卒業論文における字数制約について：人的資本の観点から

澤田 健佑 *　　北川 梨津 †

2025 年 1 月 17 日

概要

本稿は，学部教育における卒業論文の最低字数制約が学生の人的資本投資に与える影響を理論的に分析する。卒業論文生産を人的資本投資の機会として捉え，研究調査と論文執筆の活動を区別したうえで，最低字数制約の設定を学部長が複数の教員に学生の卒業論文指導を委任するプリンシパル=エージェント問題として定式化した。分析の結果，教員に学生への指導が甘いタイプが含まれる場合には，ファースト・ベストにおいて実現する字数より大きい最低字数制約が望ましくなる可能性が示された。また，望ましい最低字数制約は，研究調査活動によって身に付くスキルの限界収益が高いほど小さくなり，甘い教員が多いほど大きくなるということも明らかになった。これらの知見は，大学教育における卒業論文の評価基準や指導方法を再考するうえで有用な示唆を与える。

キーワード： 卒業論文，　字数制約，　プリンシパル=エージェント問題

1　序論

学部教育における卒業論文の執筆は 4 年間の学びの集大成となる重要な課題である。日本においては多くの場合，各教員が「ゼミナール」や「研究会」などと呼ばれるグループを主宰し，卒業論文指導を行う。ゼミナールや研究会における諸活動は大学生活の少なからざる部分を占めることも稀ではないが，その諸活動の中心的な営為とも言えるのがまさに卒業論文執筆であろう。

卒業論文の指導にあたって学部や教員はいくつかの要件を課すことがある。典型的なものが，最低字数の制限である。つまり，「最低でも A4 用紙 20 ページ以上」や「最低 20000 字以上」といった要件である。こういった要件は各教員自身が定める場合もあるし，学部全体で一律に定められる場合もある。しかし，一部の大学教員からは，卒業論文の価値は文章の長さではなく内容であるのだからそういった字数制限はナンセンスであると批判されることもある。

そういった批判を念頭に，卒業論文における字数制約が卒業論文の質に与える影響を理論的に分析したのが清水 (2017) である。清水 (2017) は，研究活動と推敲活動の両方を考慮したモデルを構築し，「最低何文字以上」といった字数制約が卒業論文の質にどのように影響するかを検証している。その結果，字数制約は卒業論文の質を低下させるか，あるいは質に影響を与えないことを明ら

* 早稲田大学社会科学部。(sawada19171206@moegi.waseda.jp)
† コロンビア大学経済学部・コロンビアビジネススクール。(責任著者：ritsu.kitagawa@columbia.edu)

かにした。

清水 (2017) の理論的結論は字数制約が卒業論文の質に好影響を与えることはないという主張であり，したがってその政策的含意は卒業論文における字数制約は必ずしも望ましくないということになるであろう。この議論は卒業論文生産自体に大きな価値があるという仮定から出発している。しかし，卒業論文生産自体の価値の他にも重要な観点はあり，その一つが人的資本投資である。すなわち，卒業論文を書くことで学生の人的資本が蓄積されるという観点である。

学部レベルの卒業論文は学術的成果の追求という側面に加えて，教育的な訓練としての側面も大きい。とりわけ，研究内容を生み出すための研究・調査の活動はリサーチ・スキルという社会人になっても重要なスキルの良い訓練となるであろう。また，研究内容をまとめるために論文を書くことで身につけられるライティング・スキルはホワイトカラー労働者にとって非常に重要な人的資本である。

本稿では，卒業論文執筆を学生の人的資本投資とみなす場合に，最低字数制約がどのような影響をもたらすのかを検討する。本稿は，1 人の学部長が多数の教員に学生の卒業論文指導・評価を委任するプリンシパル=エージェント・モデルを構築し，学部長が学生の卒業論文の研究調査活動時間は観察できないが執筆活動時間（字数）のみを観察できる場合に，どのように最低字数制約を設定するかを分析した。モデルでは，学部長は学生の人的資本投資とそれにかかる学生の費用の差を最大化すると仮定し，さらに「学生の人的資本投資をまじめに考える教員」と「学生に甘い教員」の 2 つのタイプの教員を導入する。

分析の結果，学生に甘い教員が 1 人以上いる場合，望ましい最低字数制約はファースト・ベストの水準の字数を超えることが明らかとなった。また，学生に甘い教員の数が多いほど，望ましい最低字数制約が大きくなることがわかった。さらに，研究調査活動の人的資本投資に対する限界収益が大きいほど，望ましい最低字数制約が小さくなることがわかった。

