論文解説：プラズマ乱流の分解

奥野彰文 *[1,2,3], 佐々木真 [4,5]

[1] 統計数理研究所 統計基盤数理研究系　[2] 理化学研究所 AIP センター
[3] 理化学研究所 CBS センター　[4] 日本大学 生産工学部
[5] 九州大学 極限プラズマ研究連携センター

要旨

本稿は，Physics of Plasmas 誌に採択されたプラズマ乱流の分解に関する我々の論文 Okuno and Sasaki (2025a) の解説です．解説の平易さを優先するため，厳密な記述については当該論文をご参照ください．

キーワード: プラズマ，数値乱流場，分解

1　はじめに

プラズマは固体・液体・気体に続く物質の第 4 の状態と呼ばれ，気体に更にエネルギーを加えた不安定な活性状態を指します．太陽や雷・大気圏上層のオーロラなど，自然界のいたるところにプラズマが見られます．

核融合におけるプラズマでは温度やプラズマ粒子密度の不均一性から電場（静電ポテンシャル）等に乱流が生じます．この乱流の発生メカニズムを理解し，適切に制御することは，持続可能な核融合発電を実現するために不可欠です．しかしプラズマ乱流の制御はいまなお難しい課題の一つです．

プラズマ乱流とその分解

このような乱流を数値的に再現するために，プラズマ粒子密度と電場の相互作用を記述する Hasegawa-Wakatani (HW) 方程式が広く用いられています．HW 方程式により，プラズマにおける乱流のシミュレーションを行うことができるのですが，得られた乱流の挙動を直接的に理解することは困難です．そこで，時空間方向への特異値分解を介して乱流をより細かい流れに分解し，個別の流れを理解する研究が進められています (Sasaki et al. (2020), Kodahara et al. (2023) など)．これらの既存研究では特異値分解によって得られたモードを人手で大まかに分類し，その合成を考えることで，乱流を構成するいくつかの大きな流れを再構成しています．本研究では乱流と帯状流の関係を考慮し，乱流をより細かな流れに分解する体系的な方法を提案します．

2　数値乱流場と分解の指針

本研究では，HW 方程式により得られた 2 次元の電場を扱います．$\phi(x,y,t):[0,1]\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ が電場を表すとし，特に x,y がそれぞれ半径方向・周方向の座標，t が時刻を表すとします．本研究においては，周方向に均一化した流れ

$$\phi_{\mathrm{ZF}}(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(x,y,t)\mathrm{d}y$$

を特に帯状流（Zonal Flow）と呼びます．この帯状流 ϕ_{ZF} は全体 ϕ を支配している大きな流れ構造だと考えてください．本研究では，全体の流れ ϕ のうち，帯状流では説明できない残りの流れ

$$\phi_{\mathrm{turb}}(x,y,t)=\phi(x,y,t)-\phi_{\mathrm{ZF}}(x,y,t)$$

を特に乱流（Turbulence）と呼んでいます．これは，平均的で大きな構造の流れ（帯状流）で説明できない，より細かく複雑な流れです．従来の解析手法では，プラズマにおける電場は帯状流とその他の乱流成分に単純に分けられていましたが，この単純な分解では乱流の複雑な相互作用を捉えることができず，物理現象の理解に限界がありました．特に，帯状流と乱流の間に見られる微細な相互作用や，エネルギーの伝達メカニズムの詳細な解析が困難でした．

分解の指針

我々の研究の前段では，乱流データに特異値分解をかけ，得られたモードを階層型クラスタリングすることで任意の粒度で分解された流れを得る方法を提案しています (Okuno et al., 2024)．一方で，この方法は比較的複雑なプラズマ乱流ではうまく働かないことがあり，より複雑な乱流を扱うためには適切な仮定を導入する必要がありました．そこで本研究では帯状流を利用し，乱流を帯状流と類似した流れ ϕ_{pos}・帯状流と逆の流れ ϕ_{neg}・残りの流れ ϕ_{res} に分解する方法を提案しています．

