

Jxiv

[ジェイカイク / dʒeikaiv]

Title	
Author(s)	
Citation	<p>Journal title (Repository name etc.), Volume, Issue, Pages (Article number) etc. ・ ジャーナル名 (刊行物・サイト名) ・ 巻号 ・ ページ (その他論文番号等) :</p> <p>・ DOI (URL)</p> <p>Publication Date: yyyy/mm/dd ・ 出版日 : 年 月 日</p> <p>Publisher ・ 出版者 :</p>
Declaration	<p>This preprint is the _____ of the above. ・ 本プレプリントは、上記論文の _____ である。</p> <p>All necessary permissions from the publisher have ・ ジャーナル (出版者) から必要な許諾を</p>
Notes	

火星サンプルリターンの低コスト化を実現する 不確定性を考慮した深宇宙ランデブー軌道解析*1

Stochastic Trajectory Design of Deep Space Rendezvous for Low-Cost Mars Sample Return

伊 東 理 紗*2,*3・尾 崎 直 哉*4
Risa ITO and Naoya OZAKI

Key Words: Space Engineering, Mars Sample Return, Mission Design

Abstract: Returning samples from Mars is expected to provide significant scientific knowledge about the formation of planets and the origin of life. The LifeSpringsMars Mission, a novel mission concept designed by a multinational consortium from Australia, Japan, the United States, and New Zealand, aims to return samples from the Columbia Hills on Mars at a low cost. To achieve cost reduction, LifeSpringsMars mission plans to transfer samples in deep space instead of using the conventional method of transferring samples in Mars' low orbit. However, relaying samples in deep space has a high risk of losing samples in deep space, so trajectory design that accounts for uncertainties of Mars Ascent Vehicle is required. This paper presents a method to optimize the rendezvous trajectories between multiple spacecraft by extending stochastic trajectory optimization that takes account of disturbances. Introducing the Unscented Transform, the method lets us compute and optimize the stochastic trajectories. Finally, numerical examples demonstrate the feasibility of the proposed mission architecture.

記号の説明

T : 時刻
 r : 位置
 v : 速度
 R : 火星半径
 a : 軌道長半径
 f : 真近点離角
 e : 離心率
 γ : ポンプ角
 ω : 火星自転角速度
 α : 仰角
 ϕ : 方位角

添 字

L : 打上げ地点
 ∞ : 火星重力圏離脱軌道

$Mars$: 火星の状態量
 sc : 宇宙機の状態量
 0 : 初期位置

f : 終端位置

1. はじめに

ハビタブル領域に位置する火星からのサンプルリターンは惑星形成や生命起源の理解に大きな科学的知見を与える。これまでに火星探査は盛んに行われており、2003年 Gusev Crater に着陸した火星探査ローバー Spirit の探査により、Gusev Crater 内部の Columbia Hills に、かつて生命が存在した可能性を示唆する痕跡が見つかった¹⁾。この成果を受け、オーストラリア、日本、欧州を中心に、Columbia Hills からのサンプルリターンミッション (LifeSpringsMars ミッション²⁾) が検討されている。火星サンプルリターンは生命の痕跡に対する決定打になる一方で、NASA が主導する火星サンプルリターンが約 110 億ドルの費用がかかることが想定されるなど、莫大なコストがかかることが問題視されている³⁾。そこで、LifeSpringsMars ミッションでは、従来の火星低軌道上でサンプルを受け渡す手法ではなく、深宇宙空間でサンプルを受け渡す手法が採用されている。この手法は、サンプルを回収する回収機に必要な ΔV が縮小可能であることから、低コスト化が可能である。しかし、火星サンプルを搭載した火星打上げ機の不確定性を考慮した際に、深宇宙空間でサンプルを見失うリスクが最大の問題となり、不確定性を考慮した会合軌道の解析が求められる。

宇宙探査における軌道設計は、多くの不確実性要因を考慮する必要がある。これまで不確定性を考慮した軌道最適化

*1 © 2025 日本航空宇宙学会
2024年4月18日、第55期年会講演会にて発表
2024年6月4日原稿受付、2024年10月4日最終改訂稿受付、
2024年10月22日原稿受理
*2 連絡先著者 (Corresponding author): risa_i@keio.jp
*3 慶應義塾大学理工学部機械工学科
*4 国立研究開発法人宇宙航空研究開発機構