この結果は，清水 (2017) とは対照的に最低字数制約が望ましい可能性を示している。学生に甘い教員が適切に卒業論文指導や評価を行わない恐れがある場合には，学生に甘い教員の学生の人的資本が蓄積されるように，厳格な指導を行う教員の学生の人的資本投資が阻害されるという費用を支払ってでも，最低字数制約を設定することが学部長の観点からは望ましい。したがって，学生の人的資本投資という観点からは，卒業論文における最低字数制約は正当化される。

本稿の構成は次の通りである。第 2 節で基本的なモデルとその分析を提示する。第 3 節で第 2 モデルの代替的な解釈や可能な拡張を簡単に述べる。第 4 節で結論を述べる。

2　基本モデル

1 人の学部長と n 人の教員のモデルを考える。簡単のため，教員 1 人につき 1 人の学生の卒業論文の指導を行うと仮定する。指導される学生は教員間で同質であるとする。

学生は卒業論文を書くことで人的資本が蓄積される。教員 i の学生の人的資本投資は，

$$h_i = \alpha r_i + w_i, \tag{1}$$

という研究調査活動時間 r_i と論文執筆時間 w_i の関数であり，そして $2 > \alpha > 0$ と仮定する。なお，本稿のモデルでは卒業論文生産自体が生み出す社会的な価値は捨象する。学生の時間は 1 に基準化して，$r_i + \ell_i \leq 1$ とする。さらに，論文執筆時間 w_i は文字数 ℓ_i に比例するものとして，

$$w_i = \ell_i, \tag{2}$$

として差し支えないと仮定する。

教員 i の学生の効用関数は卒業論文生産の費用のみと仮定して，

$$U(r_i, \ell_i) = -\frac{r_i^2}{2} - \frac{\ell_i^2}{2}, \tag{3}$$

とする。すなわち，学生は卒業論文生産から内発的にも外発的にも効用を得ないものと仮定する。この仮定は，大学最後の 1 年間は卒業論文生産よりも楽しいアウトサイド・オプション（卒業旅行など）が十分多くあるように思われること，就職活動において卒業論文について聞かれることは（就職活動のタイミングも考慮すると）極めて稀であるように思われることから正当化されうると考えられる。要するに，学生目線では，その学部を卒業さえすれば，学位によるシグナリング効果を得られるので，卒業に必要な費用を最小化することを目的とするという仮定である[1]。なお，簡単のため学生の参加制約は常に満たされると仮定する。これは，4 年生になった手前，卒業しないということの費用が十分に大きいという仮定である。

学部長は，学生の費用を考慮しつつ人的資本投資の最大化を目的とするものと仮定する。これは，学部長は学部の社会的評判を維持することが責務であるという考えに基づいている。すなわち，卒業生がきっちりと勉強してスキルが身についた人材になっていなければ企業からの評判が悪くなり，かつ，学生の費用を度外視すれば留年・退学が増加して学生からの評判が悪くなる。すると，受験市場での人気が落ちて入学者数が減り，ゆくゆくは学部が消滅する。したがって，彼女の利潤関数を，

$$\pi(r, \ell) = \sum_{i=1}^{n} \left(h_i - \frac{r_i^2}{2} - \frac{\ell_i^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha r_i + \ell_i - \frac{r_i^2}{2} - \frac{\ell_i^2}{2} \right), \tag{4}$$

と定める。最適化問題を解くと，最適な r_i^* と ℓ_i^* は，

$$\begin{cases} r_i^* = \frac{\alpha}{2}, \\ \ell_i^* = \frac{2-\alpha}{2}, \end{cases} \tag{5}$$

と求まる（計算は付録 A を参照されたい)。このとき利潤は，

$$\pi^* = \frac{n(\alpha^2 + 2)}{4}, \tag{6}$$

となる。これをファースト・ベストとして，今後のベースラインとする。

学部長にとって多くの学生の卒業論文を一つ一つ確認することが禁止的に高費用であり，そのため彼女は各教員に卒業論文の指導・評価を委任すると仮定する。簡単のため，各教員は指導してい

る学生の r_i と ℓ_i を完全にコントロールできるものとする。教員 i の効用関数は，$\beta_i \in [0,1]$ として，

$$V_i(r_i, \ell_i) = \beta_i \pi + (1-\beta_i) U(r_i, \ell_i), \tag{7}$$

という学部長の利潤関数と学生の効用関数の線型結合であるとする。パラメータ β_i は，教員 i の学生の人的資本投資の重要性に対する理解の度合いであり，$1-\beta_i$ は教員 i の学生に対する迎合の度合いを表している。すなわち，β_i が小さいほど学生に対して甘い教員であることを意味する。教員のタイプは学部長には観察不可能であると仮定する[2]。また，簡単のため教員の参加制約は常に満たされると仮定する。これは，退職することの費用が十分に大きいという仮定である。

