

# 不確定性原理の空間の曲率としての表現

新井 信雄 \*

2025 年 6 月 20 日

## 概要

一般共変的な不確定性関係について述べる。エルミート型の計量テンソルで示される複素多様体上に特別な関係にあるベクトルを導入し、このベクトルについてのコーシー-シュワルツの不等式が一般共変的な形式で空間の曲率と結び付けることを示す。この様な機構によって得られる不確定性関係は空間の曲率に関係するが、一般共変的な関係である。この関係を用いて量子理論の不確定性原理を再現するモデルと、このモデルから予想される現象について述べる。

## 1 はじめに

重力理論である一般相対性論は一般共変的な理論であるが、量子理論の特徴に 1 つである不確定性原理は一般共変的な記述にはなっていない。一般共変的な不確定性原理は重力の量子化についての重要な情報となる可能性がある。

多くの量子重力の候補理論から時空における長さの最小単位が予想されることから不確定性原理に直接的に最小の長さの補整を導入する試み、一般化不確定性原理 (GUP) [1,2] がある。これは主に非相対論的理論で検討されているが、ローレンツ共変的な GUP を提案するものもある [3,4]。これらは量子理論の不確定性原理の一般化を目指す試みであるが、一般共変的な不確定性関係には至っていない。

この論文では、これらとは別の手法を試みる。まず、コーシー-シュワルツの不等式の一般共変的な式を導出することから始める。 $n$  次元のエルミート型の複素多様体上で特別な関係にあるベクトルを導入し、このベクトルについてのコーシー-シュワルツの不等式が一般共変的な形式で曲率と結び付けることを示す。この様な関係にあるベクトルの揺らぎに関する不等式もまた同様に曲率と結び付けられることを示す。これによって得られる不確定性関係は空間位置や運動量に関するものではなく、始めに導入した特別な関係にあるベクトルについての関係であるが、一般共変的な関係である。

この関係を用いた量子理論の不確定性原理を再現するモデルについて述べる。また、このモデルから予想される現象についても述べる。

## 2 特別なベクトルについてのコーシー-シュワルツ不等式

最初に、計量テンソルがエルミート型のテンソル ( $g_{a\bar{b}} = g_{\bar{b}a}$ ,  $g_{a\bar{b}}$  は  $g_{a\bar{b}}$  の複素共役量) によって表される  $n$  次元空間について考える。計量テンソル  $g_{a\bar{b}}$  は、指標  $a, b$  について対称なテンソル  $g_{\{ab\}}$  と、反対称テンソル  $g_{[ab]}$  によって以下の様に見える。

$$g_{a\bar{b}} = g_{\{ab\}} + i g_{[ab]}$$

また、 $g_{a\bar{b}}$  は実変数  $(x^0, \dots, x^n)$  の関数とする。

ここで、計量テンソル  $g_{a\bar{b}}$  の絶対微分が 0 になるとする。共変微分を記号  $\nabla$  で表す。

$$\nabla_c g_{a\bar{b}} = \partial_c g_{a\bar{b}} - g_{e\bar{b}} \Gamma^e_{ac} - g_{a\bar{e}} \Gamma^e_{cb} = 0$$

---

\*株式会社テクノエージェント システム開発部  
e-mail:yonyon.a@jcom.zaq.ne.jp

クリストッフェル記号  $\Gamma^d_{ab}$  は実数で指標  $a, b$  について対称な条件を設定する。

$$\Gamma^d_{ab} = \Gamma^d_{ba}$$

これによって、 $\Gamma$  と  $g_{a\bar{b}}$  との関係は以下の様なものになる。

$$\begin{aligned} \partial_c g_{a\bar{b}} + \partial_a g_{b\bar{c}} - \partial_b g_{a\bar{c}} &= 2g_{\{eb\}} \Gamma^e_{ac} \\ g_{[sb]} \Gamma^e_{ac} + g_{[as]} \Gamma^e_{bc} &= \partial_c g_{[ab]} \\ \partial_c g_{[ab]} + \partial_a g_{[bc]} + \partial_b g_{[ca]} &= 0 \end{aligned}$$

この様に定義された空間上で波動関数の役割をするベクトル場  $\Psi(x^0, \dots, x^n)$  を実変数  $(x^0, \dots, x^n)$  の関数として定義する。この波動関数ベクトル場の大きさの2乗を示すスカラー  $S_\Psi^2$  は

$$S_\Psi^2 = g^{a\bar{b}} \Psi_a \Psi_{\bar{b}} = g^{\bar{a}b} \Psi_{\bar{a}} \Psi_b \quad (2.1)$$

と定義する。 $S_\Psi^2$  を空間の全領域に亘って積分したものは1になるように規格化されているものとする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} S_\Psi^2 \sqrt{g} \, d^n x = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_a \Psi^a \sqrt{g} \, d^n x = 1 \quad (2.2)$$

ここで、行列式  $g = |g_{a\bar{b}}| \neq 0$  は実数である。

任意のスカラー場  $S(x^0, \dots, x^n)$  に対する平均値  $\langle S \rangle$  を以下の積分計算で定義する。

$$\langle S \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \Psi_a \Psi^a \sqrt{g} \, d^n x \quad (2.3)$$

波動関数共変ベクトル  $\Psi_b, \Psi_{\bar{b}}$  に対して共変微分によって関係付けられるベクトル  $U_a, U_{\bar{a}}$  を以下の様に定義する。 $(U_{\bar{a}}$  は  $U_a$  の複素共役)

$$U_a \Psi_b = \nabla_a \Psi_b \quad (2.4a)$$

$$U_{\bar{a}} \Psi_{\bar{b}} = \nabla_a \Psi_{\bar{b}} \quad (2.4b)$$

また

$$U_a \Psi_b = \Psi_a U_b, \quad U_{\bar{a}} \Psi_{\bar{b}} = \Psi_{\bar{a}} U_{\bar{b}} \quad (2.5)$$

