp2 は BEC による実験結果である。

d	VW	GG	Exp1	Exp2
3	1	1.5	1	1.63
4	0.5	1.0	–	–
5	0.5	0.83	–	–
6	0.5	0.75	–	–

この臨界現象を見積もる理論として、Vollhardt と Wolfle (VW) の理論では

$$\nu = \begin{cases} \frac{1}{d-2} & (2 < d < 4) \\ \frac{1}{2} & (d > 4) \end{cases}, \quad (21)$$

となる [11]。すなわち、四次元系以上では変化せず、平均場近似が exact になる (モデルを使っている)。臨界不等式と比しても、上部臨界次元は $d_c^u = 4$ 、下部臨界次元は $d_c^l = 2$ であるという結果である。

また、半古典近似 (ここでは diagram の足し集め方に制限を入れることが一部の干渉効果を考慮しないことになるため、こう表現していると思われる) を用いた Garcia の説

では

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{d-2} \text{ for } d > 2. \quad (22)$$

である [9]。すなわち、上部臨界次元は存在せず、 $d \rightarrow \infty$ 極限では、VW 理論と同じ $\nu = 1/2$ に漸近する結果である。一般に、アンダーソン転移は系の次元と Hamiltonian のもつ対称性のみにより universal な量子相転移とされている⁹。

加えて、one-parameter scaling 理論が成立するという条件のもとで、臨界指数が満たさなければならない次の臨界不等式も存在する [50]。

$$\nu \geq \frac{2}{d}. \quad (23)$$

これは、Harris の不等式 [51] や Chayes criterion [52] と言われることもある。上記の理論やこれまでの数値計算の結果はいずれもこの不等式を満たしている。非線形シグマモデルの摂動計算による結果はこの不等式を満たさないため、理論として不十分なものといえるが、Wigner 関係式を用いて、 $d \rightarrow \infty$ において、 $s = d/2$, $\nu = 1/2$ という予想がある [53, 54]。また、相互作用の強いランダム系での実験結果もこの不等式を満たさない。その場合は、この実験結果の解析には相互作用を入れた理論を必要とすることを示していることになる。

4.2 有限時間スケーリング解析

7色摂動 KA 系の場合に、図 7 で見たように、規格化した平均二乗変位 $\Lambda(t)$ は、臨界値 ϵ_c で一定値であり、下側が局在相、上側が伝導相に対応する。図 7(b) には、解析に使う臨界点周辺のより細かな ϵ 変化に関するデータが示してある。さらに、いくつかの観測時刻 t_n を変えながら摂動強度 ϵ に対して plot したものが図 7(a) である。図 7(a) の交差する点が臨界値 ϵ_c に対応する。逆に、系のサイズや計算時間の長さを変えて、このような交差が生じる物理量が存在すれば臨界点が存在するとみなすことが、有限サイズスケーリングや有限時間スケーリングの思想である。付録 B を参照されたい。

Markos が高次元ランダム系での MIT で指摘しているように、システムサイズやサンプル数の有限性や計算誤差を減らしたとしても、図 7(a) が 1 点で交わることは数値計算ではあり得ない。我々の場合では、なるべく長時間で多くのサンプルが必要であるが、それを実現しても臨界点を正確に決めるには限界はある。特に、局在側では「サンプル数」を増やして揺らぎを抑えないときれいなデータにはならない。

時間無限大まで奇麗な subdiffusion が継続する臨界強度 ϵ_c とその拡散指数 α を精度よく見つけることが重要である。それらに基づき、臨界指数 ν をスケーリング解析で得るための二つの方法を以下に示す。この方法の違いは手順の違いである。

⁹Delande らが拠り所にして Vohringer and Wolfle の conductivity についての self-consistent theory では、空間四次元未満で次元に応じたアンダーソン転移の臨界指数が出てきて、四次元以上では次元に依らない指数になるため、彼らは 2 色摂動 kicked rotor 系 ($d = 3$ の三次元ランダム系相当) のみを中心に調べていると思われる [21]。

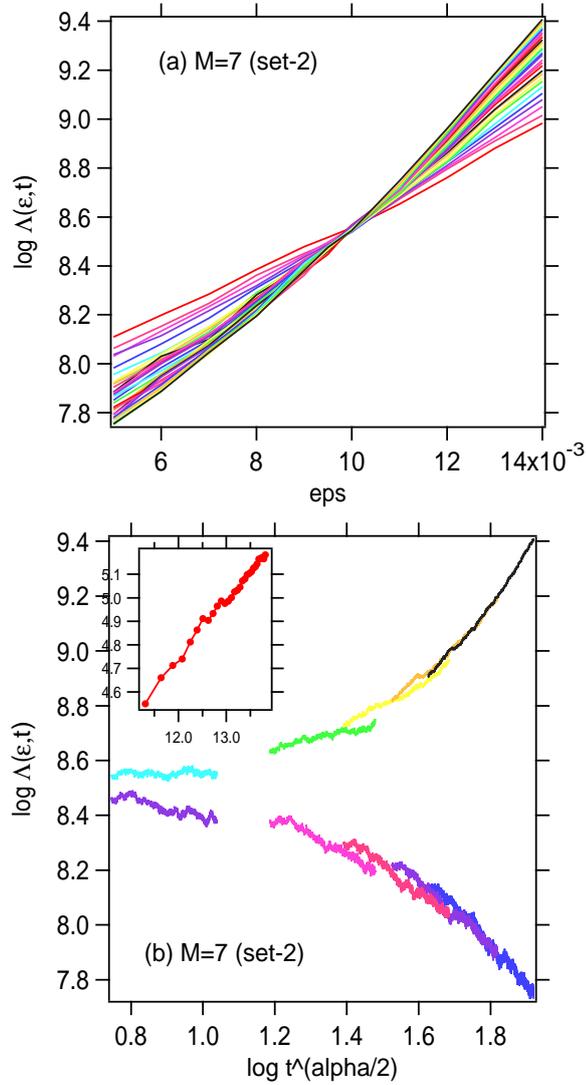


図 7: (Color online) 乱数による振動数の組 (set-2) を用いた場合の 7 色摂動系 ($M = 7$ $W = 0.5$) での ϵ 変化。 $\epsilon_c = 0.01$ 。(a) $\log \Lambda(\epsilon, t)$ を ϵ の関数として表示。片対数表示。 t_m は 30 点を使った。これが直線で綺麗に交わるということは、転移点近傍のデータであることを示している。(b) 図横軸を $t^{\alpha/2}$ に変えて、 $\xi(\epsilon)$ の shift して重ねたもの ($\alpha = 0.195$)。挿入図: (a) を線形 fitting してその傾き $s(t_m)$ を両対数表示したもの。さらにこの傾きを fitting で決めて局在長の臨界指数 ν を決める。

4.2.1 方法1

$\log \Lambda(\epsilon, t)$ を $\log(\xi/t^{\alpha/2})$ に対し plots し、一本の曲線になるように ξ を決定したものが図7(b)である。 $\epsilon = \epsilon_c$ を境に upper branch (金属相、extended state) と lower branch (絶縁体相、局在相) ごとに、各 ϵ に対応させ横軸を適当に shift し、ひとつの関数に乗せるようにしてその形を決めることができるというスケーリング仮説に基づいている。

すなわち、

$$\Lambda(\epsilon, t) = F_{\pm} \left(\frac{t^{\alpha/2}}{\xi(\epsilon)} \right), \quad (24)$$

という one-parameter scaling を仮定してデータ整理をしたことになる。±は upperbranch と lowerbranch を表す。すなわち、横軸の対数軸上での shift 量 $\log \xi$ を各 ϵ に対し決める。そして、

$$\xi(\epsilon) = K_1 + K_2 |\epsilon - \epsilon_c|^{-\nu} \quad (25)$$

とパラメータ K_1, K_2, ν に対する非線形 fitting して、臨界指数 ν を求めることができる。Delande らはこの方法で、2色摂動の KR 系の臨界指数を求めている。

ここでパラメータを記号 ξ としたのは、これが局在側では局在長に相当するからである。また、非局在側 (金属相) で決められる $\xi(\epsilon)$ は波動関数の振幅に関する相関長と解釈されている。この相関長 (局在長) がスケーリングパラメータということになる¹⁰。

$$Cor(q) = \frac{\langle |\Psi(x_0 + q/2)|^2 |\Psi(x_0 - q/2)|^2 \rangle}{\langle |\Psi(x_0)|^2 \rangle} \quad (26)$$

として、

$$Cor(q) \sim \exp\{-q/\xi\} \quad (27)$$

ということであり、空間のズレ ($q - shift$) でどれだけ波動関数の形が崩れるか、を表わしているともいえる¹¹。この $Cor(q)$ を相関関数とみれば、転移点で特徴的空間スケールを示す相関長が発散し、特徴的相関長が存在しなくなりべき関数的減衰を示すことがイメージできる。

4.2.2 方法2

例えば、 $\epsilon < \epsilon_c$ の局在相では、 $\Lambda(\epsilon, t) = f(\xi t^{-\alpha/2})$ として、局在長が臨界点で $\xi \sim |\epsilon_c - \epsilon|^{-\nu}$ と発散するとする。このとき、スケールされた平均二乗変位は、

$$\Lambda(\epsilon, t) = f_2((\epsilon_c - \epsilon)t^{\alpha/2\nu}), \quad (28)$$

とスケール関数 $f_2(x)$ を用いて表すことができる。 $f_2(x)$ がなめらかな関数であるならば $\epsilon = \epsilon_c$ 近傍で、

$$\Lambda(\epsilon, t) \simeq \Lambda(\epsilon_c, t = \infty) + A_0(\epsilon - \epsilon_c)t^{\alpha/2\nu}, \quad (29)$$

¹⁰これは、古典液体系などで用いる密度・密度相関関数の analogy をイメージするとよい。

¹¹ウイグナー関数と関連づけた議論も可能である。

と近似される。 A_0 は適当な展開係数、 $\Lambda_c = \Lambda(\epsilon_c, t = \infty)$ である。この関係は、 $f_2(x)$ がなめらかな関数であれば、 $\Lambda(\epsilon, t)$ を $\log \Lambda(\epsilon, t)$ に置き換えても成立するため、

$$\log \Lambda(\epsilon, t) - \log \Lambda_c \propto (\epsilon_c - \epsilon)t^{\alpha/2\nu}, \quad (30)$$

となる。この関係式から、図 7(b) の臨界点近傍での ϵ に対する傾き $s(t_m)$ を適当な時刻 t_m に対し求めたものが図 7(a) である。すなわち、 $s(t_m) \propto t_m^{\alpha/2\nu}$ である。両対数表示してあるので、これを線形 fitting することによりベキ指数 $\frac{\alpha}{2\nu}$ を得ることができる。従って、平均二乗変位の fitting により求めた拡散指数 α と合わせて、局在長の臨界指数 ν が得られることになる。ここで表示した図 7(b) は、この方法 2 により求めた臨界指数 ν により局在長を求め、それに対応し横軸を shift させたものを表示している。これが、一つの関数に乗ることが、この方法 2 による臨界解析（臨界指数）の尤もらしさを示す一つの check になる。（この方法 2 の変形版は他にもある。）方法 2 では ν を決める為に ϵ_c は必要なく、 ν を決めた後に ϵ_c が決定される。高次元ランダム系では、Markov(Review p68) がこの二段階方法の説明と実際のデータを提示している [8]。