2.1 字数制約がない場合

本稿では簡単のため，$\beta_i \in \{0,1\}$ とする。すなわち，「学生の人的資本投資を重視する教員」と「学生に甘い教員」の 2 つのタイプを考える。明らかに，学生の人的資本投資を重視する教員は，$r_i = \alpha/2, \ell_i = (2-\alpha)/2$ を選択し，学生に甘い教員は $r_i = 0, \ell_i = 0$ を選択する。以下，前者を「厳格な教員」，後者を「甘い教員」と呼ぶこととする。このとき，厳格な教員の人数を m とすると，学部長の利潤は，

$$\pi_0 = \frac{m(\alpha^2+2)}{4}, \tag{8}$$

となる。したがって，$n > m$ であれば利潤はファースト・ベストの水準を下回る。つまり，全教員が厳格なタイプでない限り，ファースト・ベストは達成されない。

2.2 字数制約がある場合

次に，学部長が卒業論文の字数 ℓ_i を観察することができて，これについて一律に最低字数制約 $\underline{\ell}$ を設けることができるものと仮定する。ただし，学部長は学生数が多いため，あるいは専門性の違いから研究調査活動の時間 r_i を観察することはできない，したがって r_i に制約を課すことができないものと仮定する。学部長が最低字数制約 $\underline{\ell}$ を設定すると，各教員の最大化問題は，

$$\max_{r_i, \ell_i} \beta_i \pi + (1-\beta_i) U(r_i, \ell_i) \quad \text{subject to } \ell_i \geq \underline{\ell}, \tag{9}$$

となって，甘い教員は $(r_i, \ell_i) = (0, \underline{\ell})$ を選び，厳格な教員は $\ell_i^* \geq \underline{\ell}$ ならば $(r_i, \ell_i) = (r_i^*, \ell_i^*)$ として，$\underline{\ell} \geq \ell_i^*$ ならば $(r_i^*, \ell_i^*) = (1-\underline{\ell}, \underline{\ell})$ とすることがわかる。このことに注意すると学部長の利潤は，

$$\pi = \begin{cases} \frac{m(\alpha^2+2)}{4} + (n-m)\left(\underline{\ell} - \frac{\underline{\ell}^2}{2}\right) & \ell_i^* \geq \underline{\ell} \text{ のとき} \\ m(\alpha - \alpha\underline{\ell} + 2\underline{\ell} - \frac{1}{2} - \underline{\ell}^2) + (n-m)\left(\underline{\ell} - \frac{\underline{\ell}^2}{2}\right) & \underline{\ell} > \ell_i^* \text{ のとき} \end{cases} \tag{10}$$

となることがわかる。第 1 のケースでは，最適な最低字数制約 $\underline{\ell}_1$ は，

$$\underline{\ell}_1 = \frac{2-\alpha}{2}, \tag{11}$$

であるから，これを代入すると利潤は，

$$\pi_1 = \frac{n}{2} + \frac{\alpha^2(3m-n)}{8}, \tag{12}$$

となる（計算は付録 B を参照されたい）。

第 2 のケースでは，最適な $\underline{\ell}_2$ は

$$\underline{\ell}_2 = 1 - \frac{\alpha m}{n+m}, \tag{13}$$

であるから，これを代入すると利潤は，

$$\pi_2 = \frac{n}{2} + \frac{\alpha^2 m^2}{2(n+m)}, \tag{14}$$

となる（計算は付録 B を参照されたい）。さて，$\pi_2 > \pi_1$ となる必要十分条件は，

$$(m-n)^2 > 0, \tag{15}$$

すなわち，$n > m$ であることがわかる。

この条件が満たされるとき，つまり 1 人以上の甘い教員がいると，学部長にとって最適な最低字数制約は厳格な教員の学生にとって最適な水準の字数を上回ってしまい，同時に最適な水準の研究調査時間を下回ってしまう。つまり，本来なら厳格な教員は，$r_i = \alpha/2, \ell_i = (2-\alpha)/2$ としたいのに，$\ell_i \geq \underline{\ell}_2$ という制約を受けるため，$r_i = 1 - \underline{\ell}_2 = \alpha m/(n+m) < \alpha/2, \ell_i = \underline{\ell}_2 > (2-\alpha)/2$ とせざるをえなくなるということである。直観的には，甘い教員がいることで，厳格な教員の学生について最適な水準の人的資本投資ができなくなってしまうということである。