* 責任著者，okuno@ism.ac.jp

3 本研究の貢献

本研究ではまず，乱流 $\phi_{\mathrm{turb}}(x,y,t)$ を非常に細かな流れに分解します．ここでは特に，部分的なフーリエ展開：

$$\phi_{\mathrm{turb}}(x,y,t) = \sum_{j\geq 0} \phi_j(x,y,t), \tag{1}$$

$$\phi_j(x,y,t) = \lambda_j(x,t)e_j(y), \tag{2}$$

を用いました．ここで，$e_j(y)$ は正弦波および余弦波から成る直交基底関数を表し，$e_j(y)$ はフーリエ係数です．ここで，互いに素な添え字の集合 $\mathcal{J}_{\mathrm{pos}}, \mathcal{J}_{\mathrm{neg}} \subset \{0,1,2,\cdots\}$ をとり，

$$\phi_{\mathrm{pos}}(x,y,t) = \sum_{j\in\mathcal{J}_{\mathrm{pos}}} \phi_j(x,y,t),$$

$$\phi_{\mathrm{neg}}(x,y,t) = \sum_{j\in\mathcal{J}_{\mathrm{neg}}} \phi_j(x,y,t),$$

$$\phi_{\mathrm{res}}(x,y,t) = \sum_{j\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus(\mathcal{J}_{\mathrm{pos}}\cup\mathcal{J}_{\mathrm{neg}})} \phi_j(x,y,t)$$

とすると，$\phi_{\mathrm{pos}}, \phi_{\mathrm{neg}}, \phi_{\mathrm{res}}$ は乱流を分解する流れであり ($\phi_{\mathrm{turb}} = \phi_{\mathrm{pos}} + \phi_{\mathrm{neg}} + \phi_{\mathrm{res}}$)，運動エネルギーおよびその密度もうまく分解することが分かります[a]．

我々の提案法ではまず，周方向に平均化された帯状流が，各半径座標 x でどれだけの速度を持っているかを表す $V[\phi_{\mathrm{ZF}}](x,t)$ と，各半径座標 x でそれぞれの流れが持つエネルギーの密度 $I[\phi](x,t)$ を計算します．$V[\phi_{\mathrm{ZF}}](x,t)$ と $I[\phi_{\mathrm{pos}}](x,t)$ ができるだけ大きな (正の) 類似度を持ち，$V[\phi_{\mathrm{ZF}}](x,t)$ と $I[\phi_{\mathrm{neg}}](x,t)$ ができるだけ大きな (負の) 類似度を持つように添え字集合 $\mathcal{J}_{\mathrm{pos}}, \mathcal{J}_{\mathrm{neg}}$ を構成し，流れ $\phi_{\mathrm{pos}}, \phi_{\mathrm{neg}}$ を構成しています[b]．これにより，帯状流と似た流れ，および帯状流と似ていない流れ $\phi_{\mathrm{pos}}, \phi_{\mathrm{neg}}$ が自然に構成され，これらの流れは

- 細かすぎず人間が理解しやすい，
- 時空間方向 (x,y,t) について連続である，
- 運動エネルギーを綺麗に分解している ($E[\phi_{\mathrm{pos}} + \phi_{\mathrm{neg}} + \phi_{\mathrm{res}}] = E[\phi_{\mathrm{pos}}] + E[\phi_{\mathrm{neg}}] + E[\phi_{\mathrm{res}}]$)，

という好ましい性質を持つことが分かります[c]．

[a] これまで使われていた単純な特異値分解では，「総運動エネルギー」をモードごとに分解できる，つまり直交するモード ϕ_j, ϕ_k について $E[\phi_j + \phi_k] = E[\phi_j] + E[\phi_k]$ となるのですが，「エネルギー密度」は分解できないことが分かり，今回の研究では特に部分的なフーリエ展開を利用することとしました．

[b] 本研究では $\mathcal{J}_{\mathrm{pos}}, \mathcal{J}_{\mathrm{neg}}$ の構成のため，遺伝的アルゴリズムを利用しています．