4.3 臨界指数の M 依存性の数値計算結果

摂動の色数が増すほど、転移点での平均二乗変位 t^α におけるベキ指数 α が小さくなる。そのため、計算する場合の拡散空間のシステムサイズは小さくても済むが、綺麗な $\log-\log$ でのラッパ型を出すためには多くのサンプルをより長時間の計算データが必要になる。これは、より（揺らぎが大きな）局在領域に近い場合、自然なことであろう。

多色摂動 kicked Anderson の場合、 $M = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10$ に対して局在・非局在転移の臨界指数 ν を評価した結果が他の数値計算結果とともに図 8 にまとめてある。 $d = 5$ の場合までで VW 理論の式 (21) や Garcia 理論の式 (22) に近い値である。KA の場合でも、KR の場合でも臨界指数 ν の色数依存性（次元依存性）は、 M が大きくなると有意に理論的な予想による曲線 ($\nu = 1/2$) 以下になる。しかし、Chayes の不等式 $\nu \geq 2/d$ は満たしている。臨界摂動強度 ϵ_c の摂動の色数 M 依存性は、 $\epsilon_c \sim 1/(M-1)^\delta$ として $\delta = 1 \sim 1.1$ という、臨界現象ならではの特異な振る舞いをする。

本当にスケーリング仮説の二次元ランダム系 ($d = 2$) がアンダーソン転移存在のための臨界次元であるかどうかや、 $d = (2 + \epsilon)$ とフラクタル次元の空間で局在・非局在転移が生じるのかも調べられている。例えば、Markos らは Sierpinski gasket を strip 様にした $(d_f + 1)$ 次元系の数値計算から臨界指数は系のスペクトル次元のみで決まるという結果を得ている [38, 76, 77]。また、その結果の値は Garcia らの提示した式に近いものである。そのときの臨界指数の評価までできれば、 ν の d 依存性の正しさが確認できる。

数値計算結果をスケールしてひとつの関数に乗せることはいろんな技術（ごまかし）によりいくらでも可能になる。例えば、前節の例でも対数をとってスケーリングを行うか、生のデータでスケーリングを行うかによりかなり印象が異なる。また、shift する時間領域をうまく制限してしまえば一致がよくみえる。実際に、二次元ランダム系などでは「弱乱れ極限を覗かず、 $W > 4$ でのみスケーリングをおこなう」ということになっている。そうしないと、二次元ランダム系でもアンダーソン転移が生じてしまい、4人組のスケーリン

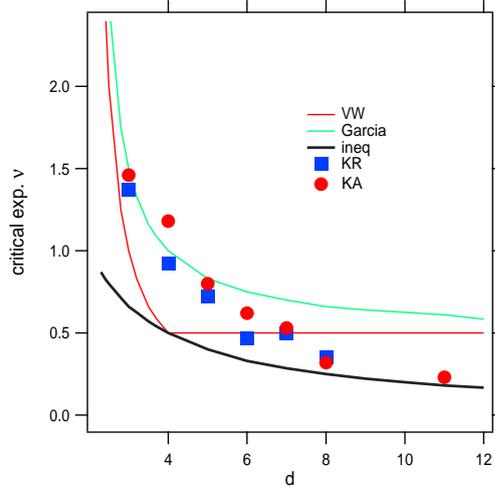


図 8: (Color online) VW 理論の式 (21)、Garcia 理論の式 (22)、臨界不等式（下限を表す等号の場合）(23) における臨界指数 ν の空間次元 d 依存性を示す。多色摂動 kicked Anderson (青四角), kicked rotor (赤丸) での数値計算の値も入れてある。

グ理論と異なる結果になる、からであろう。スケーリングは「こうすれば、こうなる」というもの以上でも以下でもない。Suslov による批判を参照 [55, 56, 57, 58, 59]。彼は、二次元ランダム系でのベキ局在への転移現象も主張している。

4.4 多色摂動 Kicked Anderson 系に関する他の結果

本文で調べた以外の多色摂動 KA 系の場合の LDT 現象に関する数値計算結果を補足する。研究の初期段階で、2 色摂動系、3 色摂動系の場合の拡散指数 α が、色数 M にのみ依存し、振動数の選び方には殆ど依存しないことを確認してある。6 色摂動系、7 色摂動系の場合に絞り、その臨界現象を特徴づける、臨界摂動強度 ϵ_c 、拡散指数 α 、臨界指数 ν がどうなるかを調べた結果を表 2 及び表 3 にまとめてある。本文では、 M の増大で 6 色か 7 色では臨界指数が平均場理論の値に対する等式 $\nu = 1/2$ を破り、 $\nu < 0.5$ という数値計算結果になっている。臨界摂動強度 ϵ_c 、拡散指数 α が変化すると臨界指数 ν は大きく変動する可能性もあるので、異なった振動数系列での結果の安定性の check は特に重要な意味がある。かなり特殊な振動数の組を set-2 に変えた場合は、ゆらぎが特に大きくなるという結果がある。しかし、臨界指数にしても最大 10 パーセント程度の誤差をみておけばいいので、全体としての大きな傾向は振動数の組の取り方により変わらないといえる。

5 転移点での空間分布の変化

MSD を通して見た局在・非局在転移現象の存在をより明確に特徴づけるためには、量子状態の空間分布関数 $P(n) = \langle |\Psi(n)|^2 \rangle$ の時間変化、を調べ、subdiffusion の指数間の関係式についても言及するも考える [60, 61, 62]。空間分布関数について知られている事項は付録 D に与えてある。

表 2: $M = 6$ の多色摂動 KA 系において摂動振動数の組を変えた場合 (set-1,set-2) の臨界摂動強度 ϵ_c , 拡散指数 α , 臨界指数 ν の計算結果。

set	$\epsilon_c(M = 6)$	$\alpha(M = 6)$	$\nu(M = 6)$
set-1	0.011?	0.25 ± 0.03	0.53
set-3	0.013 ± 0.001	0.26 ± 0.01	0.55 ± 0.04

表 3: $M = 7$ の多色摂動 KA 系において摂動振動数の組を変えた場合 (set-1,set-2,set-3) の臨界摂動強度 ϵ_c , 拡散指数 α , 臨界指数 ν の計算結果。

set	$\epsilon_c(M = 7)$	$\alpha(M = 7)$	$\nu(M = 7)$
set-1	0.0098 ± 0.0003	0.19	0.39
set-2	0.0095-0.01	0.183-0.22	0.38-0.44
set-3	0.0095-0.01	0.183-0.197	0.39-0.42

5.1 空間分布の変化

平均二乗変位 $M_{SD}(t) \sim t^\alpha$ のように、subdiffusion が生じている時間空間領域で分布関数を

$$P(n_s) \sim \exp(-|n_s(t)|^\beta), \quad (31)$$

とする¹²。簡単のため原点を中心とした対称な波束としている。この確率分布関数を特徴づける指数 β を、分布指数 (distribution exponent) または、stretched Gaussian exponent と呼ぶことにする。また、 $n_s(t)$ は

$$n_s(t) = \frac{n}{\sqrt{m_2(t)}}, \quad (32)$$

と平均二乗変位による拡散空間での広がり $\sqrt{m_2(t)}$ でスケールした空間座標を表す。実際にこの plots をして分布形が時間に対して不変ならば、大雑把には定常性が維持されているといえる。その意味では、NGP による定常性 check の再確認ともいえる。 $n_s \sim 1$ 付近はよく一致しても、分布の中心 (零点振幅) や裾野は合わなくなっても不思議はない。¹³

実際に、2色摂動系の転移点 $W = 0.5, \epsilon = 0.075$ のデータでの空間分布を図 9 に示す。転移点直上では、 $n_s \sim 1$ 周辺のみならず、予想以上に裾野までよく重なっており、このスケールリング則が安定していることを示している。それは、より高次のモーメントやキュムランも二次のモーメント $m_2(t)$ を使いスケールできる可能性が大きいことを示唆している。

¹²MSD の場合もそうだが、サンプル平均をして個々の波動関数の揺らぎを平均化した後に残る特異性をこれらの指数は表している。これが、散逸に至る量子状態 (平均化なし) の解析性とどうつながるか否かはこの研究の本質にも関わり興味深い問題である。

¹³この点に関し、中心は強い局在の名残なので、局在をベースにするランダム系の場合と古典拡散をベースに持つ KR 系と異なるかもしれない。これが、また、量子拡散での $t \sim 0$ での立ち上がりの違いや指数 α の評価の困難さの違いにつながっている可能性もある [81]。

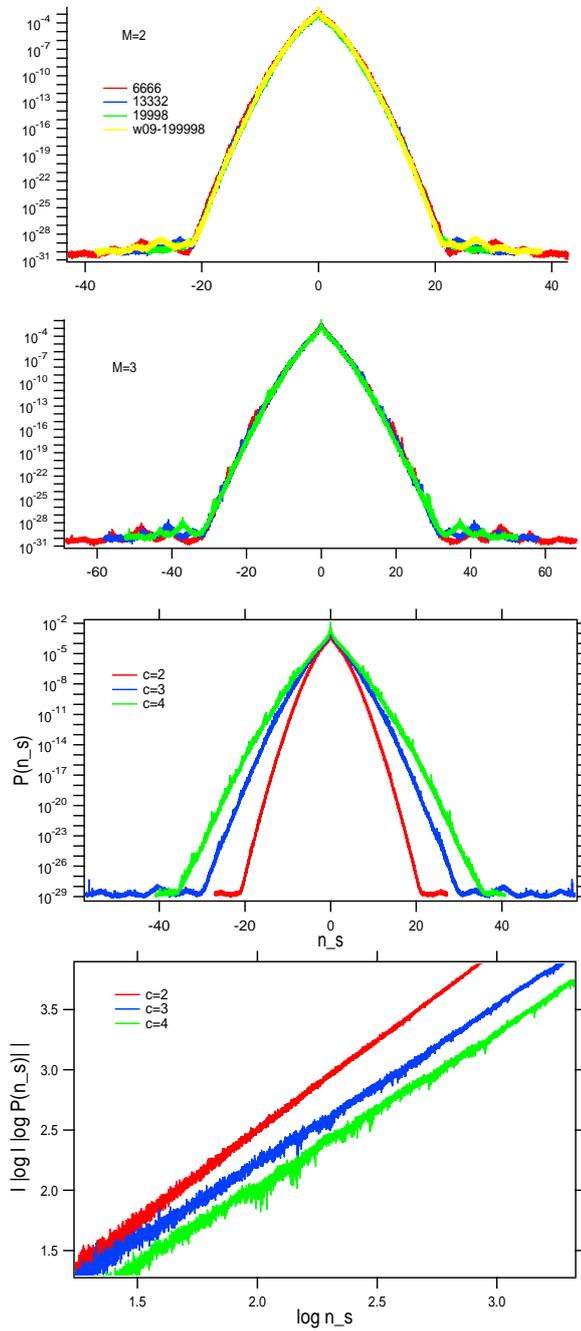


図 9: 上段:2 色摂動系転移点 $W = 0.5, \epsilon = 0.075$ の空間分布 $P(n_s(t))$ 。5 つの時刻でスケールした空間分布を表示。多色摂動 KA $W = 0.5$ でスケールした確率分布関数から指数 β を決定するための図。第二段: 3 色、4 色摂動系臨界のスケールした確率分布関数 $P(n_s)$ 第三段: 2 色、3 色、4 色摂動系臨界のスケールした確率分布関数 $P(n_s)$ 、 $t = 200000$ を表示。下段: $|\log|\log P(n_s)||$ v.s. $\log n_s$ を示している。 $M = 2$ の臨界 (赤)、 $M = 3$ の臨界 (青)、 $M = 4$ の臨界 (緑) である。