が成立つとする。

波動関数反変ベクトル  $\Psi^{\bar{d}}, \Psi^d$  に対して共変微分を計算すると

$$\begin{aligned} \nabla_a \Psi^{\bar{d}} &= \nabla_a (g^{\bar{d}e} \Psi_e) = g^{\bar{d}e} \nabla_a \Psi_e = g^{\bar{d}e} U_a \Psi_e = U_a \Psi^{\bar{d}} \\ &= g^{\bar{d}e} \Psi_e U_a = \Psi^{\bar{d}} U_a \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$\begin{aligned} \nabla_a \Psi^d &= \nabla_a (g^{d\bar{e}} \Psi_{\bar{e}}) = g^{d\bar{e}} \nabla_a \Psi_{\bar{e}} = g^{d\bar{e}} U_{\bar{a}} \Psi_{\bar{e}} = U_{\bar{a}} \Psi^d \\ &= g^{d\bar{e}} \Psi_{\bar{e}} U_{\bar{a}} = \Psi^d U_{\bar{a}} \end{aligned} \quad (2.6b)$$

を得る。

ベクトル  $U$  の大きさの2乗スカラー  $S_{U_R}^2$  は

$$S_{U_R}^2 = \frac{1}{2} (S_U^2 + S_{\bar{U}}^2) \quad (2.7a)$$

$$S_U^2 = g^{a\bar{b}} U_a U_{\bar{b}} \quad (2.7b)$$

$$S_{\bar{U}}^2 = g^{\bar{a}b} U_{\bar{a}} U_b \quad (2.7c)$$

$S_U^2$  の平均値  $\langle S_U^2 \rangle$  はスカラーの平均値計算の定義 (2.3) とベクトル U の定義 (2.4) と (2.5) を用いると

$$\begin{aligned}
\langle S_U^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} S_U \Psi_e \Psi_e^e \sqrt{g} \, d^n x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g^{a\bar{b}} U_a U_{\bar{b}} \Psi_e \Psi_e^e \sqrt{g} \, d^n x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g^{a\bar{b}} U_a \Psi_e U_{\bar{b}} \Psi_e^e \sqrt{g} \, d^n x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{a\bar{b}} \nabla_a \Psi_e \nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e \, d^n x \quad (2.8)
\end{aligned}$$

上式の第 4 式において反変計量テンソル密度  $\mathbf{g}^{a\bar{b}} = g^{a\bar{b}} \sqrt{g}$  を用いた。

(2.8) 式の共変微分  $\nabla_a \Psi_e$  を展開し積分を 2 項に分けると

$$\begin{aligned}
\langle S_U^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{a\bar{b}} (\partial_a \Psi_e - \Gamma_{ea}^d \Psi_d) \nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e \, d^n x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{a\bar{b}} \partial_a \Psi_e \nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e - \mathbf{g}^{a\bar{b}} \Gamma_{ea}^d \Psi_d \nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e \, d^n x \quad (2.9)
\end{aligned}$$

上式の第 2 式の第 1 項について部分積分を行う。

ここで、波動関数ベクトル  $\Psi_e$  は無限遠では 0 ( $\Psi_e(\pm\infty) \rightarrow 0$ ) になることを仮定する。

$$\begin{aligned}
(2.9) \text{ の第 1 式: } &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{a\bar{b}} \partial_a \Psi_e \nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e \, d^n x \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \partial_a \mathbf{g}^{a\bar{b}} \Psi_e \nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e + \mathbf{g}^{a\bar{b}} \Psi_e \partial_a (\nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e) \, d^n x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{a\bar{d}} \Gamma_{ad}^b \Psi_e \nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e - \mathbf{g}^{a\bar{b}} \Psi_e \partial_a (\nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e) \, d^n x \quad (2.10)
\end{aligned}$$

2 行目の式は反変計量テンソル密度の微分  $\partial_a \mathbf{g}^{a\bar{b}} = -\mathbf{g}^{a\bar{d}} \Gamma_{ad}^b$  を代入した。

(2.9) 式に (2.10) 式を代入して式を整理すると

$$\begin{aligned}
\langle S_U^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{a\bar{d}} \Gamma_{ad}^b \Psi_e \nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e - \mathbf{g}^{a\bar{b}} \Psi_e \partial_a (\nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e) - \mathbf{g}^{a\bar{b}} \Gamma_{ea}^d \Psi_d \nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e \, d^n x \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{a\bar{b}} \Psi_e \nabla_a \nabla_{\bar{b}} \Psi_e^e \, d^n x \quad (2.11)
\end{aligned}$$

上式の 2 階共変微分を共変微分演算子の交換関係  $[\nabla_a, \nabla_b] = \nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$  と反交換関係  $\{\nabla_a, \nabla_b\} = \nabla_a \nabla_b + \nabla_b \nabla_a$  を用いて書く、さらに、交換関係  $[\nabla_a, \nabla_b]$  は曲率テンソル  $R^e_{\,dab}$  を用いて  $[\nabla_a, \nabla_b] \Psi_e = R^e_{\,dab} \Psi^d$  より

$$\begin{aligned}
\langle S_U^2 \rangle &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\{a\bar{b}\}} \Psi_e \{\nabla_a, \nabla_b\} \Psi_e^e + \frac{i}{2} \mathbf{g}^{[a\bar{b}]} \Psi_e [\nabla_a, \nabla_b] \Psi_e^e \, d^n x \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\{a\bar{b}\}} \Psi_e \{\nabla_a, \nabla_b\} \Psi_e^e + \frac{i}{2} \mathbf{g}^{[a\bar{b}]} \Psi_e R^e_{\,dab} \Psi^d \, d^n x \quad (2.12)
\end{aligned}$$