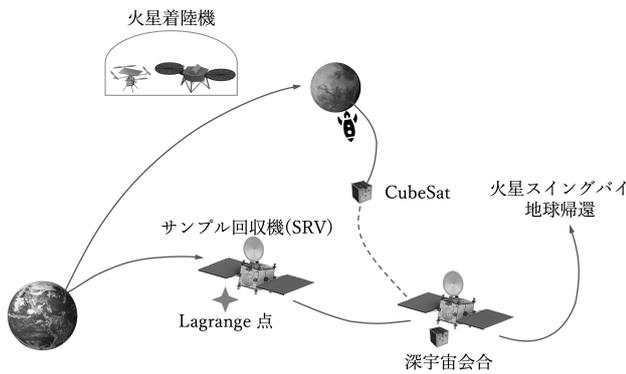
手法に関して、SDDP (Stochastic Differential Dynamic Programming) や強化学習を用いる手法などが先行研究で提案されている⁴⁻⁷⁾。しかし、これらはいずれも単一の探査機の軌道を考慮しているものであり、複数探査機のランデブーを考慮し、複数の軌道を一括で最適化する手法はまだ確立されていない。

そこで本研究では、火星サンプルリターンの帰還フェーズを想定し、低コストなミッションの実現において最大の課題となる火星打上げ機の不確定性を考慮した深宇宙ランデブー軌道設計方法を提案し、不確定性が与えるミッション成立性の評価を行う。

2. ミッションシナリオと従来手法との比較

2.1 ミッションシナリオ LifeSpringsMars ミッションのミッションシナリオを第1図に示す。火星着陸機とサンプル回収機 (Sample Retrieving Vehicle: SRV) が打ち上げられ、火星着陸機は、火星表面探査用のロボットを分離し、サンプルを採取する。一方で、SRV は電気推進を用いて減速し、太陽・火星 Lagrange 点周りの Halo 軌道上で待機する。採取されたサンプルは CubeSat に搭載され、火星打上げ機 (Mars Ascent Vehicle: MAV) を用いて火星表面から打ち上げられる。MAV は、火星の一周同期軌道へ直接軌道投入され、CubeSat を放出する。SRV は MAV の投入軌道に関する観測情報をもとに、Halo 軌道から離脱し化学推進を用いて深宇宙空間で CubeSat とランデブードッキングする。その後、火星スイングバイを経て、地球へ帰還する。

2.2 従来ミッションシナリオとの比較 LifeSpringsMars ミッションで提案するミッションシナリオと NASA が主導する従来の火星サンプルリターンのミッションシナリオの比較を第1表に示す。従来のミッションシナリオでは、火星周回低軌道でサンプルを受け渡すシナリオが採用されている。従来手法では、MAV に必要な ΔV は小さいものの、SRV が火星周回低軌道までアクセスし、再び離脱



第1図 ミッションシナリオ

第1表 従来手法との比較

	火星低軌道会合	深宇宙会合
ΔV [km/s]	4.05	> 5.03
2段ロケット質量配分最適化可否	不可能	可能
MAV 全体質量	66 kg	100 kg
SRV 全体質量	大	大

するために膨大な ΔV を要する。一方、LifeSpringsMars ミッションでは、MAV が直接深宇宙空間に CubeSat を輸送するため、MAV に必要な ΔV は大きくなるが、2段式ロケットの質量配分最適化が可能であり、MAV 全体質量で見ると大きな差は生まれない。更に、SRV が火星周回低軌道までアクセスする必要がなく、SRV の大幅な質量削減が可能である。従って、従来手法と比較して、深宇宙空間で回収するシナリオはコスト削減が見込まれる。しかし、MAV 打上げ時の不確定性による深宇宙空間で見失うリスクがあることから、本提案シナリオの最大の課題は、MAV の打上げ軌道誤差を考慮した際のミッション全体の成立性である。

3. ノミナル軌道の解析

3.1 MAV の打上げ軌道 この節では MAV の打上げ軌道を計算する。打上げ軌道の初期条件は、太陽と火星の重力を考慮した三体問題をパッチド・コニックスで近似することで得られる。Appendix A に示す計算方法によって、MAV ノミナル軌道の初期位置、初期速度は式 (1), (2) で表される。ただし、本シナリオでは、火星スイングバイは動力スイングバイではないという仮定のもと解析を行う。従って MAV が火星同期軌道へ打ち上げられる時の無限遠速度ベクトルのノルムは、火星地球遷移軌道の Lambert 問題の解として得られる速度のノルムに一致する。

$$\mathbf{r}_0 = R \begin{bmatrix} \cos \phi_L \cos \alpha_L \\ \cos \phi_L \sin \alpha_L \\ \sin \phi_L \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_\perp \begin{bmatrix} \cos \phi_L \cos \alpha_L \\ \cos \phi_L \sin \alpha_L \\ \sin \phi_L \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{rot} \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_L \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_L \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