次に、この関数形を基に対数を取り fitting を行いスケールした確率分布関数の指数 β を決定する。具体的には、規格化定数を除いて、 $n_s > 1$ から裾野の方に関し、

$$|\log |\log P(n_s)|| \propto \beta \log n_s, \quad (33)$$

を用いて行った。図9はそのためのデータを示している。その結果得られた β の値が図10に記入してある。同じ解析を局在した状態（例えば、2色、 $\epsilon = 0.05$ など）に対して行くと、 $\beta = 1.02$ を得る。（ここでは表示していない。）もし、転移点から外れた非定常的な分布関数について指数 β を決定するためのプロットをすると、直線からズレる場合、式(31)の形のスケールリングが良くないことを示す。（ここでは表示していないが、臨界点から外れた場合、すなわち、 $\epsilon < \epsilon_c$ or $\epsilon > \epsilon_c$ では、スケールされた分布関数は時間によるズレが目立つ。）

上式における「 $\beta - \alpha$ relation」が、メモリー効果をもつマスター方程式を用いて解析的關係式¹⁴

$$\beta = \frac{2}{(2 - \alpha)} \quad (34)$$

を満たすかどうか？興味がある。導出などは付録Dを参照のこと。もちろん、局在をベースに考えているので今の場合、 $0 \leq \alpha \leq 1$, $1 \leq \beta \leq 2$ である。（図10参照のこと。）ちなみに、Delande らの2色摂動KR系でのK(非線形パラメータ)による転移点では、 $\alpha = 2/3$, $\beta = 3/2$ という結果を得ているので、上記の関係を満たし、 $\beta - \alpha$ 曲線上の一点に対応する。（この場合の空間分布の漸近形はAiry関数で与えられる。）もちろん、指数関数的局在なら $\alpha = 0$, $\beta = 1$ 、正常拡散なら、 $\alpha = 1$, $\beta = 2$ に対応する。

さらに、 α との関係(34)を介して、臨界点での分布関数の指数 β は色数 M を用いて、

$$\beta_M = \frac{M + 1}{M}, \quad (35)$$

と表せる。このときも当然 $2 \leq M < \infty$ と解釈すべきである。モード数 M と β の関係式は図5中に β_M 曲線とともに記入してある。また、その結果は図10にも記入してある。どの場合も想定される $\beta - \alpha$ 曲線(35)周辺に分布することがわかる。

5.2 分布関数の中心付近の振る舞い

3Dのアンダーソン転移点における波束の量子拡散の特徴として、平均二乗変位が $t^{2/3}$ 則に乗ることのほかに、確率分布関数 $P(n, t)$ の形状が、long-time, short-distance, ($n^d \ll t/(\hbar\rho)$, ρ はDOS, $d(=3)$ は拡散空間次元)において、power-law scaling、すなわち

$$P(n, t) \propto t^{-D_2/d} n^{D_2-d}, \quad (36)$$

$$\propto t^{-\mu} n^{-\eta}, \quad (37)$$

¹⁴このような非ガウス型の確率分布関数の形は、長時間記憶を持つランジュバン方程式や非整数ブラウン運動やself-avoiding walk 上での古典系の異常拡散などでも観ることができる [65, 66, 67, 68, 69, 70, 71]。

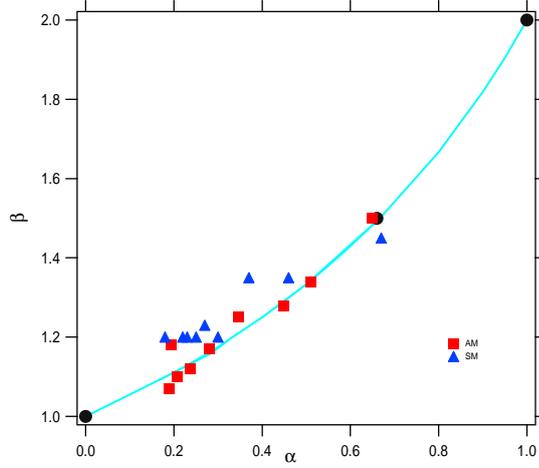


図 10: (Color online) $\beta - \alpha$ の関係式。縦軸が β , 横軸が α . 黒丸は、上からガウス過程での ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), 指数関数的局在の量子状態 ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) に対応。3D アンダーソン局在転移点での subdiffusion ($\alpha = 2/3$, $\beta = 3/2$), 緑四角は KA, 青三角は KR での結果。

で表されるという報告がある [63, 74]。この時間依存性部分は、return probability

$$P(n=0, t) \equiv |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 \quad (38)$$

$$\propto t^{-D_2/d}, \quad (39)$$

もしくは、それを平均化した表式

$$C(t) \equiv \frac{1}{t} \int_0^t dt P(0, t) \sim t^{-D_2/d}, \quad (40)$$

を用いて計算できる。また、逆参与率と、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt P(0, t) = \sum_n \|\hat{P}_n \Psi(0)\|^4, \quad (41)$$

と関係している。ここで、 $D_2 (< d)$ は参与率 (participation ratio) により決まる一般化次元である。(付録を参照。) $\mu = D_2/d$, $\eta = d - D_2$ として、これらが波束の拡散空間 decay を特徴づける指数とする。三次元ランダム系の転移点での計算では、 $D_2 \simeq 1.5$ のなどの結果がある [72, 73, 74]。¹⁵ これによれば、空間の decay の指数は $d - D_2$ から $\eta \simeq 1.5$ となる。2d(磁場在り) では、転移点ではないが $\eta = 0.48 (= 2 - D_2)$, $\beta = 1$, (t -decay から $D_2/2 = 0.76$ ゆえ、 $D_2 = 1.52$) となる。

前節でみたように、分布関数の裾野の方は、 β でスケールされる stretched Gaussian 関数 (β -Gaussian) となっているが、分布の中心付近は揺らぎが大きく、ベキ関数が観測できる状況ではない。分布関数の中心付近の様子をより明確に確認するために、さらに多くのサンプル平均を実行して試みるのが重要である。ここでは 1000 サンプルを用い

¹⁵ 臨界点での波動関数のマルチフラクタル性などについてはより最近の文献 [75, 76, 77, 78, 79, 80] がある。

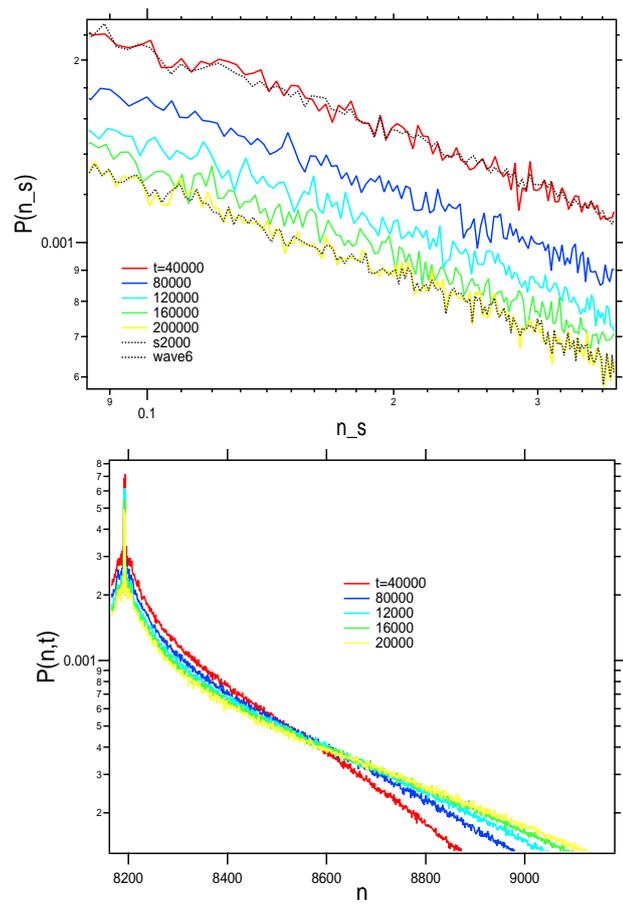


図 11: (Color online) 2 色摂動系の臨界点 ϵ_c における波束 $P(n_s)$ の $n_s \sim 0$ 付近の時間依存性。サンプル数を 1000。5 つの時間について重ね書きしてある。

ている。高次元ランダム系の転移でベキ領域などの確認に用いているサンプル数は大体、500-1000, 多いものは10000個位のようなものである。また、数値的データにおいては、 $n = 0$ での確率振幅の時間に関する decay から指数 D_2/d を見積もり、空間的減衰と比較して、この関数形の存在を check することができる。

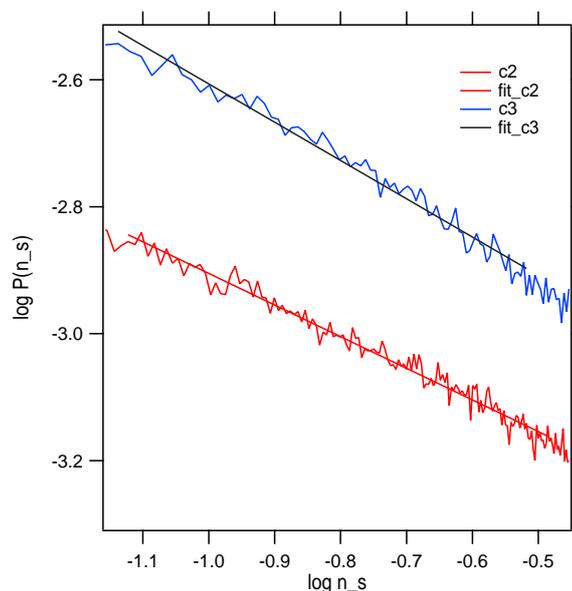


図 12: (Color online) 2 色摂動系 (赤)、3 色摂動系 (青) の臨界点 ϵ_c におけるスケールした波束 $P(n_s)$ の n_s 依存性。

まず、図 11 は、サンプル数を 1000 として 2 色系の臨界において scale した分布関数の中心部分を、5 つの時刻について重ねがきしたものである。最初の時刻と最後の時刻では、初期値も変えサンプル数 3000 のデータを黒の点線で重ねがきしてある。サンプル揺らぎはおおむね安定していることが分かる。 $n_s > 1$ は非常によく一致するが、 $n_s < 1$ では、時間によりズレがある。しかし、より長時間になれば収束する傾向はあるし、どの時間でもはおおよそ同じ減衰傾向がある。図 11 の下の図は、2 色摂動臨界系のサンプル数を 3000 にした場合の実スケール (MSD によるスケールナシの) 分布中心付近を拡大して表示したものである。図 12 は最終時刻ものを、2 色、3 色臨界でのものを改めて log-log 尺で表示した。これからベキ指数を評価すると、2 色摂動系が $\eta = 0.5$, 3 色が $\eta = 0.6$ を示す。図 13 は対応する 2 色摂動系の、return probability $P(n = 0, t)$ の t 依存性を示す。これもサンプルを増やすとよりきれいになる。このベキは、2 色が $D_2/d = 0.21$, 3 色が $D_2/d = 0.12$ となっている。

正確に成立する関係式は、

$$\frac{1}{t} \int_0^t dt \langle (\Delta n)^2 \rangle \leq t^{2D_1}, \quad (42)$$