と書ける。

次にベクトル U を 2 つの実ベクトル A と B の和で書き表せる場合を考える。

$$U_a = A_a + iB_a \quad (2.13)$$

ベクトル U の大きさの 2 乗スカラー  $S_U^2$  は

$$\begin{aligned}
S_U^2 &= S_A^2 + S_B^2 - i\{(B, A) - (A, B)\} \\
S_A^2 &= g^{\{ab\}} A_a A_b \\
S_B^2 &= g^{\{ab\}} B_a B_b \\
(B, A) &= g^{\{ab\}} B_a A_b + ig^{[ab]} B_a A_b \\
(A, B) &= g^{\{ab\}} A_a B_b + ig^{[ab]} A_a B_b \\
(B, A) - (A, B) &= i2g^{[ab]} B_a A_b
\end{aligned} \quad (2.14)$$

と書ける。これらから  $S_U^2$  は指標  $a, b$  についての対称要素の和と反対称要素の和で構成され、反対称要素の和は内積  $(A, B)$  と  $(B, A)$  の差分になっている。内積  $(A, B)$  と  $(B, A)$  は共役な関係になっているので、この反対称要素の和は内積  $(A, B)$  または  $(B, A)$  の虚数部分となる。このベクトル  $A, B$  の大きさや内積についてのコーシー-シュヴァルツ不等式を書くと、曲率に関する式で以下の様に書くことが出来る。

$$\begin{aligned} ||\langle S_A^2 \rangle|| ||\langle S_B^2 \rangle|| &\geq | \langle (B, A) \rangle | \\ &\geq | \langle ig^{[ab]} B_a A_b \rangle | \\ &= \left| -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{[ab]} \Psi_e R^e{}_{dab} \Psi^d \, d^n x \right| \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで、ベクトル  $A, B$  は (2.4)(2.5) や (2.13) 式を満たすものであれば任意でよい。  
ベクトル  $A, B$  の揺らぎ  $\sigma(A)$ 、 $\sigma(B)$  は

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sqrt{\langle S_A^2 \rangle - \langle S_A \rangle^2} \\ \sigma(B) &= \sqrt{\langle S_B^2 \rangle - \langle S_B \rangle^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

と書ける。今、簡単の為に適当な座標変換によって  $\langle S_A \rangle = 0$ 、 $\langle S_B \rangle = 0$  とすると (2.15) の左辺はベクトル  $A, B$  の揺らぎ  $\sigma(A)$ 、 $\sigma(B)$  に関する関係に書き表せる。

$$\sigma(A) \sigma(B) \geq \left| -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{[ab]} \Psi_e R^e{}_{dab} \Psi^d \, d^n x \right| \quad (2.17)$$

今考えている空間では曲率テンソルは計量テンソルの微分によって決定することができる。ここに示されたベクトルについての不確定性関係はベクトル自体の性質によるものではなく、計量テンソルやその微分などの”空間の幾何学的性質”として帰着させることが出来る。

### 3 量子論的な不確定性関係への適用

(2.17) で示された不確定性関係は  $n$  次元空間の (2.4)(2.5) や (2.13) を満たすベクトル間で成り立つ、これの量子論的な不確定性関係への適用について考える。

#### 3.1 8次元空間

この不確定性関係から量子論的な不確定性関係の再現する試みとして、4次元の時空間にエネルギー・運動量の4次元を座標として取り入れた8次元の空間を考える。各座標  $x^a (a = 0, \dots, 7)$  は以下の様に定義する。

$$(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7) = (ct, x, y, z, E/c, P_x, P_y, P_z)$$

この8次元空間上の実ベクトルで時空間平面に埋め込まれている(エネルギー・運動量成分が0)ベクトルを時空間ベクトル、エネルギー・運動量平面内に埋め込まれている(時空間成分が0)ベクトルをエネルギー・運動量ベクトルとそれぞれ定義する。

$$\begin{aligned} \text{時空間ベクトル} : (V_{TS}^a) &= (V_{TS}^0, V_{TS}^1, V_{TS}^2, V_{TS}^3, 0, 0, 0, 0) \\ \text{エネルギー・運動量ベクトル} : (V_{EP}^a) &= (0, 0, 0, 0, V_{EP}^4, V_{EP}^5, V_{EP}^6, V_{EP}^7) \end{aligned}$$

今、8次元空間上のある粒子の位置を点  $P$  として、ある基準位置  $O$  からのこの粒子への8次元座標(時空間位置、エネルギー・運動量)を2点  $O, P$  を結ぶパラメーター曲線  $\gamma(s)$  を用いて測る。ここで、 $s$  は座標変換に対して不変な実数パラメーターとする。曲線  $\gamma(s)$  の時空間の実平面への投影曲線を  $\gamma_{TS}(s)$ 、エネルギー・運動量の実平面内への投影曲線を  $\gamma_{EP}(s)$  とおく。この様におくと曲線  $\gamma_{TS}(s)$  の接線ベクトル  $\lambda_{TS}$  は時空間ベクトルであり、曲線  $\gamma_{EP}(s)$  の接線ベクトル  $\lambda_{EP}$  はエネルギー・運動量ベクトルである。曲線