3.2 SRV の待機軌道 この節では、SRV の待機軌道を計算する。SRV は太陽火星 Lagrange 点周りの Halo 軌道上で MAV が打ち上げられるまで待機する。Halo 軌道は、円制限三体問題 (Circular Restricted Three-Body Problem: CRTBP) を仮定した時に計算される周期軌道の一つである。太陽火星間距離が 1, 火星公転周期が 2π となるように無次元化し、位置ベクトルを $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$, 速度ベクトルを $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ とすると、CRTBP における宇宙機の運動方程式は式 (3) のように表される。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{1-\mu}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3} \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\beta}_{coli} + \boldsymbol{\beta}_{cf} \end{cases} \quad (3)$$

ただし

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = [x + \mu \ y \ z]^T & : \text{第一天体の位置ベクトル} \\ \mathbf{r}_2 = [x - (1 - \mu) \ y \ z]^T & : \text{第二天体の位置ベクトル} \\ \boldsymbol{\beta}_{coli} = [2v_y \ -2v_z \ 0]^T & : \text{コリオリ力} \\ \boldsymbol{\beta}_{cf} = [x \ y \ z]^T & : \text{遠心力} \end{cases}$$

Phase 1 : SRV の Halo 軌道離脱から会合までの最適化問題

変数 :

$$\Delta \mathbf{v}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$T_{\Delta v_2}, T_{SRV}$$

制約条件 :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{Mars} & : \text{MAV 初期条件} \\ \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{Mars} \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 & : \text{SRV 初期条件} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(\omega) & : \text{会合条件} \\ \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}(\omega) + \Delta \mathbf{v}_3 \end{cases}$$

目的関数 :

$$\min f(\Delta \mathbf{v}_i, T_{MAV}) = \sum_{i=1}^3 \Delta v_i$$

Phase 2 : 会合から火星再帰までの最適化問題

変数 :

$$\Delta \mathbf{v}_i \quad (i \in 4, 5)$$

$$T_{\Delta v_5}$$

制約条件 :

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} & : \text{会合条件} \\ \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{r}_f = \mathbf{r}_{Mars} & : \text{火星帰還条件} \end{cases}$$

目的関数 :

$$\min g(\Delta \mathbf{v}_i, T_{MAV}) = \sum_{i=4}^5 \Delta v_i$$

不確定性を持つ MAV の打上げ軌道誤差を考慮した会合軌道解析には、打上げ軌道の初期条件 (1), (2) に位置誤差, 速度誤差 $[\mathbf{r}', \mathbf{v}']$ を与えた式 (6), (7) を考える。

$$\mathbf{r}_0 = R \begin{bmatrix} \cos \phi_L \cos \alpha_L \\ \cos \phi_L \sin \alpha_L \\ \sin \phi_L \end{bmatrix} + \mathbf{r}' \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_\perp \begin{bmatrix} \cos \phi_L \cos \alpha_L \\ \cos \phi_L \sin \alpha_L \\ \sin \phi_L \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{rot} \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_L \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_L \right) \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{v}' \quad (7)$$

与える誤差を U 変換において代表点となる σ 点として、そ

れぞれの σ 点で上記の決定論的な最適化を実行する。最適化によって得られる $f(\Delta \mathbf{v}_i, T_{MAV}) + g(\Delta \mathbf{v}_i, T_{MAV})$ を用いて、確率的な ΔV 量 ($\mathbb{E}[\Delta V]$ および $\mathbb{V}[\Delta V]$) の算出ができる。この解析を T_{MAV} をパラメータとして実行することにより、投入軌道誤差を考慮した確率的な ΔV の解析を行う。

5. 数値解析の結果

5.1 数値解析の前提条件 本節では、LifeSpringsMars ミッションで想定されるシナリオをもとに数値解析を行い、提案手法およびミッションの成立性の評価を行う。ミッションシナリオをもとに、第2表、第3表の解析に用いる数値と、実行条件を示す。火星スイングバイ時刻を T_{dep} , 地球到着時刻を T_{arr} として、時刻を設定する。また、確率的な ΔV 評価の解析には、MAV のノミナル軌道と実際の軌道の誤差を仮定して、位置誤差, 速度誤差を与える。

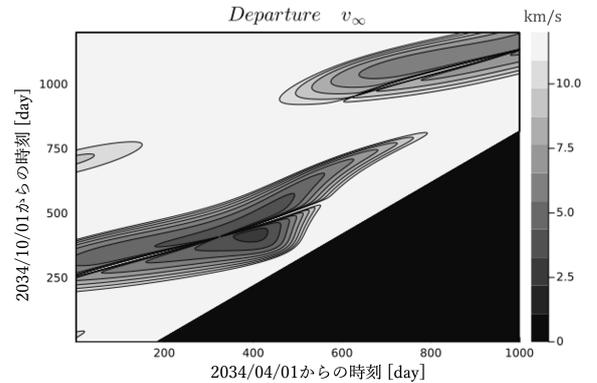
5.2 ノミナル軌道の解析 第2表の条件のもと、各日で Lambert 問題を解き、ポークチョップ図を描くと火星出発速度は第3図のようになる。ここでは、最小の v_∞ を選