であり、フラクタル次元 D_1 が平均二乗変位拡散指数 α の下限を与える。また、 $t \rightarrow \infty$ で、

$$\frac{1}{t} \int_0^t dt P(0, t) \sim t^{-D_2}, \quad (43)$$

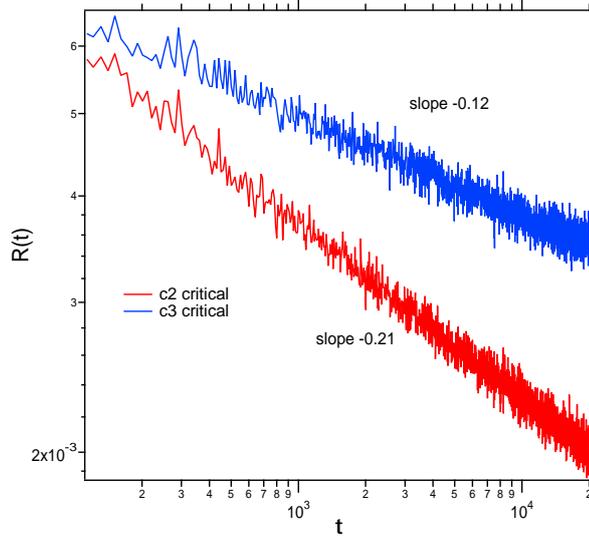


図 13: (Color online) 2 色摂動系 (赤)、3 色摂動系 (青) の臨界点 ϵ_c における波束 $P(0,t)$ の t 依存性。

から、グローバルな spectral dimension $D_s = 2D_2$ を評価することができる [82]¹⁶。一般には

$$\alpha \geq 2D_1, \quad (44)$$

であり、等号は $D_1 = D_2$ で、かつ式 (42) の不等号が等号になる場合である。実際、2 色摂動、3 色摂動の KA 系での結果は不等式 (44) の大小関係を満たしている。

時間減衰ベキと空間減衰ベキの関係をつけたいところだが、時間摂動系の次元をどうするかははっきりしない。仮に式 (37) を一般化して、

$$P(n,t) \propto t^{-D_s/d_t} n^{D_w-d_n}, \quad (45)$$

と時間 t と空間 n の次元を d_t, d_n と分けておく。 $2D_s/d_t$ はスペクトル (local DOS) の次元、 D_w は固有関数の次元である。2 色摂動系で $d_t = 3$, 3 色摂動系で $d_t = 4$, とし、2 色摂動系でも 3 色摂動系でも、拡散空間の次元を $d_n = 1$ とする。固有関数を考える空間は 1 次元なので $d_n = 1$ はもっともらしい。表 4 に、数値的に計算したデータによる指数をまとめてある。数値計算による $D_s = d_t \mu$, $D_w = d_n - \eta$ 上の関係式 ($D_s > D_w$ も含めて) をおおよそ満たすようにみえる。すなわち、式 (45) がある程度確かめられたことになる。また、 $2D_s, 2D_w \leq \alpha$ も満たしている。表 4 参照。

また、 $D_s, D_w \leq d_n$ と、フラクタル次元が空間次元より小さくかつ、 $D_s \sim D_w \sim d_n/2$ 、すなわち、一次元格子上的波束の振幅分布のフラクタル次元がその空間次元の約半分になっていることがわかる。これは、三次元ランダム系 ($d = 3$) でのアンダーソン転移点における波動関数のフラクタル次元が $D_2 \simeq 1.5$ と空間次元 $d = 3$ の半分程度になっているという事実と対応するのかもしれない。

¹⁶格子振動系では、 $\rho(\omega)$ をそのスペクトル密度として、spectral dimension D_s は $\omega \ll 1$ で、 $\rho(\omega) \propto \omega^{D_s}$ と決められる。

表 4: サンプル 1000 の数値計算による 2 色摂動系、3 色摂動系での分布中心部分の時間空間減衰指数 (μ, η) 。他の値は $D_s = d_t \mu$, $D_w = d_n - \eta$ から決めたものである。AM($d = 3$) は 3 次元 Anderson model での結果。

M	μ	η	d_t	d_n	D_s	D_w
2	0.21	0.5	3	1	0.63	0.5
3	0.12	0.6	4	1	0.48	0.4
AM($d = 3$)	—	—	1	3	1.5	1.43

もし上記のようなベキ領域が存在すれば、スケールした位置変数 n_s を用いて、

$$P(n_s) \propto \frac{1}{n_s^\eta} \exp\{-|n_s|^\beta\}, \quad (46)$$

と与えられることになる。 $\eta = d - D_2$, $1 < \beta < 2$ を適当な正の数とした。

6 まとめと議論

本稿では、局在をベースに持つ kicked Anderson モデル系に多色時間摂動を加え effective に系の次元を上げることにより、局在・非局在転移に関わる現象を調べた。ポテンシャル強度を W 、摂動強度を ϵ 、摂動のモード数を M として、主な結果は次のとおりである。

- $M \geq 2$ に対して、臨界現象の存在が確認できた。色数 M を変化させた場合の臨界点での量子拡散を特徴づける拡散指数 α や stretched Gaussian 分布の非ガウス性を特徴づける指数 β の関係式は $M \leq 10$ に対して、おおよそ $\beta = \frac{2}{2-\alpha}$ に従う。
- また、臨界点 ϵ_c での局在長（相関長）の発散を特徴づける臨界指数 ν の M 依存性は、平均場理論や修正された半古典理論の結果から有意にずれるように見えるが、場の理論から導かれる臨界不等式に収まる。
- 色数 M 依存性をみると M の増大により、局在・非局在転移を生じせしめるための臨界摂動強度 ϵ_c がおおよそ $\epsilon_c \sim (M-1)^{-1}$ に従って激に小さくなる。この結果は、局在状態がノイズのみならずコヒーレントな外的摂動に対して非常に不安定であることを意味する。
- 確率分布関数 $P(n, t)$ は $n \rightarrow \infty$ で β で特徴づけられる stretched Gaussian 分布に従う tail をもつ。確率分布関数 $P(n, t)$ の中心部分の振る舞いは、時間的空間的にベキ関数で減衰する。そのベキ指数は波束の振幅分布のフラクタル次元に対応する。

興味のある読者は著者らによる関連する文献 [29, 30, 31, 32] も参照されたい。

観測された局在・非局在転移現象の普遍性はさらなる check が必要である。例えば、ポテンシャル列の乱数の分布を、一様分布から 2 値分布にした場合、Gauss 分布にした場合、

Lorentz 分布にした場合など、、、。さらに、摂動としてモード数ではなく、他の周期の kick を加えた場合、すなわち、

$$f(t) = 1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{M}} \left(\sum_{k=1}^M \delta(t - T_k) \right) \quad (47)$$

でも同様の subdiffusion や臨界現象が観測されるであろうか。

臨界直前 ($\epsilon < \epsilon_c$) の量子状態に対し、次のような妄想が広がる。臨界領域に入る前に、局在側では指数関数的局在領域があり、摂動が大きくなるにつれて、臨界領域に入る。この臨界領域に突入するときの摂動強度の値を ϵ_{cl} とする。この ϵ_{cl} は、指数的局在からベキ的局在への転移点 (擬易動度端) に相当するとようにも思われる。しかし、計算結果からこの領域を分ける特徴的な ϵ の存在を明確にはできず、 ϵ_c 以下の全領域が臨界領域であるようにもみえる。

$\epsilon = \epsilon_c$ での転移は Anderson 転移と全く異なる転移であろうか。多色摂動 KR 系では $m_2 \sim t^1$ の正常拡散が発生する「脱干渉化転移」があると同時に「古典化転移」もある。kicked Anderson では古典系が存在しないので、解釈が異なるかもしれないが、古典化転移が「脱量子干渉化」転移という見方をすれば、類似なものであろうと予想される。また、転移後 ($\epsilon > \epsilon_c$) の非局在領域も系が脱干渉化 (古典化) する値 ϵ_{cl} (散逸転移点) の前に臨界領域との境界 $\epsilon_c < \epsilon < \epsilon_{cl}$ は非局在化した後の pre-dissipative 量子領域といえる。

A アンダーソン局在

A.1 Dynamical Localization と固有関数の局在：数学

ここでは、波束の拡散についてのいくつかの注意を挙げておく。簡単のため 1D 連続系で静的 (static) な場合を考える。一般に、数学では初期局在波束 $\Psi(t = 0, x) = \delta(x)$ がシュレーディンガー方程式による時間発展をして局在することを動的局在 (dynamical localization) という。この波束の動的局在は pure point spectrum (p.p.spectrum) といわれる spectral localization よりはるかに強い局在を意味する。

static な系で p.p. spectrum であることは、この量子拡散における ballistic motion の不在 (よりも遅い広がり方を示す) を意味するにすぎない [?]。すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_2(t)}{t^2} = 0, \quad (48)$$

である。すなわち、系が pure point spectrum であっても異常拡散や正常拡散 $\langle x^2 \rangle \sim t^\alpha (0 < \alpha < 2)$ の存在は否定されない。

数学的には、弱乱れ極限、低エネルギーでの局在状態の存在は証明されている。しかし、数学的には乱れた系で非局在状態の存在や易動度端の存在は証明されていない。また、p.p.spectrum であることと、ベキ局在状態であることは否定していない。

逆に、ベキ関数的局在状態が存在すれば、リャプノフ指数が零で、p.p. spectrum になるが、これは準結晶などにおいて物理的にも実在する。二次元ランダム系でも上記のベキ局在への転移が存在する可能性がある。広がった状態への乱れ強度 W_c の転移点 W_c は存在せずとも、指数関数的局在からリャプノフ指数が零のベキ的局在状態への転移点 $W = W_{cl}$ が存在する可能性はある。そのための根拠は、固有関数の参与率 (participation ratio) に関する数値計算の結果にも見られる。ここで、 d 次元離散空間でシステムサイズ L の固有関数 $\Psi(n)$ の参与率を

$$PR(L) = \frac{\left(\sum_n^L |\Psi(n)|^2\right)^2}{\sum_n^L |\Psi(n)|^4} \quad (49)$$

とする。 $L \rightarrow \infty$ で、局在ならば $PR(L) \sim L^0$, 広がっていけば $PR(L) \sim L^d$, となり、臨界点では $PR(L) \sim L^{D^*}$ ($0 < D^* < d$), となる。しかし、指数関数的局在の場合、局在長 ξ の内側 ($L < \xi$) ならば、いずれの場合も $PR(L) \sim L^{D^*}$ が観測される。乱れの強さ W のある領域 ($W_{cl} < W < W_c$) でベキ指数の異なる臨界的 L 依存性が存在すれば、ベキ関数的局在領域の存在を示唆する。文献 [?] を参照のこと。

また、ベキ局在でも指数関数的局在でも、波束の量子拡散は抑えられ平均二乗変位は一定値 (本文での ξ^2) に収束するであろうが、局在性によりその収束の仕方は異なるであろうと予想される。