$\gamma_{TS}(s)$  の接線ベクトル  $\lambda_{TS}$  の各座標軸  $x^a (a = 0 \cdots 7)$  への投影ベクトルを  $\lambda_{TS(a)}$ 、曲線  $\gamma_{EP}(s)$  の接線ベクトル  $\lambda_{EP}$  の各座標軸  $x^a (a = 0 \cdots 7)$  への投影ベクトルを  $\lambda_{EP(a)}$  とそれぞれ書くと、これらの投影ベクトルから時空間曲線の接線ベクトルの投影ベクトル  $\lambda_{TS(a)}$  とエネルギー・運動量曲線の接線ベクトルの投影ベクトル  $\lambda_{EP(a)}$  の組合せの和で 4 つの複素ベクトル  $u_{(k)(k=0 \cdots 3)}$  を作る

$$u_{(k)} = \lambda_{TS(k)} + i \lambda_{EP(k+4)} \quad (3.1.1)$$

$u_{(k)(k=0 \cdots 3)}$  の各要素は以下の通り

$$\begin{cases} (u_{(0)})^a = (\lambda_{TS(0)}, 0, 0, 0, i \lambda_{EP(4)}, 0, 0, 0) \\ (u_{(1)})^a = (0, \lambda_{TS(1)}, 0, 0, 0, i \lambda_{EP(5)}, 0, 0) \\ (u_{(2)})^a = (0, 0, \lambda_{TS(2)}, 0, 0, 0, i \lambda_{EP(6)}, 0) \\ (u_{(3)})^a = (0, 0, 0, \lambda_{TS(3)}, 0, 0, 0, i \lambda_{EP(7)}) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

これらの複素ベクトルに対応する 4 つの波動関数ベクトル  $\psi_{(k)(k=0 \cdots 3)}$  が以下の関係にあるとする。

$$u_{(k)}^a \psi_{\bar{e}(k)} = g^{a\bar{b}} \nabla_b \psi_{\bar{e}(k)} \quad (3.1.3)$$

(3.1.3) を  $k=1$  について書き出すと

$$g^{a\bar{b}} \nabla_b \psi_{\bar{e}(1)} = u_{(1)}^a \psi_{\bar{e}(1)} = (\lambda_{TS(1)}^a + i \lambda_{EP(5)}^a) \psi_{\bar{e}(1)}$$

これは粒子の 8 次元座標を曲線  $\gamma(s)$  を用いて測った接線ベクトルの空間 x 軸への投影ベクトルと運動量  $P_x$  軸への投影ベクトルの関係になる。これらのベクトルの揺らぎに関する不確定性関係は (2.17) を用いて

$$\sigma(\lambda_{TS(1)}) \sigma(\lambda_{EP(5)}) \geq \left| -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^{[ab]} \psi_{e(1)} R^e_{\phantom{e}dab} \psi_{(1)}^d \, d^8 x \right| \quad (3.1.4)$$

と書くことができる。

### 3.2 計量テンソルの周期関数モデル

(3.1.4) 式は右辺に曲率テンソルがある為に平坦な空間では量子論的な不確定性関係を再現することが出来ない。しかし、慣性系と認識できる空間は平坦な空間でなくても可能である。

計量テンソルが周期関数であって、粒子の位置が計量テンソルの値が一定値の位置で且つ、見かけ上力が消える接続係数が  $\Gamma=0$  の位置のみ許される場合である。この様な空間上にある粒子は慣性系にあると認識することが出来て、同時に量子論的な不確定性関係の曲率解釈を適用することが可能になる。

計量テンソルを与える方程式を得る良く知られた方法は、スカラー密度  $\mathbf{R} = \mathbf{g}^{a\bar{b}} R_{ab}$  をハミルトン関数として採用して、 $\mathbf{R}$  の 8 次元体積積分を  $g_{a\bar{b}}$  について独立に変分するものがある。これによって、以下の方程式が導かれる。

$$R_{ab} = 0 \quad (3.2.1)$$

これは、指標 a,b について対称なリッチテンソルの式になる。

周期関数の計量テンソルの具体的な関数やこれに基づいた不確定性関係の曲率表現について定量的に議論するにはこの方程式から周期関数となる計量テンソルを求める必要がある。しかし、計量テンソルの具体的な関数が解らなくても計量テンソルの周期関数モデルの定性的な考察を行うことはできるので、次章においてそれを行う。

## 4 時空間の伸長と光の赤方偏移

計量テンソルの周期関数モデルでは、計量テンソルの周期が8次元空間の距離(時空間の座標差とエネルギー・運動量の差)の最小単位になる。エネルギーと振動数、運動量と波長に関するド・ブロイの関係式を考慮すると、これらには最小単位と同時に最大単位も存在する。

2つの異なる空間位置における空間距離の最小単位と最大単位について見てみる。位置Oの観測者が見る空間距離の最小単位を  $r_{min(O)}$ 、位置Aの観測者が見る最小単位を  $r_{min(A)}$ 、運動量についても同様に位置Oの観測者が見る最小運動量を  $P_{min(O)}$ 、位置Aの観測者が見る最小運動量を  $P_{min(A)}$  とそれぞれおく。これらの最小単位はそれぞれの観測位置によって変わらないと考えられる。それぞれの位置における最小の運動量に対応した波長の最大単位  $\lambda_{max(O)}$ 、 $\lambda_{max(A)}$  も同様である。波長と空間的な距離を同一視すると、それぞれの位置から見た空間距離の最大単位  $r_{max(O)}$ 、 $r_{max(A)}$  も同値と考えられる。

一方で位置Aは位置Oの観測者からは距離  $r_{OA(O)}$  離れて見えるとすると、位置Aからの距離の最大単位は位置Oの観測者が見た場合にOA方向では距離  $r_{OA(O)}$  分小さく、AO方向では距離  $r_{OA(O)}$  分大きくなる。