第2表 各数値の設定

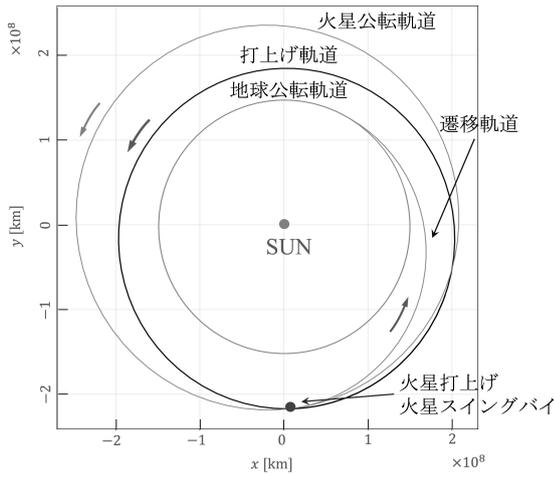
時刻の設定	
T_{dep}	2034/04/01~2037/04/01
T_{arr}	2034/10/01~2037/10/01
Halo 軌道の初期条件	
L1	$\mathbf{r}_0 = [0.9970531, 0.0, 0.002371000]$, $\mathbf{v}_0 = [0.0, -0.00773350, 0.0]$
L2	$\mathbf{r}_0 = [1.00371869, 0.0, -0.006505793]$, $\mathbf{v}_0 = [0.0, -0.006517049, 0.0]$

第3表 解析実行条件

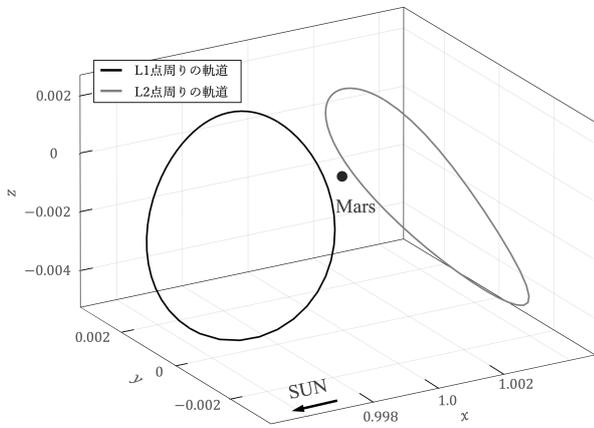
モンテカルロシミュレーション実行条件	
試行回数	各 10000 回
確率モデル	$\delta_\theta \sim N(0, (0.01/3)^2)$ [rad] $\delta_v \sim N(0, (10/3)^2)$ [m/s]
伝播時間	1 カ月, 2 カ月, 3 カ月, 6 カ月
U 変換実行条件	
パラメータ	$\alpha = 0.5, \kappa = 3.0, \beta = 2$
確率モデル	$\mathbf{r}' \sim N(0, (1/3)^2)$ [m] $\mathbf{v}' \sim N(0, (10/3)^2)$ [m/s]
伝播時間	1~6 カ月



第3図 Lambert 問題の結果 (火星出発速度)



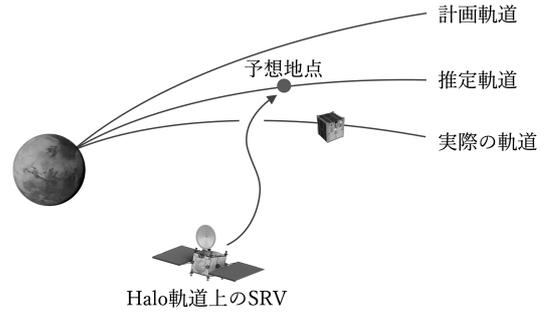
第4図 MAVの投入軌道と遷移軌道



第5図 SRVの待機軌道 (L1点とL2点周りのHalo軌道)