A.2 アンダーソン局在の特性長・特性時間

一体問題での局在現象に登場する主な、空間スケール、時間スケール、エネルギースケールを整理しておく。簡単のため、空間連続系を考え、格子間隔は考えないことにする。まず、長さのスケールとして、電子などの量子状態のフェルミ波長 λ_F 、平均自由行程 λ_{mfp} 、局在長 ξ 、物質 (系) のサイズ L がある。 $L < \lambda_{mfp}$ では ballistic motion が、不純物などによる散乱が現れる距離が λ_{mfp} であり、 $\lambda_{mfp} < L < \xi$ では正常拡散的運動が想定されている。非局在状態では、 $\xi \rightarrow \infty$ である。フェルミ波長と平均自由行程が同等になる条件

$$\lambda_F \sim \lambda_{mfp}, \quad (50)$$

が量子干渉現象が生じ始める目安となる。(Ioffe-Regel criterion: IE 規範) という。これを Fermi エネルギーと弾性散乱時間 τ で表せば、

$$E_F \tau \sim \hbar, \quad (51)$$

である。

また、局在固有関数の振幅においては、局在長以内ではフラクタル的揺らぎを持ち、局在長の外側では指数関数的に減衰することが見られる。最終的に局在に至る場合でも、対応する時間スケールとして、平均自由時間、拡散時間、局在時間などを定義できる。これ

を二次元ランダム系における波束の拡散における平均二乗変位の時間変化で表せば、

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \begin{cases} \sim t^2 & (0 \leq t \leq W^{-2}) \\ \leq Dt & (W^{-2} \leq t \leq e^{1/W^2}) \\ \leq \xi^2 & (t > e^{1/W^2}), \end{cases} \quad (52)$$

と、上からすなわち、(i) ballistic 領域、(ii) 正常拡散領域、(iii) 局在領域の3段階の領域が存在すると（物理的には）いわれている。ここでは、 $\hbar = 1$ という単位系を取って、領域を分ける mean free time、diffusion time や localization time をサイトエネルギーの乱れの大きさ W で表現してある。

時間無限大で指数関数的局在を示す場合、広い空間領域での確率分布関数の形状が、

$$P(n, t = \infty) \sim \begin{cases} \exp\{-n/\ell\} & (n < \ell) \\ \frac{1}{n^{3/2}} \exp\{-n/4\ell\} & (n \gg 4\ell) \end{cases}, \quad (53)$$

になるという一次元の空間連続なランダム系での解析的結果がある (Gogolin)[81]。ここで、 ℓ は平均自由行程を表す。一次元ランダム系では $\xi \sim \ell$ ゆえ、空間領域により局在長が数倍異なることになる。これによると、分布関数を使い局在長を評価する場合、分布の中心部分での形状から評価するより裾野の形状から評価する方が数倍大きなものになる可能性があるが、具体的な数値データでの明確な確認はない。

A.3 平均操作に関する考察

典型的な時間を含まない場合の1Dランダム系の局在・非局在について考える。この場合、転移の存在は、局在・非局在の判断基準の設定の仕方にも依存する。特に、二次元系やベキ関数的局在への転移などの可能性のある系では「微妙な」状況がある。特異領域 (anomalous regime) の存在にもかかわる。

例えば、波動関数に関わる次の三つの平均操作に起因する量は全く異なる局在判断を与える場合がある。

$$\langle \Psi(x) \rangle, \langle |\Psi(x)|^2 \rangle, \langle \log |\Psi(x)|^2 \rangle, \quad (54)$$

$\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を示す。 $\langle \Psi(x) \rangle$ は量子状態の位相を含む。 $\langle \log |\Psi(x)|^2 \rangle$ は、リャプノフ指数を決める量であり、 $\langle |\Psi(x)|^2 \rangle$ とは $|\Psi(x)|^2$ に関する幾何平均か代数平均かの違いを生じることになる。その結果、

$$\langle |\Psi(x)|^2 \rangle \sim e^{2x\gamma_2}, e^{\langle \log |\Psi(x)|^2 \rangle} \sim e^{2x\beta_2}, \quad (55)$$

とすれば、

$$\beta_2 < \gamma_2, \quad (56)$$

の関係 (シュバルツの不等式) がある。確率分布 (randomness) をコーシー分布で与える強結合モデルは、その局在長のエネルギー、乱れ強度依存性を解析的に厳密に解けるモデ

ルである。このモデルでは、二次元系、三次元系ですら、 γ_2 は計算できるが、 $\gamma_2 > 0$ だからといって、局在状態であるということとはできない(グリーン関数の平均やグリーン関数の対数で定義する [83]。)

一般化 q 次のモーメントによる定義もできる [84]。例えば、

$$\gamma_k \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \langle |\psi_n|^k \rangle}{kn}, \quad (57)$$

$$\beta_k \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \log |\psi_n|^k \rangle}{kn} \quad (58)$$

とする。上の式で、 γ_k を moment-definition(MD), β_k を log-definition(LD) と呼ぶことにする。このとき self-averaging 可能で well-defined なリャプノフ-指数 β_2 は形式的オーダーパラメータになりえる。このとき、

$$0 \leq \beta_k \leq \gamma_k, \quad (59)$$

が成立する。従って、 $\beta_k = 0$ であっても、 $\gamma_k > 0$ となる可能性もあり、必ずしも extended とはならない。

Suslov は、Anderson 転移の擬一次元系に関する有限サイズスケールングにおいて、VW の自己無撞着理論の成立を信じこれを高次元にまで拡張している。数値計算結果のズレを数値データの取り扱い方が原因であるとして批判している。その視点にはいくつかの興味深い点もある。 $d > 2$ では、臨界点 W_c が存在し、 $W < W_c$ の指数関数的局在と $W > W_{c1}$ での伝導相が存在し、そしてその中間 $W_{c1} < W < W_c$ に power-law envelop をもち揺らぎの大きな領域が存在する可能性があるとして推測している。これは、以前からの著者らの憶測、すなわち局在・非局在転移が2段階(ベキ局在への転移、非局在への転移)で構成されるという観方にも通底する。これらの存在は標準的アンダーソン転移の理論の枠組みでは考慮されていない。Suslov は数値計算の生のデータを再解釈することによりそれが可能であると主張している。

LD は、物理的情報をもち同じエネルギーで局在と非局在は共存しない指数関数的局在で意味を持つ量であるが近似的にしか計算できず、ベキ局在と指数局在の違いを記述できない。一方、MD は物理的情報を含まないが、解析的取り扱いが可能である。metallic 相が存在しても情報を与えない。例えば、非指数関数的局在で意味を持つ。実際、特別なサンプルやエネルギーでは絶縁相と金属相が共存可能である。Suslov の主張では、MIT は二次相転移ではなく一次相転移であり、有限系で一相(局在)でも、熱力学的極限では二相共存になるという主張である。

A.4 ベキ局在についての考察

一般に、1DDS ではメジャー零の点を除いたエネルギー軸上の量子状態は全て指数関数的に局在することが知られている。一方、3DDS では指数関数的局在と規格化不可能な共鳴状態を分ける本当の(genuine)易動度端が存在する。2DDS では指数関数的局在とベキ関数的局在を分ける擬易動度端の存在が Motto や Suslov らにより提案されてきた。もしこの

規格化不可能なベキ関数的局在領域が存在すれば、転移点直上の点以外でも subdiffusion が存在することになる。その場合の局在状態は規格化可能な状態であるためリュブノフ指数はゼロでコヒーレントな backscattering による物理量である電気伝導度はゼロになる [36]。(3DDS ではこの共鳴状態が規格化不可能になり有限の電気伝導度を生み出す。) 実際、2DDS ではバンドの裾野での指数関数的局在とバンド中心でのベキ関数的局在状態を分ける擬易動度端の存在を示唆する数値実験結果もいくつか報告されている [37, 85, 86, 87, 88]。

ベキ局在が観測されているランダム量子系の固有状態として、hopping 項がランダムな 2DDS の off-diagonal model の band center の状態がある。同様に 1DDS の off-diagonal model でもリュブノフ指数零で stretched exponential 型の extended state の存在が示されている。例えば、1DDS の強結合モデルを

$$E\phi_n = t_{n+1}\phi_{n+1} + t_{n-1}\phi_{n-1}, \quad (60)$$

ここで t_n は隣接サイト間の hopping 積分項で on-site 項は零とした。特に、 $t_n = 1 + W_n$ で $W_n \in [-W, W]$ ($W < 1$) の一様分布の場合、 $E = 0$ ならば、

$$\phi_{n+1} = -\frac{t_{n-1}}{t_{n-1}}\phi_{n+1}, \quad (61)$$

であり、

$$\ln |\phi_n| \propto \sqrt{n}, \quad (62)$$

となる。すなわち、振幅は

$$|\phi_n| \propto \exp\{C\sqrt{n}\}, \quad (63)$$

と stretched 指数型の増大をする。 $E = 0$ の点のみだとメジャー零ということになるが、同じような傾向は、on-site 乱れの相関のある 1DDS でのより広いエネルギー領域でも観測されている。このモデルは、 $(E, \phi_n) \rightarrow (-E, (-)^n \phi_n)$ という変換で不変であることがわかる。これは chiral 対称性をもつ。

二次元ランダム系の弱乱れなどで power-law 局在が見られるであろうか。Suslov らの示唆した指数関数局在-ベキ関数局在転移 (KT 転移) があるか。これに対する数値的結果は次のものがある。二次元の bond 量子パーコレーションモデルにおいて指数関数的局在からベキ関数的局在への転移が報告されている [43]。さらに、二次元の site 量子パーコレーションモデルにおいては、Pendry's conjecture として知られる stretched exponential 的挙動が見られている [42]。Haldas らの論文では conductance のベータ関数から power-law を示唆している [41]。

どうしてベキ局在 (拡散で言えば、subdiffusion に相当) を LDT の理論で考慮しないかと言え、解析性との関係からであろう。これは注意すべき点である。一般に、時間無限大やシステムサイズ無限大の熱力学的極限で相転移は生じるので、有限系は解析的であるとす。すなわち、転移点以外はあらゆる量は適当な変数に関する展開で指数関数的 decay し、これで系の状態の解析性を保証する。展開が途中までベキ的な減衰でもそれは

過渡的なもので最終的に指数関数的 decay を期待しているためであろう。有限のもの（これは解析的であることが保証されている）を展開して解析性から転移点を探るスケーリング解析を正当化している。しかし、これはどこまでがスケーリング成立領域なのか？その広さとも関連して重要な問題であると思う。

B 臨界点と異常拡散のスケーリング則

B.1 Delande らの考察

Delande らも用いている量子拡散のアンダーソン転移による異常拡散の次元依存性、式 (16) の導出しておく。拡散空間での平均二乗変位を $\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$ とし、この時間変化がパラメータに依らず次の様に 1 つの関数で表されるとする。

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = t^b f((\epsilon - \epsilon_c)t^a), \quad (64)$$

ここで、 ϵ は摂動強度、 ϵ_c は局在・非局在転移点での摂動強度。局在相（絶縁相）では、局在長が $\xi \propto (\epsilon_c - \epsilon)^{-\nu}$ と振る舞い、非局在相（伝導相）では、拡散係数が $D \propto (\epsilon - \epsilon_c)^s$ という形のべき的依存性を仮定する。このとき、 $t \rightarrow \infty$ におけるスケーリング関数 $f(x)$ の漸近形は、

$$f(x) \rightarrow \begin{cases} x^s & (x > 0) \\ |x|^{-2\nu} & (x < 0) \end{cases} \quad (65)$$

となる。

一方、 $t \rightarrow \infty$ で絶縁相と伝導相それぞれにおける t 依存性は、

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \xi^2 \rightarrow \begin{cases} t^0 & (x > 0) \\ Dt \rightarrow t^1 & (x < 0) \end{cases} \quad (66)$$