### 4.1 時空間の伸長

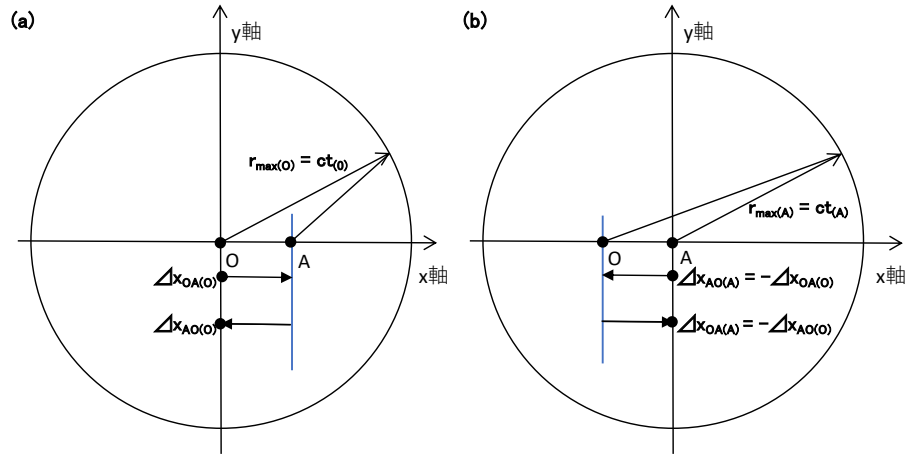


図 1: 2つの離れた位置 O、A のそれぞれの観測者が見たの最大値球面の xy 平面上への投影 (a) 位置 O の観測者から見た最大値球面 (半径  $r_{max(O)}$ )、位置 A は位置 O から距離  $\Delta x_{OA(O)}$  離れている為に位置 A からの最大単位を位置 O の観測者が見た場合に OA 方向では距離  $\Delta x_{OA(O)}$  分小さく、AO 方向ではこの距離分大きく見える。(b) 位置 A の観測者から見た最大値球面 (半径  $r_{max(A)}$ )、この観測者からの見え方は位置 O の観測者と変わらない。位置 A の観測者自身もこの球の中心に居る様に見える。

簡単のために、位置 O と位置 A を結ぶ直線を x 軸に取る (図 1)。位置 O から見た3次元最大値球面上の座標を  $x_O, y_O, z_O$  とおく、位置 O からこの球面に光が到達する最大時間を  $t_O$  とおくと最大値球面の式は以下になる (c は光速)。

$$x_O^2 + y_O^2 + z_O^2 = (ct_O)^2 \quad (4.1.1)$$

位置 A の観測者にとっても自身がこの球の原点に居る様に見えるので位置 A から見た3次元最大値球面上の座標  $x_A, y_A, z_A$  と位置 A から最大値球面への光の到達時間  $t_A$  から位置 A の観測者が見る最大値球面の式は以下になる。

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = (ct_A)^2 \quad (4.1.2)$$

位置 A の観測者から見える最大値球面上の座標  $(x_A, y_A, z_A, t_A)$  を位置 O から見た座標  $(x_{A(O)}, y_{A(O)}, z_{A(O)}, t_{A(O)})$  への変換を求める。位置 O の観測者から見た O → A 間の距離を  $\Delta x_{OA(O)}$  とおく、位置 O の観測者から見た位置 A の x 軸上の位置は O → A 方向ではこの距離分最大値球面上に近く  $x_O - \Delta x_{OA(O)}$ 、A → O 方向では遠く  $x_O + \Delta x_{OA(O)}$  に見えるので係数を  $\alpha$  を用いて (4.1.3a) の様におく。 $y_{A(O)}, z_{A(O)}$  については  $\Delta x_{OA(O)}$  には関係しないので (4.1.3b)(4.1.3c) とおく。位置 A から最大値球面への光の到達時間  $t_A$  は  $\Delta x_{OA(O)}$  に関係して変化すると考えられるので、係数を  $\beta, \gamma$  を用いて (4.1.3d) の様におく。

$$x_{A(O)} = \alpha (x_O \mp \Delta x_{OA(O)}) \quad (4.1.3a)$$

$$y_{A(O)} = y_O \quad (4.1.3b)$$

$$z_{A(O)} = z_O \quad (4.1.3c)$$

$$t_{A(O)} = \beta x_O + \gamma t_O \quad (4.1.3d)$$

ここで、位置 O における速度  $v_O (< c)$  を導入して位置 OA 間の距離  $\Delta x_{OA(O)} = v_O t_O$  とおく、(4.1.3a~d) 式を (4.1.2) に代入すると  $x_{A(O)}, t_{A(O)}$  の見え方として矛盾の無い  $\alpha, \beta, \gamma$  の各係数は以下になる。

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_O^2/c^2}} \quad (4.1.4a)$$

$$\beta = \mp \frac{v_O}{c^2 \sqrt{1 - v_O^2/c^2}} \quad (4.1.4b)$$

符号  $\mp$  は O → A 方向は負、A → O 方向は正

これによって、位置 A からの最大値球面を位置 O の視点に変換した座標  $(x_{A(O)}, t_{A(O)})$  については

$$x_{A(O)} = \frac{x_O \mp \Delta x_{OA(O)}}{\sqrt{1 - (\Delta x_{OA(O)}/r_{max(O)})^2}} \quad (4.1.5a)$$

$$t_{A(O)} = \frac{t_O \mp (\Delta x_{OA(O)}/cr_{max(O)})x_O}{\sqrt{1 - (\Delta x_{OA(O)}/r_{max(O)})^2}} \quad (4.1.5b)$$