[c] フーリエ展開 (2) はシミュレーションで得られた離散値で非常に効率的に計算することができます．またフーリエ展開はエネルギー密度を分解するので，$V[\phi_{\mathrm{ZF}}](x,t)$ と $I[\phi](x,t)$ の類似度もモードごとに分解が可能となり，$\mathcal{J}_{\mathrm{pos}}, \mathcal{J}_{\mathrm{neg}}$ を計算する際の遺伝的アルゴリズム内部で非常に効率的な類似度計算が可能となっています．

実際に，ある設定での HW 方程式で生成した 2 次元の電場のシミュレーションデータを用いて，乱流を $\phi_{\mathrm{pos}}, \phi_{\mathrm{neg}}$ に分解した結果を図 1 と図 2 に示します．なお，Okuno and Sasaki (2025a) で利用したシミュレーションデータと実装が Okuno and Sasaki (2025b) で公開されています．

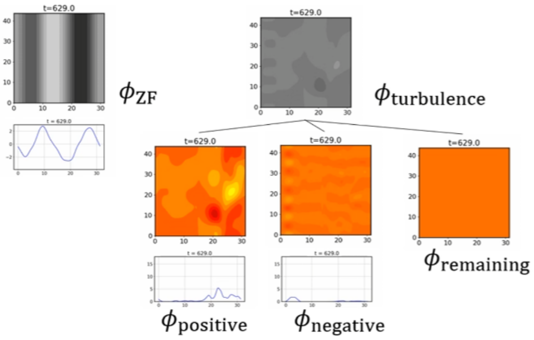

図 1: Okuno and Sasaki (2025a) により実際にプラズマ乱流を分解した例．図は Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) の下で利用可能な Okuno and Sasaki (2025b) の公開動画から抜粋して転載されました．

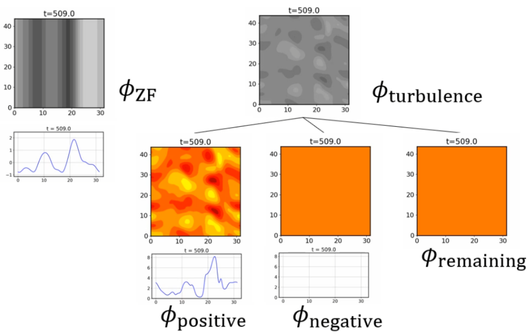

図 2: Okuno and Sasaki (2025a,b) で公開していない別の設定での分解．ϕ_{pos} 成分が優勢で ϕ_{neg} がほとんど出てこない分解の例となっています．

4 おわりに

本稿では，数値的乱流場の新しい分解法について解説しました．提案された手法は，高次元の自由度を持つ複雑な乱流構造を，簡便かつ自動的に分解することを可能にします．これにより，プラズマ乱流のエネルギー輸送や安定性解析において新たな知見が得られることが期待されます．特に，エネルギーの流れを詳細に解析することで，プラズマのより精緻な制御が可能となることが期待されます．今回得られた分解を用いて，物理的な観点からより詳細なプラズマの解析も進める予定です．また，特異値分解およびその拡張であるテンソル分解などを利用した別視点からの分解も視野に入れています．

参考文献

Kodahara, T., Sasaki, M., Kawachi, Y., Jajima, Y., Kobayashi, T., Yamada, T., Arakawa, H., and Fujisawa, A. (2023). Analysis of turbulence driven particle transport in panta by using multi-field singular value decomposition. *Plasma and Fusion Research*, 18:1202036.

Okuno, A., Kodahara, T., and Sasaki, M. (2024). Hierarchical clustering of modes in numerical turbulence fields. *Plasma and Fusion Research*, 19:1201035.

Okuno, A. and Sasaki, M. (2025a). A systematic approach to decomposing numerical turbulence field into substructures. *Physics of Plasmas*. 32(3):032502.

Okuno, A. and Sasaki, M. (2025b). Dataset and code for "a systematic approach to decomposing numerical turbulence fields into substructures". https://doi.org/10.5281/zenodo.14868307.

Sasaki, M., Kobayashi, T., Dendy, R. O., Kawachi, Y., Arakawa, H., and Inagaki, S. (2020). Evaluation of abrupt energy transfer among turbulent plasma structures using singular value decomposition. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 63(2):025004.