択し、その出発時刻を T_{min} とする。この時刻が地球帰還のための火星スイングバイ時刻となり、火星スイングバイ時刻の1火星年前に MAV の打上げ、SRV の Halo 軌道離脱が行われる。本シナリオにおいては、2033年6月20日に MAV の火星打上げ、1火星年後の2035年5月8日に火星スイングバイが行われる設定である。この火星スイングバイに必要な v_{∞} を用いて、式(1)、(2)に示す初期位置を算出し、軌道伝播すると、第4図に示す MAV のノミナル軌道 (打上げ軌道・遷移軌道) が計算される。また、SRV の待機軌道である Halo 軌道の初期位置を用いて太陽・火星の CRTBP の計算を行うと、第5図の Halo 軌道が描かれる。(例として L1 点、L2 点の2種類の Halo 軌道を描いている。)

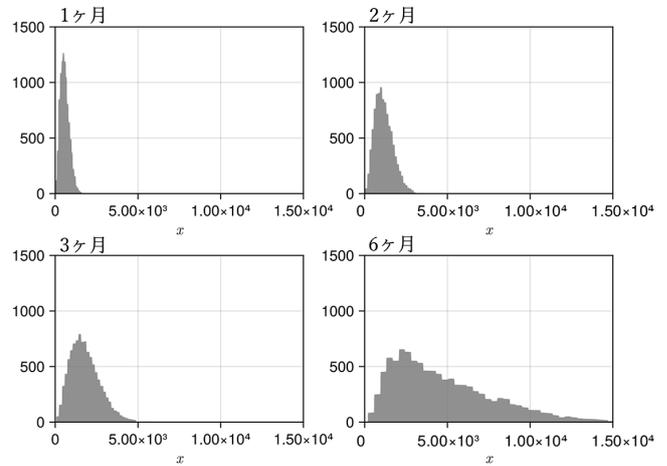
5.3 CubeSat 喪失リスクの評価 ミッションを成立させる制約条件の一つに、会合時の SRV と CubeSat の距離が、CubeSat ビーコン捕捉可能距離 (4×10^4 km 以下) に含まれることが挙げられる。第6図に示すように、SRV は火星上の探査機から得られる推定軌道上的予想地点に向かう。しかし、この推定軌道と実際の軌道には相違があり、この時、推定軌道と実際の軌道との距離がこの条件を満たす必要があり、これをモンテカルロシミュレーションを用い



第6図 想定される会合シナリオ

第4表 モンテカルロシミュレーションの結果

期間	誤差の範囲 [km]
1 カ月	$< 2.14 \times 10^3$
2 カ月	$< 3.80 \times 10^3$
3 カ月	$< 6.20 \times 10^3$
6 カ月	$< 2.19 \times 10^4$



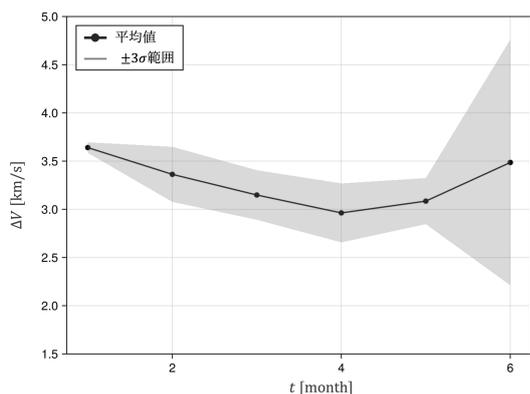
第7図 モンテカルロシミュレーションの結果

て確認する。式(1)、(2)で示される初期位置に打上げ角度誤差 δ_{θ} と打上げ速度誤差 δ_v を与えた初期位置を式(8)、(9)のように定義する。

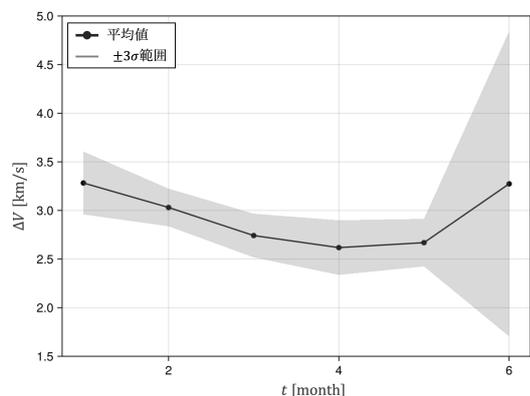
$$\mathbf{r}_0 = R \begin{bmatrix} \cos(\phi_L + \delta_{\theta}) \cos \alpha_L \\ \cos(\phi_L + \delta_{\theta}) \sin \alpha_L \\ \sin(\phi_L + \delta_{\theta}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{\perp} \begin{bmatrix} \cos(\phi_L + \delta_{\theta}) \cos \alpha_L \\ \cos(\phi_L + \delta_{\theta}) \sin \alpha_L \\ \sin(\phi_L + \delta_{\theta}) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{rot} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_L\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_L\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