が得られる (符号  $\mp$  は O → A 方向は負、A → O 方向は正)。

位置 A の観測者から距離  $\Delta x_{AO(A)}$  は  $\Delta x_{OA(O)}$  とは方向は違うが値は同一である。位置 A における速度  $v_A (< c)$  (O → A 方向を正) を導入すると  $-\Delta x_{AO(A)} = v_A t_A = v_O t_O = \Delta x_{OA(O)}$  となる。位置 A からの最大値球面に光が到達する時間を位置 O の視点から見た  $t_{A(O)}$  と位置 O のにおける速度  $v_O$  より、 $-\Delta x_{AO(O)} = v_O t_{A(O)}$  と得られる。 $t_{A(O)}$  に (4.1.5b) を用いて x 軸上のみを扱うので  $r_{max(O)} = x_O$  として計算すると

$$\begin{aligned} -\Delta x_{AO(O)} &= \frac{\Delta x_{OA(O)} + (v_O t_O \Delta x_{OA(O)}/ct_O)x_O}{\sqrt{1 - (\Delta x_{OA(O)}/x_O)^2}} \\ &= \frac{1 + \Delta x_{OA(O)}/x_O}{\sqrt{1 - (\Delta x_{OA(O)}/x_O)^2}} \Delta x_{OA(O)} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \Delta x_{OA(O)}/x_O}{1 - \Delta x_{OA(O)}/x_O}} \Delta x_{OA(O)} \geq -\Delta x_{AO(A)} \quad (4.1.6) \end{aligned}$$

位置 A → O 間の距離を観測基準を変えて位置 O の観測者が見た場合には  $-\Delta x_{AO(O)} \geq -\Delta x_{AO(A)} (= \Delta x_{OA(O)})$  (O → A 方向を正) の様に長く見える。距離  $\Delta x_{AO(A)}$  を光が進む時間  $\Delta t_{AO(A)}$  を位置 O の視点から見た時間は  $\Delta t_{AO(O)} = -\Delta x_{AO(O)}/c$  より

$$\Delta t_{AO(O)} = \sqrt{\frac{1 + \Delta t_{OA(O)}/t_O}{1 - \Delta t_{OA(O)}/t_O}} \Delta t_{OA(O)} \geq \Delta t_{AO(A)} \quad (4.1.7)$$

$\Delta t_{AO(O)}$  についても観測基準を変えて位置 O の観測者が見た場合には  $\Delta t_{AO(O)} \geq \Delta t_{AO(A)} (= \Delta t_{OA(O)})$  と長くなる。各位置の観測者が見る空間距離の最大単位が変化しないことからこの様な変化は見かけ上のもので、空間距離や時間は観測基準や観測方向を変えて見た場合に伸長する。

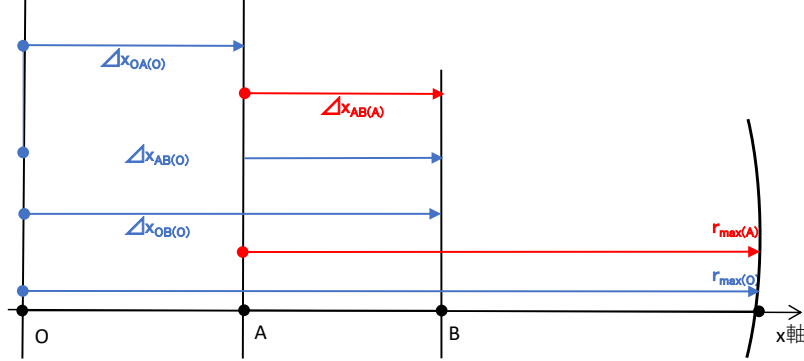


図 2: 距離において観測した空間的な長さ  
一直線上に並んだ 3 点 (O,A,B) とこの直線を x 軸に取る。点 O の観測者から見た最大値球面の x 軸上の座標  $x_O$ 、位置 O から距離  $\Delta x_{OA(O)}$  離れた位置を A とし、位置 A の観測者から見た最大値球面の x 軸上の座標  $x_A$ 、位置 B は位置 A から距離  $\Delta x_{AB(A)}$  離れた位置とする。

## 4.2 距離の合成

前節と同様に一直線上に並んだ 3 点 (O,A,B) の直線を x 軸に取り、また、 $O \rightarrow A$  方向のみを考える。位置 O の観測者から見た最大値球の半径を  $r_{max(O)}$  とし、位置 A は位置 O を基準に観測して +x 軸方向に距離  $\Delta x_{OA(O)}$  離れた位置、位置 A の観測者から見た最大値球の半径を  $r_{max(A)}$  とする。位置 B は位置 A を基準に観測して位置 A からさらに +x 軸方向に距離  $\Delta x_{AB(A)}$  離れた位置とする (図 2)。

位置 A から見た最大値球面の x 座標  $x_A$  と最大値球面に光が到達する時間  $t_A$  を位置 O の観測者からの視点への変換は (4.1.5a)(4.1.5b) 式を用いて計算する。ここで、速度  $v_O (< c)$  を導入して位置 OA 間の距離を  $\Delta x_{OA(O)} = v_O t_O$  を用いると

$$x_A = \frac{x_O - \Delta x_{OA(O)}}{\sqrt{1 - (\Delta x_{OA(O)}/r_{max(O)})^2}} = \frac{x_O - v_O t_O}{\sqrt{1 - (v_O/c)^2}} \quad (4.2.1a)$$

$$t_A = \frac{t_O - (\Delta x_{OA(O)}/cr_{max(O)})x_O}{\sqrt{1 - (\Delta x_{OA(O)}/r_{max(O)})^2}} = \frac{t_O - (v_O/c^2)x_O}{\sqrt{1 - (v_O/c)^2}} \quad (4.2.1b)$$