である。式 (65), (66) を比較して、

$$b + as = 1, b = 2a\nu, \quad (67)$$

となり、

$$a = \frac{1}{2\nu + s}, b = \frac{2\nu}{2\nu + s}, \quad (68)$$

となる。ここで、Wegner 関係式 $s = (2 - d)\nu$ を用いると、 a, b は

$$a = \frac{1}{d\nu}, b = \frac{2}{d}, \quad (69)$$

となる。 M 色摂動系の拡散空間次元を $d = 1 + M$ とすれば、臨界点 $\epsilon = \epsilon_c$ で、

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = t^{\frac{2}{M+1}}, \quad (70)$$

となる。 $(M \geq 2)$ すなわち、

$$\frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle}{t^{2/(M+1)}} = f((\epsilon - \epsilon_c)t^{\frac{1}{(1+M)\nu}}), \quad (71)$$

となる。

スケールされた平均二乗変位 $\Lambda(\epsilon, t)$ を

$$\Lambda(\epsilon, t) \equiv \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle}{t^\alpha}, \quad (72)$$

と定義すると、 $\epsilon < \epsilon_c$ の局在相で、

$$\Lambda(\epsilon, t) = f(\xi t^{-\alpha/2}), \quad (73)$$

$$= f_1((\epsilon_c - \epsilon)^{-\nu} t^{-\alpha/2}), \quad (74)$$

$$= f_2((\epsilon_c - \epsilon)t^{\alpha/2\nu}), \quad (75)$$

と表すことができる。

B.2 ベキ型分布関数と異常拡散のスケーリング則

局在・非局在の場合でも固有関数や波動関数のフラクタル性が知られている [89, 90, 91, 92, 93, 77]。このフラクタル性を特徴づけるベキ関数が量子拡散にどう反映するか見ておこう。

初期状態 $|\Psi(t=0)\rangle$ を固有状態 $|n\rangle$ で展開する

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\Psi(t=0)\rangle, \quad (76)$$

$$= \sum_n \Psi_n(0)|n\rangle \quad (77)$$

ここで、 $\Psi_n(0) = \langle n|\Psi(t=0)\rangle$ 。時間発展した状態 $|\Psi(t)\rangle$ は

$$|\Psi(t)\rangle = \exp^{-iHt}|\Psi(t=0)\rangle \quad (78)$$

$$= \sum_n \exp^{-iE_n t} \Psi_n(0)|n\rangle, \quad (79)$$

これを位置表示で書けば、

$$\Psi(t, r) = \langle r|\Psi(t)\rangle, \quad (80)$$

$$= \sum_n \exp^{-iE_n t} \Psi_n(0) \langle r|n\rangle, \quad (81)$$

$$= \sum_n \exp^{-iE_n t} \Psi_n(0) \phi_n(r), \quad (82)$$

と表せる。平均二乗変位は、

$$\langle r^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(t, r)|^2 r^2 d^d r, \quad (83)$$

$$= \sum_{n,m} \exp^{-i(E_n - E_m)t} \phi_n(0)^* \phi_m(0) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(r) \phi_m(r)^* r^2 d^d r, \quad (84)$$

ここまでは exact である。次に、固有関数の位置表示での概形がベキ関数部分を伴う場合を考え、

$$\phi_n(r) \sim \frac{1}{r^{\eta/2}} \exp\{-r/\xi\} \quad (85)$$

とする。例えば、二次元ランダム系などの場合では、上記の式で仮定し、

$$\eta(\ell) \sim 2/\ell_e, \quad (86)$$

と、乱れの強さを平均自由行程 ℓ_e で現わす。波数 k の Bloch 波が散乱されてその初期強度が $1/e$ になる平均距離で定義され、散乱行列を定義する角度などで決まる。

このとき、指数関数的減衰が効く前での短距離領域 $r < \xi$ での振る舞いを調べるために、和と積分を次のように評価する。和に $|E_n - E_m| < 1/t$ の状態 pair が効き、各状態 $\phi_n(r)$ の局在中心を R_n とすれば、 $r < \xi$ の領域で $R_n \sim t^{1/d}$ 、積分の cut-off を R_m 、積分の中の r をそれで置き換えるとする。 $|R_n - R_m| \sim |E_n - E_m|^{-1/d} \sim t^{1/d}$ であり、 r 積分から $dr r^{d+1}$ が出て $R_n^{d+2} \sim t^{(d+2)/d}$ となる。これに加えて、ベキ関数の積分からも $t^{-\eta/d}$ が加わり、

$$\langle r^2 \rangle \sim t^{2/d - \eta/d}, \quad (87)$$

$$\sim t^{(2/d)(1 - \eta/2)}. \quad (88)$$

となる。すなわち、ベキ関数的減衰が効いている領域では、subdiffusion の拡散指数が reduce されて見えることになる [34]。

C 平均場近似

C.1 スケーリング理論

アンダーソン転移点における臨界指数間の関係式である。局在長を ξ 、電気伝導度を σ とし、

$$\xi \sim (x_c - x)^{-\nu}, \quad (89)$$

$$\sigma \sim (x - x_c)^s, \quad (90)$$

とする。 x は局在・非局在転移を制御するパラメータなら何でもよい。例えば、randomness W 、Fermi energy E_F 、電子密度 n_e 、磁場の強さ H など。この臨界指数間の関係式、

$$s = (2 - d)\nu \quad (91)$$

がウェグナー関係式 (Wegner's Relation) であるが、系の次元 d も関わるのでハイパースケーリング関係式の一つと言える。実験結果はこの関係式を満たさないという問題点がある。

局在・非局在転移に関する有限サイズスケーリングから決める。まず、無次元コンダクタンス $g(L)$

$$g(L) = \frac{G(L)}{e^2/2\pi\hbar} \quad (92)$$

コンダクタンス $G(L)$ は、金属相側でオームの法則を使い

$$G(L) = \sigma(L)L^{d-2} \quad (93)$$

である。従って、

$$g(L) = \frac{2\pi\hbar}{e^2}\sigma(L)L^{d-2} \quad (94)$$

$$(95)$$

であり、有限長では

$$\sigma(L) \sim L^{2-d}g(L) = f_s(L/\xi) \quad (96)$$

と仮定して局在・非局在転移点でのスケーリング理論を使う。

ここでは、臨界指数 s, ν の関係がわかればいいので、一般に長さの単位を b として、

$$g = g(L/b, \xi/b) \quad (97)$$

と2変数のスケーリング関数（無次元）を考える。このとき σ は、 $b = \xi$ として、

$$\sigma \sim \xi^{2-d}g(L/\xi, 1) = \xi^{2-d}f_s(L/\xi) \quad (98)$$

であり ($L \rightarrow \xi L/\xi$ とし L/ξ 部分は f_s に繰り込んだ)、 $L \rightarrow \infty$ で $\sigma(L)$ が L に依存しない (金属相での電気伝導度のための要請) ためには $f_s \rightarrow const(L \rightarrow \infty)$ であり、

$$\sigma(L) \sim \xi^{2-d} \quad (99)$$

となる。したがって、 $s = (2-d)\nu$ 。

注意点として、金属相で局在長 ξ を用いているが、金属層では相関長と解釈し、自明では無いが相関長の臨界指数 ν_{ext} は $\nu_{ext} = \nu$ (局在長のものと同じ) であるとした。

また、量子拡散に適応する場合、いわゆるアインシュタイン関係式を認めれば、拡散係数 D と電気伝導度との対応

$$\sigma \sim D \quad (100)$$

から臨界指数 s を $D \sim (x - x_c)^s$ のものとみればいい。

C.2 自己無撞着平均場近似

Vollhardt と Wolfle(VW) は、ガラス転移などでも用いる Gotze の密度応答関数の理論を拡張し、動的拡散係数 $D(k, \omega)$ に対する自己無撞着平均場近似の方程式を導出した。 $d > 2$ に対して、摂動展開の一次のオーダーで

$$\frac{D_0}{D(k, \omega)} = 1 + \lambda dk_F^{2-d} \int_0^{k_0} dk \frac{k^{d-1}}{-i\omega/D(k, \omega) + k^2} \quad (101)$$

ここで、ボルツマン方程式による古典的拡散係数 $D_0 = \frac{1}{\pi dm \lambda_F} = v_F \ell / d$, 乱れの大きさを示すパラメータ $\lambda = 1/(2\pi E_F \tau)$ である。 v_F はフェルミ速度、 k_F はフェルミ波数、 $k_0 = 1/\ell$ は平均自由行程による cut-off である。強結合モデルのような格子系では、 $k_0 = 1/a$ (a は格子間隔) とすべきである。また、有限サイズ効果は積分の下限を $k_s = 1/L$ として取り込むことができる。この式で、

$$D(k, \omega) \simeq D(\omega) k^2, \quad (102)$$

と仮定すれば、局在相に置いて、

$$\xi = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}}, \quad (103)$$

から局在長が得られる。

例えば、 $d = 1$ では、

$$1 = \frac{\hbar k_F}{2\pi E_F \tau} \int_0^{k_0} dk \frac{1}{\xi^{-2} + k^2}, \quad (104)$$

より、積分部分は $\tan^{-1}(\xi/\ell)$ となるので、

$$\frac{\xi}{\ell} = \tan(\pi k \ell), \quad (105)$$

従って、 $d = 1$ での局在長 ξ_{1d} は、

$$\xi_{1d} \sim \ell, \quad (106)$$

となる。 $d = 2$ では、

$$1 = \frac{1}{\pi k \ell} \log \left(1 + \frac{\xi^2}{\ell^2} \right), \quad (107)$$

が要請され、局在長 ξ_{2d} は、

$$\xi_{2d} \sim \ell \exp\{\pi k \ell / 2\}, \quad (108)$$

となる。結局、上記の近似の範囲で、 $d = 1$ で局在長は平均自由行程と同程度であり、 $d = 2$ で局在長は平均自由行程に対し指数関数的に増大する。

$d = 3$ での局在長 ξ_{3d} は、

$$1 = \frac{1}{\pi k_F^2 \ell} \int_0^{k_0} dk \frac{k^2}{\xi^{-2} + k^2}, \quad (109)$$

より

$$\xi_{3d} \sim \left(1 - \frac{1}{\pi(k_F \ell)^2}\right)^{-1}, \quad (110)$$

となる。すなわち、 $\pi(k_F \ell)^2 = 1$ (Ioffe-Regel 条件) を満たす転移点で ξ_{3d} が発散するので、この自己無撞着理論の範囲内で、 $d = 3$ での局在・非局在転移の臨界指数 $\nu = 1$ であることになる。不純物系の物性という意味では、 $lk_F \gg 1$ を clean limit、 $lk_F \ll 1$ を dirty limit、ともよぶ。金属相においても、伝導率 σ に関して次元ごとに同様な計算をすることができる。

また、 $2 < d < 4$ の臨界点において、動的拡散係数は、

$$D(\omega) \propto \omega^{\frac{d-2}{d}}, \quad (111)$$

となる。これを、時間領域で表せば、

$$D(t) \propto t^{\frac{2}{d}-2}, \quad (112)$$

なるがゆえに、平均二乗変位は $D(\omega) = \omega^2 FT(m_2(t))$ より、 $FT(m_2(t)) \sim 1/\omega^{1+2/d}$ 、従って、

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle \sim t^{\frac{2}{d}}, \quad (113)$$

となる。 $FT(\dots)$ は $t \rightarrow \omega$ へのフーリエ変換を表す。

また、Garcia は、 $d > 2$ の臨界点での動的拡散係数の波数 k 依存性に

$$D(k, \omega) \simeq D(\omega) k^{d-2}, \quad (114)$$

というスケーリングを用いて(式(102)との違いに注意)、

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{d-2}} \text{ for } d > 2. \quad (115)$$