第3表に示すモンテカルロシミュレーションに用いる数値は火星上の着陸機等から観測されるカメラ・センサーの精度から推定できる誤差を想定している。モンテカルロシミュレーションの実行結果は第4表、第7図のようになり、



第8図 L1点周りのHalo軌道をSRVの待機軌道とした際の確率的な ΔV の評価結果



第9図 L2点周りのHalo軌道をSRVの待機軌道とした際の確率的な ΔV の評価結果

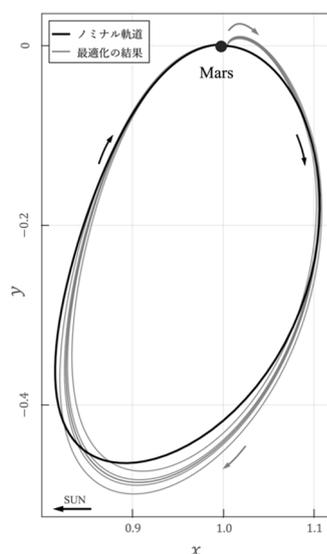
6カ月以内の期間では、誤差範囲は 2.19×10^4 km以下であることがわかる。これは会合時における通信距離としては十分であると考えられる。

5.4 MAV投入軌道誤差に対する確率的 ΔV 評価

Halo軌道の $\theta = 0$ radの位相に初期インパルス Δv_1 を与え、第3表の条件をもとに、最適化を実行することでMAV投入軌道誤差を考慮した際にSRVが必要とする確率的 ΔV を評価する。最適化問題を解き、得られる結果をU変換を用いて解析すると、第8図、第9図のようになった。これらは、MAVの打上げから会合までの時刻を変数とし、SRVのHalo軌道離脱から地球帰還までに必要となる ΔV の平均値と 3σ の推移を表している。これらの平均値の値を比較すると、L1点、L2点いずれも4カ月における会合が最適であると言える。最適化結果と、ノミナル軌道との比較を太陽中心、回転座標系で表した図を第10図に示す。また、前節のモンテカルロシミュレーションの結果より、MAV打上げから4カ月での会合は、CubeSatの初期ビーコン捕捉可能期間に含まれていることから、喪失リスクの観点からもミッション成立性が十分に高いと言える。

6. 結論と今後の課題

火星サンプルリターンは惑星形成や生命起源の理解に大きな科学的知見を与える。LifeSpringsMarsミッションで



第10図 最適化の結果とノミナル軌道との比較(各 σ 上の軌道誤差は5倍に拡大して表現している)

提案されている深宇宙空間でCubeSatを回収するミッションシナリオは、火星サンプルリターンミッションの大幅な低コスト化に資する一方で、深宇宙空間での回収は、不確実性による影響が最大の課題であった。そこで本研究では、火星サンプルリターンの帰還フェーズを想定し、MAVの不確実性を考慮した深宇宙ランデブー軌道設計方法を提案した。モンテカルロシミュレーションにより、軌道伝播時間に対する軌道投入誤差を評価し、CubeSat喪失リスクの評価を行った。また、U変換を用いて会合から火星帰還までの確率的な ΔV の分布を解析し、不確実性が考えられる条件下において、ミッション成立性が十分に高いことが示された。

しかし、本稿にて提案した手法は、MAVの打上げ時の誤差のみを考慮したモデルであり、MAVの打上げ、地球帰還軌道としては、火星一周同期軌道と火星スイングバイを経た地球遷移軌道を想定し検討を行っている。また、SRVのHalo軌道に関しても、L1点、L2点それぞれ1種類ずつのHalo軌道を想定し、SRVの出発を $\theta = 0$ と固定している。今後の課題としては、CubeSatのMAV分離時に起こりうる詳細な誤差の評価や、MAV打上げ時の投入軌道において、半周同期軌道や、深宇宙空間上の異なる地点における会合など、本シナリオ以外の想定も検討する必要がある。また、Halo軌道およびHalo軌道上の位相がどの程度 ΔV の解析に影響を与えるか、その感度の解析を行い、全体として最適なシナリオを検討する必要がある。

謝辞 本研究の一部は、(公財)中島記念国際交流財団日本人独立研究者始動助成金の支援を受けたものである。

参考文献

- 1) Clark, B. C., Arvidson, R. E., Gellert, R., Morris, R. V., Ming, D. W., Richter, L., Ruff, S. W., Michalski, J. R., Farrand, W. H., Yen, A., Herkenhoff, K. E., Li, R., Squyres,