同様に、位置 B から見た最大値球面の x 座標  $x_B$  と最大値球面に光が到達する時間  $t_B$  を位置 A の観測者からの視点への変換を計算する。ここでは、速度  $v_A (< c)$  を導入して位置 AB 間の距離を  $\Delta x_{AB(A)} = v_A t_A$  を用いると

$$x_B = \frac{x_A - \Delta x_{AB(A)}}{\sqrt{1 - (\Delta x_{AB(A)}/r_{max(A)})^2}} = \frac{x_A - v_A t_A}{\sqrt{1 - (v_A/c)^2}} \quad (4.2.2a)$$

$$t_B = \frac{t_A - (\Delta x_{AB(A)}/cr_{max(A)})x_A}{\sqrt{1 - (\Delta x_{AB(A)}/r_{max(A)})^2}} = \frac{t_A - (v_A/c^2)x_A}{\sqrt{1 - (v_A/c)^2}} \quad (4.2.2b)$$

上式 (4.2.2a) の  $x_A$ 、 $t_A$  に (4.2.1a)(4.2.1b) を代入して位置 O の観測者の視点へ変換する。

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v_A/c)^2}} \left\{ \frac{x_O - v_O t_O}{\sqrt{1 - (v_O/c)^2}} - v_A \frac{t_O - (v_O/c^2)x_O}{\sqrt{1 - (v_O/c)^2}} \right\} \\ &= \frac{1 + (v_O v_A/c^2)}{\sqrt{1 - (v_O/c)^2} \sqrt{1 - (v_A/c)^2}} \left\{ x_O - \frac{v_O + v_A}{1 + (v_O v_A/c^2)} t_O \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (U_O/c)^2}} \{x_O - U_O t_O\} \quad (4.2.3a) \end{aligned}$$



ここで

$$U_O = \frac{v_O + v_A}{1 + (v_O v_A / c^2)} \quad (4.2.3b)$$

また、OB 間の距離を位置 O の観測者が見た距離  $\Delta x_{OB(O)}$  は

$$\Delta x_{OB(O)} = U_O t_O = \frac{\Delta x_{OA(O)} + \Delta x_{AB(O)}}{1 + \frac{\Delta x_{OA(O)} \Delta x_{AB(O)}}{r_{max}^2}} \quad (4.2.4)$$

より得られる。ここで、 $\Delta x_{AB(O)} = v_A t_O$  は位置 O の観測者から見た AB 間の距離。

上式は距離の合成に関する式で、最大単位以下の距離を合成しても最大距離には到達することは出来ないことを示している。

### 4.3 光の赤方偏移

4.1 節において空間的長さは観測の基準位置や観測方向が異なる場合は、それらに応じて伸長することを示した。ここでは、その効果として、この空間的長さが光の波長である場合に、遠方にて発信した光の波長は本来の波長より長く観測され赤方偏移を示すことについて述べる。

発せられた光の波長を  $\lambda$ 、観測した波長を  $\lambda'$ 、観測位置から光源までの距離を  $r$ 、最大値球面半径を  $r_{max}$  とそれぞれおいたときに観測される光と発せられた光の波長比  $Y(r) = \lambda' / \lambda$  は

$$Y(r) = \frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 + r/r_{max}}{1 - r/r_{max}}} \quad (4.3.1)$$

で与えられる。

偏移がドップラー効果である場合の波長比  $Y_D = \lambda'_D / \lambda_D$  (光源の波長:  $\lambda_D$ 、観測された波長:  $\lambda'_D$ ) とドップラー速度  $V_D$  との関係は以下で与えられる。

$$V_D = \frac{c(Y_D^2 - 1)}{Y_D^2 + 1}$$

(4.3.1) の距離に応じた赤方偏移による波長比  $Y(r)$  を仮にドップラー速度  $V_{CD}$  に換算して計算すると

$$V_{CD} = \frac{cr}{r_{max}} \quad (4.3.2)$$

の関係を得る。

この式で得られた関係は実際の光源の運動とは無関係で距離に応じた赤方偏移をドップラー速度に換算したものである。 $c/r_{max}$  は定数なので、ドップラー換算速度  $V_{CD}$  が単純に距離  $r$  に比例する関係 (ハッブル-ルメートルの法則 ( $V_{CD} = Hr$ )) が得られる。

ハッブル定数  $H$  と最大値球面半径  $r_{max}$  は以下の関係になる。

$$H = \frac{c}{r_{max}} \quad (4.3.3)$$

遠方天体からの光が赤方偏移することは良く知られているが、それが天体の後退か空間伸長によるものかは運動状態が知られている天体の赤方偏移を調べることで切り分けが可能である。また、空間距離に対して偏移量が小さいことから規模の大きな天体であることも望ましい。例としては渦巻銀河の腕の視線方向の距離に応じた赤方偏移について、銀河直径 50Kpc で銀河面の傾き角  $\phi = 30^\circ$ 、ハッブル定数  $H = 70 \text{ km/s/Mpc}$  を用いて計算すると

$$V_{CD}(r=50\text{Kpc}, \phi=30^\circ) = 3.0 \text{ km/s}$$

を得る。これは、渦巻銀河の回転速度 (100~200 km/s) の 1.5~3 % 程度の量になる。

この他に空間伸長による赤方偏移の切り分けが出来そうな天体は、相互作用銀河の腕や主銀河に対して視線方向に分布する伴銀河などが考えられる。

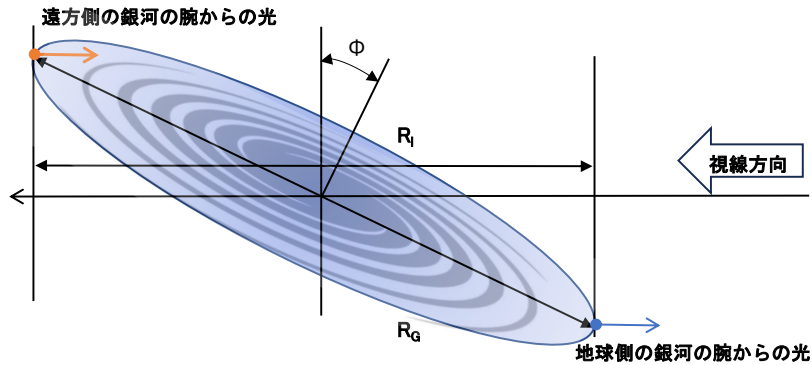


図 3: 渦巻銀河の腕の視線方向の距離に応じた赤方偏移  
直径  $R_G$  の渦巻銀河で銀河面の傾き角  $\phi$  のとき銀河の腕の地球側と地球から遠方側では  $R_l = R_G \cos \phi$  の距離があり、この距離に応じた光の偏移が考えられる。銀河中心からの光に比べて、地球側の腕からの光は青方偏移に遠方側の腕からの光は赤方偏移を示す。