簡単な計算を行うと，次の命題が示せる (証明は付録 C を参照されたい)。

命題 1　$n > m$ ならば，$\pi^* > \pi_2 > \pi_0$ である。$n = m$ ならば，$\pi^* = \pi_1 = \pi_0$ である。

命題 1 の直観的な解釈は次の通りである。甘い教員が 1 人以上いれば，利潤はファースト・ベストの水準，最低字数制約がある場合の水準，最低字数制約がない場合の水準の順に大きい。そして，甘い教員が 1 人もいない場合には字数制約を設けても設けなくても利潤は変わらない。したがって，甘い教員が 1 人以上いる場合には，甘い教員の学生の人的資本が蓄積されるように，厳格な教員の学生の人的資本投資が阻害されるという費用を支払ってでも，最低字数制約を設けることが学部長の利潤の観点から望ましい。

さて，$n > m$ という条件のもとでの最適な最低字数制約 $\underline{\ell}_2(\alpha, m)$ について比較静学を行うと，次の結果が得られる。

1. $\frac{\partial \underline{\ell}_2}{\partial \alpha}(\alpha, m) = -\frac{m}{n+m} < 0$: 研究調査活動の人的資本に対する限界収益が大きくなると，望ましい最低字数制約は小さくなる。
2. $\underline{\ell}_2(\alpha, m+1) - \underline{\ell}_2(\alpha, m) = -\alpha \left[\frac{m+1}{n+m+1} - \frac{m}{n+m}\right] < 0$: 厳格な教員の数が多くなると，望ましい最低字数制約は小さくなる。

研究調査活動の人的資本に対する限界収益 α の解釈は 2 通りある。第一に，単純にリサーチ・スキルの労働市場における相対的な価値という解釈である。リサーチ・スキルの価値が大きくなれば，厳格な教員の学生の研究調査時間を阻害することの費用が大きくなるので，その分，望ましい最低字数制約は小さくなる。第二に，その学部に所属する学生が研究調査活動に時間を費やすことで学びにつながる程度である。リサーチの方がライティングよりも高度な作業であるとすると，そもそも一定以上の認知能力が備わっていなければやっても無為であるかもしれない。すると，その学部の学生の平均的な能力が高いほど，望ましい最低字数制約は小さくなると解釈できる。なお，α の $\underline{\ell}^*$ に対する負の効果の絶対値は，厳格な教員の比率 $\frac{m}{n+m}$ について増加する。つまり，厳格な教員が多いときほど，研究調査活動の人的資本に対する限界収益が大きくなったときに最低字数制約をより大きく引き下げることが望ましい。

学部長方針を遵守する教員の数 m の解釈は素直である。表裏を言えかえれば，甘い教員の数が多くなると望ましい最低字数制約は大きくなる，ということになる。この効果も研究調査活動の人的資本に対する限界収益について絶対値の意味で大きくなる。つまり，リサーチ・スキルの労働市場における相対的な価値が大きいほど，あるいは，その学部の学生の平均的な能力が高いほど，厳格な教員の数が増えたときに最低字数制約をより大きく引き下げることが望ましい。

以上の通り，1 人の学部長と多数の教員の間のプリンシパル=エージェント・モデルを検討することで，甘い教員がいると望ましい最低字数制約はファースト・ベストの字数を上回ること，研究調査活動の人的資本に対する限界収益が大きいほど望ましい最低字数制約は小さくなること，学生に甘い教員が多いほど望ましい最低字数制約は大きくなることが明らかになった。

3　モデルの代替的な解釈，学生タイプの拡張

第 2 節の基本モデルは，1 人の学部長と多数の教員の間のプリンシパル=エージェント・モデルであったが，これはそのまま 1 人の指導教員と多数の学生の間のプリンシパル=エージェント・モデルとしても解釈できる。つまり，指導教員は学生の人的資本の総和を最大化しようとするが，r_i は観察できず ℓ_i のみ観察できるという設定である[3]。そして学生の間にはどれくらい自身の人的資本投資を重視するかという点で異質性があるという解釈になる。このような再解釈を行えば，ゼミに所属する学生らが人的資本投資に重要性を感じているほど，そして，彼ら彼女らの研究調査活動に対する限界収益が大きいほど，そのゼミにおいて指導教員が設定する最低字数制約は小さくなるという予測が導かれる。