- S. W., Schroder, C., Klingelhofer, G. and Bell, J. F.: Evidence for Montmorillonite or Its Compositional Equivalent in Columbia Hills, Mars, *J. Geophys. Res.*, **112**, E6 (2007), E06S01.
- 2) LifeSpringsMars, <https://www.lifespringmars.com/> (参照日 2024/06/03)
- 3) FY 2025 Full Budget Request (Congressional Justification), NASA Fiscal Year 2025 Budget Request, <https://www.nasa.gov/fy-2025-budget-request/>
- 4) Ozaki, N., Campagnola, S., Funase, S. and Chit, H. Y.: Stochastic Differential Dynamic Programming with Unscented Transform for Low-thrust Trajectory Design, *J. Guid. Control Dynam.*, **41**, 2 (2018), pp. 377–387.
- 5) Greco, C., Campagnola, S. and Vasile, M.: Robust Space Trajectory Design using Belief Optimal Control, *J. Guid. Control Dynam.*, **45** (2022), pp. 1060–1077.
- 6) Zavoli, A. and Federici, L.: Reinforcement Learning for Robust Trajectory Design of Interplanetary Missions, *J. Guid. Control Dynam.*, **44** (2021), pp. 1440–1453.
- 7) Ozaki, N., Campagnola, S. and Funase, S.: Tube Stochastic Optimal Control for Nonlinear Constrained Trajectory Optimization Problems, *J. Guid. Control Dynam.*, **43**, 4 (2020), pp. 645–655.
- 8) Howell, K. C.: Three-dimensional, Periodic, ‘Halo’ Orbits, *Celestial Mechanics*, **32** (1984), pp. 53–71.
- 9) 木下 宙: 天体と軌道の力学, 東京大学出版会, 東京, 1998, pp. 22–43.
- 10) Julier, S. J. and Uhlmann, J. K.: A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems, *Proceedings of SPIE*, Vol. 3068, Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI, 1997.

Appendix A. MAV 初期状態の算出

初期位置を火星位置, 終端位置を地球位置として, 2点境界値問題 (Lambert 問題) を解いて求められる v_∞ (初期速度の大きさと火星速度の大きさの差) をもとに, 解析を行う. 余弦定理を用いると火星一周同期軌道へ投入するためのポンプ角 γ は式 (10) で求められる. ただし, 一周同期軌道の条件から $v_{sc} = v_{Mars}$ を満たす.

$$\gamma = \pi - \arccos \frac{v_\infty^2 + (v_{Mars})^2 - (v_{sc})^2}{2v_\infty v_{Mars}} \quad (10)$$

火星上の打上げ地点と, 無限遠におけるエネルギー保存則 (11) より, 軌道長半径 a は式 (12) で表される.

$$v^2 - \frac{2GM}{R} = -\frac{GM}{a} \quad (11)$$

$$a = -\frac{GM}{v_\infty^2} \quad (12)$$

角運動量 h を用いて, 離心率 e は式 (13) で表される.

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{GMa}} = \sqrt{1 - \frac{R^2\omega}{GMa}} \quad (13)$$

f_0, f_∞ は軌道方程式 (14) を用いて計算され, 式 (15), (16) で表される.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + \cos f} \quad (14)$$

$r \rightarrow \infty$ の時

$$f_\infty \rightarrow \arccos \left(-\frac{1}{e} \right) \quad (15)$$

$r = R$ の時

$$f_0 = \arccos \left(\frac{1}{e} \left(\frac{1 - e^2}{R} - 1 \right) \right) \quad (16)$$

ϕ_∞ は, 火星の自転軸と球面の交点, 打上げ地点, \mathbf{v}_∞ ベクトル方向と球面の交点の3点について, 球面三角法の余弦定理式 (17) を用いて式 (18) のように求められる.

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi_\infty \right) &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi_L \right) \cos (f_\infty - f_0) \\ &\quad + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi_L \right) \sin (f_\infty - f_0 \cos \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\phi_\infty = \arcsin (\sin \phi_L \cos (f_\infty - f_0)) \quad (18)$$

x 軸を速度方向, z 軸を角運動量方向, y 軸を右手形となるように定義した座標系を「火星速度座標系」と呼ぶ. この座標系と火星中心, 赤道面を xy 平面とする MARSIAU 系との変換行列を求める. MARSIAU 系の火星速度を \mathbf{v}_{Mars}^{MI} として, \mathbf{v}_∞ の火星速度座標系における x 方向について, 式 (19) が成り立つ.

$$v_\infty \cos \gamma = v_\infty \begin{bmatrix} \cos \phi_L \cos \alpha_L \\ \cos \phi_L \sin \alpha_L \\ \sin \phi_L \end{bmatrix} \cdot \frac{v_{Mars}^{MI}}{|\mathbf{v}_{Mars}^{MI}|} \quad (19)$$