#### 4.4 時間の遅れ

天体の以外の検証では (4.1.7) 式に対応した時間の遅れの検出が上げられる。

2つの精密な時計を一方は観測者の手元に置いたもの、もう一方をこれとは離れた場所に置いたものとで経過時間を比べる。離れた場所の時計では経過時間は遅れて見えることが予想されるが距離に対する変化量は非常に小さい。そこで1つの時計の経過時間を直接測定した場合と時刻信号を光や電波で一旦遠くに飛ばして他の物体に反射させたものを受信して信号の往復時間分遅らせたものを比べる方法が考えられる。

例として信号を月までの距離 38 万 km 往復させて受信した場合の信号の往復時間は 2.6 秒になるので、このとき経過時間 1 秒に対する時間差は以下を得る。

$$\Delta t_{(r=76 \text{ 万 km})} \sim 5.8 \times 10^{-18} \text{ s}$$

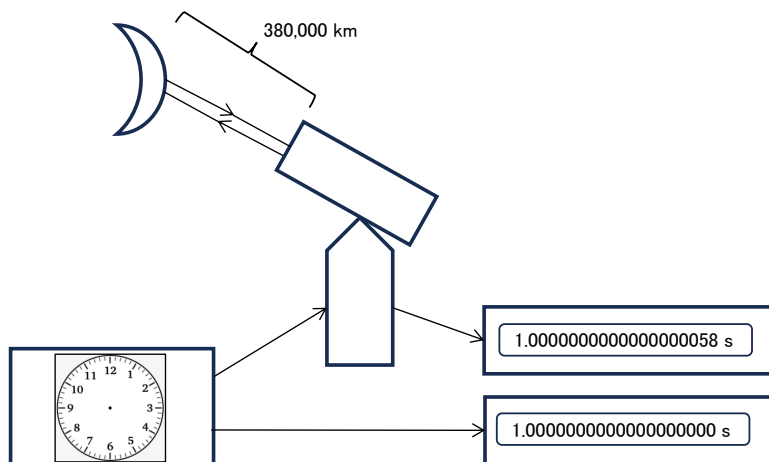


図 4: 月までの距離 38 万 km を往復させて受信するした場合の経過時間 1 秒に対する時間差

## 5 まとめと展望

複素多様体上に波動関数ベクトル役割をするベクトルを定義しこのベクトルに共変微分によって関係付けられるベクトルが2つの実ベクトルの和で書き表せる場合、この2つの実ベクトルについての不確定性関係が空間の曲率に関係付けて示すことが出来る。この様な不確定性関係は一般共变的なものである。

この不確定性関係から量子論的な不確定性関係の再現する試みとして、4次元の時空間にエネルギー・運動量の4次元を座標として取り入れた8次元の空間を考える。粒子の位置やエネルギー・運動量をこの空間上のパラメーター曲線を用いて測り、パラメーター曲線の接ベクトルを用いて粒子の時空間の位置やエネルギー・運動量を示す。x軸の空間位置と運動量のx軸成分に関する不確定性関係は、この様なベクトルの空間x軸と運動量 $P_x$ 軸への投影ベクトルを用いて示すことが出来る。

平坦な空間では不確定性関係を空間の曲率として表現することはできないが、粒子が不連続な位置のみ許される場合には平坦でない空間でも慣性系と認識できる。周期関数の計量テンソルモデルは量子論的な不確定性関係を空間の曲率として表現することができる。

このモデルの計量テンソルの周期は8次元空間の距離(時空間の座標差とエネルギー・運動量の差)の最小単位になる。これは異なる空間位置においても不変な量と考えられる。エネルギーと振動数、運動量と波長に関するド・ブロイの関係式を考慮すると最小単位と同時に最大単位も存在し、これもまた異なる空間位置においても不変な量と考えられる。特に時空間の最大単位が不変量である場合の効果については、遠方天体の光の赤方偏移や遠方(過去)にある時計の遅れとして検出出来る可能性がある。

これまでは周期関数の計量テンソルモデルについての定性的な考察であるが、計量テンソルの具体的な関数や不確定性関係の曲率表現についてを定量的に調査するには場の方程式(3.2.1)から周期関数となる計量テンソルを求めて調べる必要がある。また、この方程式は4次元の実数場の理論である一般相対論の空の時空の方程式と類似している。この式は重力場の記述も可能であると推察する。ここで取り扱った8次元空間はエネルギー・運動量もこの中に含まれるのでこの式は空の時空のみを示したのではなくエネルギー・運動量も含まれた方程式である。この式の詳細な調査も今後の課題である。

## 6 付記

本原稿は、個人的な考察をまとめたものである。

## 参考文献

- [1] Kempf A 1994 J. Math. Phys. 35 4483–4496.
- [2] Kempf A, Mangano G and Mann R B 1995 Phys. Rev. D 52 1108.
- [3] J Pye, 2019 J. Phys.: Conf. Ser. 1275 012025.
- [4] Todorinov V, Bosso P and Das S 2019 Annals of Physics 405 92–100.
- [5] A. Einstein: Rev.Mod.Phys.20(1948),pp.35～39.