を導いた。これはあらゆる次元で臨界不等式を満たす。弱局在展開において、maximally crossed diagram を繰り返さないことから半古典的取り扱いということもできる。この理論的な結果の方が数値的に $d = 6$ まで良く一致することが報告されている。

非線形シグマモデルでは、 $d = 2 + \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$) に対し、

$$\nu = \frac{1}{\epsilon} + 0 \cdot \epsilon^0 + 0 \cdot \epsilon^1 + O(\epsilon^2), \quad (116)$$

である [94, 95]。高次項がゼロなら、 $(2-d)\nu = 1$ になり、伝導相で $s = 1$ なら Wegner 関係式をみたす。

D 分布関数形に関する考察

D.1 $\alpha - \beta$ 関係式の導出

平均二乗変位の指数 α と空間分布を特徴づける指数 β の間の関係式の導出。

時刻 t で位置 n での確率分布関数 $P(n, t)$ が、次の様なマスター方程式に従うものとする。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n, t) = \int_0^t dt' \sum_{n'} W(n, n', t - t') \Delta P(n', n, t'), \quad (117)$$

ここで、 $\Delta P(n', n, t') \equiv P(n', t') - P(n, t')$ である。また、記憶関数 $W(n, n', t - t')$ は Louville 方程式の off-diagonal 項どうしを繋ぐ役割をするものである。これは、サイトを表す離散変数 n を連続変数 x と見なせるような租視化を行い、

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \int_0^t dt' I(t - t') \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t'), \quad (118)$$

と表せる。ここで、

$$I(t - t') = (1/2) \sum_{\Delta x} g(\Delta x, t) (\Delta x)^2 \quad (119)$$

であり、 $g(\Delta n, t)$ は租視化した記憶関数である。

式 (118) をラプラス変換すれば、

$$s\tilde{P}(x, s) = \tilde{I}(s) \frac{\partial^2 \tilde{P}(x, s)}{\partial x^2} \quad (120)$$

となる。ここで、 $\tilde{P}(x, s)$ と $\tilde{I}(s)$ は、 $P(x, t)$ と $I(t)$ のラプラス変換を表わしている。

この方程式の解は

$$\tilde{P}(x, s) = B(s) e^{-|x| \sqrt{s/\tilde{I}(s)}}, \quad (121)$$

となる。 $B(s)$ は規格化因子からくる部分とする。これを、逆ラプラス変換をして、確率分布関数は

$$P(x, t) = \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} ds B(s) e^{-|x| \sqrt{s/\tilde{I}(s) + st}}, \quad (122)$$

と表せる。 $s \rightarrow 0$ の極限において、 $\tilde{I}(s)$ が s に関し滑らかな関数として、

$$\sqrt{s/\tilde{I}(s)} \equiv f_0 s^\alpha \quad (123)$$

という形を仮定する (f_0 は定数)。すると、式 (122) における積分は、次の方程式の解としての鞍点で近似される。

$$\alpha|x|f_0s^\alpha - st - \alpha = 0, \quad (124)$$

ここで、 $0 < \alpha < 1$ である。長時間極限 $\alpha/t \ll 1$ で $s \rightarrow 0$ での解は、

$$s^* = (\alpha f_0 |x|/t)^{1/(1-\alpha)}, \quad (125)$$

となるので確率分布の形は

$$P(x, t) = B \exp\{-|x/x_s(t)|^\beta\} \quad (126)$$

となる。(Bは規格化定数とする。) ここで、

$$\boxed{\beta = \frac{2}{2-\alpha}} \quad (127)$$

また、スケール因子 $x_s(t)$ は、

$$x_s(t) = \frac{t^\alpha}{f_0 \alpha^\alpha (1-\alpha)^{(1-\alpha)}}, \quad (128)$$

$$\sim t^\alpha, \quad (129)$$

である。これは、 $t^\alpha < |x| < t$ で成立する。これが、平均二乗変位の変化 $\langle (\Delta n)^2 \rangle \sim t^\alpha$ が生ずることに対応する。式 (126) が満たす非整数階微分を含む拡散方程式は、

$$\frac{\partial^\alpha P(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{f_0^2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (130)$$

となる。一般に、連続時間ランダムウォーク (CTRW) では、 a, b を正の実数として、fractional derivative を用いて

$$\frac{\partial^a P(x, t)}{\partial t^a} = D_{a,b} \frac{\partial^b P(x, t)}{\partial x^b} \quad (131)$$

の場合、平均二乗変位は

$$\boxed{\langle x^2(t) \rangle \sim t^{2a/b}}, \quad (132)$$

となる [71]。 $D_{a,b}$ は一般化拡散係数である。

D.2 分布中心における式 (37) の導出

確率密度分布関数 $P(r, t)$ が次の拡散方程式を満たすとする。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(r, t) - D(r, t) \nabla^2 P(r, t) = \delta(t) \delta(r), \quad (133)$$

このとき、動的拡散係数の diffusion propagator, $D(q, \omega)$ を用いて、確率密度分布関数のフーリエ・ラプラス変換は、

$$P(q, \omega) = \frac{1}{-i\omega + D(q, \omega)q^2}, \quad (134)$$

と表せる。さらに、臨界点における動的拡散係数の変換部分 $D(q, \omega)$ の形が次のスケール普遍性を持つものとする。

$$D(q, \omega) = \frac{\xi^{2-d}}{\hbar\rho} F(\xi/L_\omega, \xi q), \quad (135)$$

$F(x, y)$ はスケール関数, $\rho(\omega)$ は移動度端近傍の状態密度 (DOS) である。この形は、ランダム系の有限サイズスケーリングでの

$$\sigma(q, \omega) = \frac{e^2}{\hbar} g_c L^{2-d}, \quad (136)$$

とアインシュタイン関係式 $\sigma = ne^2 D$ から得る。その際の長さのスケールとして、局在長 ξ , 空間のスケール q^{-1} , に加え ω に対応する長さ $L_\omega = (\rho\hbar\omega)^{-1/d}$ を用いた。さらにもうひとつ、平均レベル間隔 Δ と対応する長さのスケール L_Δ も存在する。これは、

$$\Delta = \frac{1}{\rho L_\Delta^d}, \quad (137)$$

つまり、 $L_\Delta = (\rho\Delta)^{-1/d}$ である。(L_Δ と L_ω を同程度としてよい。)

式 (135) において、 $\xi = 1/q$ とおけば、

$$D(q, \omega) = \frac{q^{2-d}}{\hbar\rho} f(qL_\omega), \quad (138)$$

となる。ここで、新たな指数 η を用いて、スケール関数の漸近形 ($z \rightarrow \infty$) を

$$f(z) \rightarrow z^{-\eta}, \quad (139)$$

とする。指数 η は逆参与率の一般化次元 D_2 と $\eta = d - D_2$ の関係にある。

長波長極限で q -依存性が無くなるためには、 $D(q, \omega) = q^{d-2-\eta}(qL_\omega)^{-\eta}$ である。一般に、式 (135) より $qL_\omega \gg 1$ に対し、

$$D(q, \omega) = q^{d-2-\eta}\omega^{\eta/d}, \quad (140)$$

となる。

これを用いて ω に関する逆変換が

$$P(q, t) \propto \int d\omega e^{-i\omega t} \omega^{-\eta/d} q^{\eta-d}, \quad (141)$$

$$\propto q^{\eta-d} t^{-(1-\eta/d)}, \quad (142)$$

となる。すなわち、

$$P(q, t) \sim q^{-D_2} t^{-D_2/d}, \quad (143)$$

さらに、 q に関して逆変換 (多重積分) して $q^d t \gg \hbar\rho$ では、

$$\boxed{P(r, t) \sim t^{-D_2/d} r^{D_2-d}}, \quad (144)$$

が導ける。ここでは、逆ベキ関数 $1/|x|^\nu$ のフーリエ変換が $\sim 1/|k|^{1-\nu}$ となることを用いた。ここで、 d は拡散空間の次元で、 $D(< d)$ は固有関数のマルチフラクタル次元である。

一方、逆に high frequency limit $\omega \gg 1$ においては、 $f(z) \propto z^{2-d}$ より

$$\boxed{\sigma(\omega) \propto \omega^{(d-2)/d}}, \quad (145)$$

となる。これは、ガラス転移の問題で最初に導出されたものである。

D.3 空間確率分布関数について再考察

$t \gg 1$ での確率分布関数の形状における形状は $\alpha - \beta$ 関係式などを踏まえて、

$$P(n, t) = C \frac{1}{n^{A_0(\epsilon)}} \exp\{-A_1(\epsilon)n - A_2(\epsilon, t)n^\beta\} \quad (146)$$

と想定できる。ここで、 C は規格化定数。三つの関数の積で、第一番目はベキ減衰関数、二番目が指数減衰関数、三番目が stretched Gaussian 的減衰関数を表している。当然、分布の中心付近ではベキ関数、裾野では stretched Gaussian 的関数が支配的になる。ベキ関数のベキ指数はフラクタル次元に対応し、指数関数の指数はリャプノフ指数（局在長）に対応し、stretched Gaussian 的関数部分は $\alpha - \beta$ による関数形に対応する。

また、ベキから指数関数の cross over 領域は、

$$\frac{1}{n_{1-2}^{A_0(\epsilon)}} = \exp\{-A_1(\epsilon)n_{1-2}\} \quad (147)$$

を満たす n_{1-2} で与えられるが、 n_{1-2} は $\epsilon \ll 1$ でしか実解をもたない。指数関数からガウシアンへの cross over 領域は、

$$\exp\{-A_1(\epsilon)n_{2-3}\} = \exp\{-A_2(\epsilon, t)n_{2-3}^\beta\} \quad (148)$$

を満たす n_{2-3} で与えられる。いずれにせよ、中間の指数関数的に減衰する空間領域を見出すことは困難かもしれない。

また、ベキ関数領域は必ず存在し、指数関数的領域は転移点に達する前 $\epsilon < \epsilon_c$ においては裾野まで続き、転移点では stretched Gaussian 的関数が dominant になることなどを想定すると、転移点近傍の $\epsilon < \epsilon_c$ で

$$A_1(\epsilon) \sim |\epsilon_c - \epsilon|^a, \quad (149)$$

また、

$$A_2(\epsilon, t) \sim t^{-|\epsilon_c - \epsilon|^b} \rightarrow 1 (t \rightarrow \infty), \quad (150)$$

という係数変化を伴う確率分布関数の実現していると仮定することもできる。（ β を臨界点での値 $\beta(\epsilon_c)$ に固定して、係数 A_2 のみに時間依存性を認めるならばの話ではあるが。）

●著者の貢献:

山田弘明：研究構想、計算の実行、文章の執筆

池田研介：研究構想、文章の執筆

●利益相反: 本原稿にかかわる開示すべき利益相反関連事項はない。

謝辞

この研究には、部分的に日本の税金が使われています。納税者である日本国民に感謝します。また、この研究の一部は、河原屋セミナーハウスと、越後小池記念館を利用し遂行されました。関係者に深謝します。

参考文献

- [1] K.Ishii, Prog. Theor. Phys. Suppl. **53**, 77(1973).
- [2] L.M.Lifshiz, S.A.Gredeskul and L.A.Pastur, *Introduction to the theory of Disordered Systems*, (Wiley, New York,1988).
- [3] P.Stollmann, *Caught by Disorder: Bound States in Random Media*, (Birkhauser, 2001).
- [4] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- [5] MacKinnon, A., and B. Kramer, 1981, Phys. Rev. Lett. **47**, 1546. B. Kramer and A. MacKinnon, Rep. Prog. Phys. **56**, 1469 (1993).
- [6] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, Rev. Mod. Phys. **57**, 287 (1985).
- [7] K. Slevin and T. Ohtsuki, Phys. Rev. Lett. **78**, 4083 (1997).
- [8] Peter Markos, Acta Physica Slovaca **56** (5), 561-685 (2006).
- [9] Antonio M. Garcia-Garcia, Phys. Rev. Lett. **100**, 076404(2008)
- [10] N. F. Mott, *Metal-Insulator Transitions* (Taylor and Francis, London 1974).
- [11] D. Vollhardt and P. Wolfle, Phys. Rev. Lett. **45**,482(1980). D. Vollhardt and P. Wolfle, Phys. Rev. B **22**,4666(1980). D. Vollhardt and P. Wolfle, Phys. Rev. Lett. **48**, 699(1982).