これを解いて, α_∞ は式 (20) で表される.

$$\begin{aligned} \alpha_\infty = \arcsin &\frac{\cos \gamma - \sin \phi_\infty \frac{v_{Marsz}^{MI}}{|\mathbf{v}_{Mars}^{MI}|}}{\cos \phi_\infty \left(\sqrt{\left(\frac{v_{Marsx}^{MI}}{|\mathbf{v}_{Mars}^{MI}|} \right)^2 + \left(\frac{v_{Marsy}^{MI}}{|\mathbf{v}_{Mars}^{MI}|} \right)^2} \right)} \\ &- \arctan \frac{v_{Marsx}^{MI}}{|\mathbf{v}_{Mars}^{MI}|} \end{aligned} \quad (20)$$

となる. 以上の計算により, \mathbf{v}_∞ は式 (21) で表される.

$$\mathbf{v}_\infty = v_\infty \begin{bmatrix} \cos \phi_\infty \cos \alpha_\infty \\ \cos \phi_\infty \sin \alpha_\infty \\ \sin \phi_\infty \end{bmatrix} \quad (21)$$

次に, 打上げ地点の初期位置を求める. Columbia Hills の経度から計算される ϕ_L を用いて, α_L は式 (22) で表される. ただし, $\phi_L = -15.19413^\circ$ である.

$$\begin{aligned} \alpha_L = \alpha_\infty &- \arccos \frac{\cos (f_\infty - f_0) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi_\infty \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi_L \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi_\infty \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi_L \right)} \end{aligned} \quad (22)$$

初期速度は垂直成分 \mathbf{v}_\perp に火星の自転成分 \mathbf{v}_{rot} が加わったベクトルであり, 式 (23) で表される.

$$\mathbf{v}_\perp = \sqrt{v^2 - v_{rot}^2} \begin{bmatrix} \cos \phi_L \cos \alpha_L \\ \cos \phi_L \sin \alpha_L \\ \sin \phi_L \end{bmatrix} \quad (23)$$

また,

$$\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{v}_{rot} = 0 \quad (24)$$

であるから, \mathbf{v}_{rot} は式 (25) で表される.

$$\mathbf{v}_{rot} = v_{rot} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

以上の結果を用いると, 初期位置, 初期速度は式 (26), (27) のようになる.

$$\mathbf{r}_0 = R \begin{bmatrix} \cos \phi_L \cos \alpha_L \\ \cos \phi_L \sin \alpha_L \\ \sin \phi_L \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{v}_0 = v_\perp \begin{bmatrix} \cos \phi_L \cos \alpha_L \\ \cos \phi_L \sin \alpha_L \\ \sin \phi_L \end{bmatrix} + v_{rot} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_L\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_L\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

この初期条件を用いて軌道伝播することで, 火星打上げ軌道が計算される⁹⁾.

Appendix B. Unscented Transform (U変換)

Unscented Transform (U変換) は, 非線形変換を受けた確率変数の平均値と分散を算出する方法である. U変換では, 代表点となる σ 点を用いて確立分布を推定する. n 次元のランダムな変数 \mathbf{x} (平均 $\bar{\mathbf{x}}$, 分散 \mathbf{P}_{xx}) と非線形変

換 $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ が与えられているとして, U変換は, 平均 $\bar{\mathbf{y}}$ と分散 \mathbf{P}_{yy} を求めるために用いられる.

1. σ 点 χ^i と重み係数 W_m^i, W_c^i を計算する.

$$\begin{cases} \chi^0 = \bar{\mathbf{x}} \\ \chi^i = \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{(n+\lambda)P_{(xx)_j}} \\ \chi^{(n+j)} = \bar{\mathbf{x}} - \sqrt{(n+\lambda)P_{(xx)_j}} \\ W_m^0 = \frac{\lambda}{n+\lambda} \\ W_m^j = \frac{\lambda}{2(n+\lambda)} \\ W_m^{(n+j)} = \frac{\lambda}{2(n+\lambda)} \end{cases}$$

ただし,

$$j = 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{N}, \alpha \in (0, 1]$$

$$\kappa \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}, \beta = 2$$

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$$

である.

2. 非線形変換を施した σ 点 η^i を計算する.

$$\eta^i = f(\chi^i)$$

3. 以下の式で平均値と分散を計算する.

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{2n} W_c^i \eta^i \\ \mathbf{P}_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W_c^i (\eta^i - \bar{\mathbf{y}})(\eta^i - \bar{\mathbf{y}})^T \end{cases}$$

これにより, 平均 $\bar{\mathbf{y}}$ と分散 \mathbf{P}_{yy} が求められる¹⁰⁾.