- [12] F. Evers, A.D. Mirlin, Rev. Mod. Phys. **80**, 1355(2008).
- [13] Sebaah and Sornette, Phys. Rev. B **48**, 12506(1993).
- [14] Shreiber, Physica A **167**, 188(1990).
- [15] H. Yamada and M.Goda, Phys. Lett. A **194**, 279(1994).
- [16] M.Goda Y.Azbel and H. Yamada, Int. J. Mod. Phys. B **21/22**, 2705-2725(1999).
- [17] D.R. Grempel, R.E. Prange and S. Fishman, Phys. Rev. A **29**, 1639(1984). R.E. Prange, D.R. Grempel, and S. Fishman, Phys. Rev. B **29**, 6500-6512(1984), E. Doron and S. Fishman, Phys. Rev. Lett. **60**, 867 (1988).
- [18] G.Casati, I.Guarneri and D.L.Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 345.
- [19] F. Borgonovi and D.L. Shepelyansky, Physica D, **109**, 24-31(1997).
- [20] K.S. Ikeda, Ann. Phys. **227**, 1(1993).
- [21] Rodriguez *et al*, Phys. Rev. Lett. **102**, 106406(2009); Lemarie *et al*, Phys. Rev. Lett. **105**, 090601(2010); Europhys. Lett. **87**, 37007(2009); M. Lopez, J. F. Clement, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, and D. Delande, Phys. Rev. Lett. **108**, 095701(2012).
- [22] C. Tian and A. Altland, New J. Phys. **12**, 043043(2010).
- [23] C. Tian, A. Altland, and M. Garst, Phys. Rev. Lett. **107**, 074101(2011). J. Wang, C. Tian, A. Altland, Phys. Rev. B **89**, 195105(2014)
- [24] H.Yamada and K.S. Ikeda, Phys. Rev. E **59**, 5214-5230(1999).
- [25] H. Yamada and K.S.Ikeda, Phys. Rev. E **65**, 046211(2002). H. Yamada, and K.S.Ikeda, Physica B **316 317**, 350-355(2002).
- [26] H.S. Yamada and K.S. Ikeda, Phys. Rev. E **82**, 060102(R)(2010); Eur. Phys. J. B **85**, 41(2012); Eur. Phys. J. B **85**, 195(2012).
- [27] H.S. Yamada and K.S. Ikeda, Eur. Phys. J. B **87**, 208(2014).
- [28] H.S. Yamada and K.S. Ikeda, Int. J. Comp. Math. Article ID 587430(2014).
- [29] H.S. Yamada, F. Matsui and K.S. Ikeda, Critical Phenomena of Dynamical Delocalization in Quantum Anderson Map, Phys. Rev. E **92**, 062908(2015).
- [30] H.S.Yamada, F. Matsui and K.S.Ikeda, Scaling Properties of Dynamical Localization in Monochromatically Perturbed Quantum Maps: standard map and Anderson map, Phys.Rev.E **97**, 012210(2018).

- [31] H.S.Yamada, and K.S. Ikeda, Critical phenomena of dynamical delocalization in quantum maps: Standard map and Anderson map, Phys.Rev.E **101**, 032210(2020).
- [32] H.S.Yamada, and K.S. Ikeda, Dynamical Localization and Delocalization in Polychromatically Perturbed Anderson Map, preprint; arXiv:2003.04681v2 [cond-mat.dist-nn] .
- [33] F. M. Izrailev, T. Kottos, A. Politi, G. P. Tsironis, Phys. Rev. E **55**, 4951(1997).
- [34] Sebaah and Sornette, Phys. Rev. B**48**, 12506(1993).
- [35] A. Politi, S. Ruffo, and L. Tessieri, Euro. Phys. J. B **14**, 673-679(2000).
- [36] N.F. Mott and M. Kaveh, Adv. Phys. **34**, 329(1985): M. Kaveh, J. Phys. C **17**, L79(1985).
- [37] N.Tit, N. Kumar, J. W. Halley, and H. Shore, Phys. Rev. B **47**, 15988(R) (1993).
- [38] M. Schreiber and H. Grussdach, Phys. Rev. Lett. **76**, 1687(1996).
- [39] T.Travenec and P. Markos, Phys. Rev. B**65**, 113109(2002).
- [40] M. F. Islam and H. Nakanishi, Phys. Rev. E **77**, 061109(2008).
- [41] G.Haldas et al, phys. stat. sol.(b) **230**, 249-257(2002).
- [42] I. Travenec, Int. J. Mod. Phys.B **22**, 5217-5228(2008).
- [43] B.Dillon and H.Nakanishi, Euro. Phys. J. B **87**, 286(2014).
- [44] M.V. Berry, J. Phys. A:Math.Gen. **15**, 3693-3704(1982).
- [45] A. M. Garcia-Garcia and J. Wang, Phys.Rev.Lett. **94** 244102(2005).
- [46] J. Liu, W. T. Cheng, C.G. Cheng, Comm. Theor. Phys. **33**, 15 (2000).
- [47] S. Xiong and S. N. Evangelou, Phys. Rev. B **64** (2001).
- [48] R. A. Romer and M. Schreiber, *Anderson Localization and Its Ramifications* **630** of the series Lecture Notes in Physics pp 3-19.
- [49] 福島孝治「スケーリング理論とは何か? -有限系から無限系を見る方法-」 「情報統計力学の深化と展開」平成 18 年度チュートリアル講演会
- [50] B.Kramer, Phys. Rev. B**47**, 9888(1993).
- [51] A.B. Harris, J. Phys. C:Solid State Phys. **7**, 1671(1974).
- [52] J.T.Chayes *et al.*, Phys.Rev.Lett.**57**, 2999(1986).

- [53] A.R.Mirlin and Y.V.Fyodorov, Phys. Rev. Lett. **72**, 526(1994).
- [54] K.B.Efetov and O. Viehweger, Phys. Rev. Lett.**45**, 526(1992).
- [55] I. M. Suslov, Usp. Fiz. Nauk **168**, 503(1998) [Physics ? Uspekhi **41**, 441 (1998)].
- [56] I. M. Suslov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **127**, 1350 (2005) [JETP **100**, 1188 (2005)].
- [57] I. M. Suslov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **141**, 122 (2012) [JETP **114**, 107 (2012)].
- [58] I. M. Suslov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **142**, 1020 (2012) [JETP **115**, 897 (2012)].
- [59] I. M. Suslov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **142**, 1230 (2012) [JETP **115**, 1079 (2012)].
- [60] R. del Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last, and B. Simon, Phys. Rev. Lett. **75**, 117(1995).
- [61] R. Ketzmerick, K. Kruse, S. Knaut, T. Geisel, Phys. Rev. Lett. **79** 1959(1997).
- [62] J. Zhong, R.B. Diener, D.A. Steck, W.H. Oskay, M.G. Raizen, E.W. Plummer, Z. Zhang, and Q. Niu, Phys. Rev. Lett. **86**, 2485(2001).
- [63] T. Brandes, B. Huckestein and L. Schweitzer, Ann. Phys. **5**, 633(1996).
- [64] B. Huckestein and R. Klesse, Phys. Rev. B **59**, 9714(1999).
- [65] S. Havlin and D. Ben-Avraham, Adv. in Phys. **36**, 695-798(1987).
- [66] J. P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. **195** 127-293(1990).
- [67] J. W. Haus and K. W. Kehr, Phys. Rep. **150** 263-406(1987).
- [68] K.G. Wang, b, c, L.K. Dongb, X.F. Wuc, F.W. Zhuc, T. Koc, Physica A **203**, 53-60(1994).
- [69] R. Metzler and J. Klafter, Phys. Rep. **339** 1-77(2000).
- [70] S. Havlin and D. Ben-Avraham, Adv.in Phys. **51**, 187-292(2002).
- [71] C.Ingo, *et al*, Entropy **16**, 5838(2014).
- [72] M.Schreiber and H.Grussbach Phys. Rev. Lett. **67**, 607(1991).
- [73] T.Ohtsuki and T. Kawarabayashi, J. Phys. Soc. Jpn. **66**,314(1997).
- [74] B.Huckestein and R.Klesse, Phys. Rev. B **59**, 9714(1999).
- [75] D. A. Parshin and H. R. Schober, Phys. Rev. Lett. **83**, 4590(1999).
- [76] I. Travenec and P. Markos, Phys. Rev. B **65** 113109(2002).
- [77] Yoichi Asada, Keith Slevin, and Tomi Ohtsuki, Phys. Rev. B **73**, 041102(R)(2006).

- [78] V. E. Kravtsov, A. Ossipov, O. M. Yevtushenko, and E. Cuevas, Phys. Rev. B **82**, 161102(R)(2010).
- [79] S. Mukhopadhyay, M. Salam and A. Chatterjee, Eur. Phys. J. B **267** 53505913(2007).
- [80] Cord A. Muller, Dominique Delande, and Boris Shapiro, Phys. Rev. A **94**, 033615(2016).
- [81] A.A. Gogolin, Zh. Eksp. Theor. Fiz. **71** 1912(1976), Sov. Phys. JETP **44** 1003(1976).
- [82] I. Guarneri, Spectral properties of quantum diffusion, (scholapedia).
- [83] D. E. Rodrigues, H. M. Pastawski and J.F.Weisz, Phys. Rev. B **34**, 8545(1986).
- [84] Molinari, J.Phys.A **25**, 513(1992).
- [85] A. Esmailpour, H. Cheraghchi, P. Carpena and M. R. R. Tabar, J. Stat. Mech. **P09014**(2007).
- [86] R. A. Pinto, M. Rodriguez, J. A. Gonzalez, and E. Medina, Phys. Lett. A **341**, 101-106(2005).
- [87] A. Croy, P. Cain, and M. Schreiber, Eur. Phys. J. B **82**, 20212 (2011).
- [88] G.M. Petersen and N. Sandler, arXiv:1206.3370v3 [cond-mat.dis-nn].
- [89] F. Wegner, Z. Phys. B **25**, 327(1976).
- [90] H. Aoki, J. Phys. C **16**, L205 (1983).
- [91] C. M. Soukoulis and E. N. Economou, Phys. Rev. Lett. **52**, 565 (1984).
- [92] I. Garca-Mata, J. Martin, O. Giraud, and B. Georgeot, Phys. Rev. E **86**, 056215(2012).
- [93] T. Nakayama and K. Yakubo, *Fractal concepts in condensed matter*, (Springer, Heidelberg 2003).
- [94] S.Hikami, Phys.Rev.B **24**, 2671(1981).
- [95] A. D. Mirlin, Phys. Rep. **326**, 259 (2000).