次に潜在的な拡張について簡単に論じる。基本モデルでは各教員が指導する学生の同質性を仮定していた。しかし，同じの学部の中でも学生の能力や卒業論文に対するモチベーションには違いがあるはずである。つまり，α_i が i について変動することを許容するという拡張が考えられる。ここでは簡単のため学生に 2 つのタイプ $\alpha_i \in \{0, \alpha\}$ があると考える（$2 > \alpha > 0$）。便宜的に，$\alpha_i = \alpha$ なる学生たちを優秀層，$\alpha_i = 0$ なる学生たちを平凡層と呼ぶことにする[4]。優秀層の数を k として，平凡層の数を $n - k$ とする。ここで，正のアソータティブ・マッチングの仮定，すなわち，優秀層は人数的に可能であれば厳格な教員に師事するという仮定をおく。基本モデルでは学生に甘い教員

の学生は常に $r_i = 0$ であったため，$m = k$ の場合は基本モデルの結果と同じになる。また，$m < k$ の場合もすべての厳格な教員が優秀層を指導し，一部の学生に甘い教員が優秀層を指導して，残りが平凡層を指導すると仮定すれば，やはり基本モデルと同じ結果となる。そして，$m > k$ の場合は厳格な教員にはみ出てしまう平凡層については $r_i = 0$ で $\ell_i = 1$ となるため，その分だけ最低字数制約を大きくすることの費用が小さくなるので，望ましい最低字数制約が大きくなる。

次に，ややアドホックではあるが，厳格な教員は優秀層に最適な指導スタイルを常に実践すると仮定する。つまり，仮に指導する学生が r_i の人的資本に対する限界収益がゼロである平凡層でも最低字数制約がバインドしなければお構いなく $r_i = \alpha/2, \ell_i = (2-\alpha)/2$ とするという仮定である。これは，学生のタイプに合わせて指導スタイルを変えることが教員にとって高費用である場合に妥当な仮定となる。このような仮定を置いた場合，厳格な教員の指導を受ける平凡層の学生が多いときには，$\underline{\ell}$ を $(2-\alpha)/2$ よりも大きく設定することで，無駄に r_i に時間が割り振られることを阻止することが望ましいということになる。つまり，極端な例を考えると，全教員が厳格であるが全学生が平凡層である場合，望ましい最低字数制約は $\underline{\ell}^* = 1$ となるのである。したがって，このような仮定のもとでは，厳格な指導をする教員が多く，優秀層の学生の数が少ないというミスマッチがあるときにも，卒業論文の望ましい最低字数制約は大きくなる。

4　結論

本稿では，卒業論文執筆を学生にとっての人的資本投資と捉え，「最低字数制約」が与えられたときに，学部全体でどのような人的資本の蓄積が実現されるかをプリンシパル=エージェント・モデルを用いて分析した。 既存研究である清水 (2017) は，字数制約が卒業論文の質を向上させることはないと結論づけたが，本稿では卒業論文生産の教育的価値や人的資本投資の視点を強調することで，最低字数制約が望ましくなる場合が存在することを示した。

具体的には，「学生の人的資本投資を重視する教員」と「学生に甘い教員」が混在すると，学生に甘い教員の学生が研究調査活動や執筆活動を十分に行わない恐れがある。こうした学生が少なくとも一定以上の執筆をするように制約を与えようとすれば，本来は適切な研究調査時間と適切な字数で人的資本を最大化できる学生（学生の人的資本投資を重視する教員の学生）も，やや過剰な執筆時間の捻出を強いられることになる。その結果，ファースト・ベストで望ましい字数よりも高い水準の最低字数制約が望ましくなる可能性があることを示した。 さらに，研究活動の限界収益（リサーチ・スキルの価値）が高いほど最低字数制約の望ましい水準は小さくなること，学生に甘い教員の割合が高いほど望ましい最低字数制限は大きくなることも明らかにした。

しかしながら，清水 (2017) が指摘するように，本来的にこのようなトピックは多分に実証的な検証を要するものである。たとえば、ゼミをクラスターとして最低字数制約をランダマイズすることで，卒業論文コンクール受賞率や就職先企業の社格など適切なアウトカムを設定したうえで因果関係を識別することが可能である（学生に甘い教員，厳格な教員の測定にはこれまたひと工夫が必要である）。今後，そのような実証研究の蓄積が待たれる。（7,064 文字）

付録 A：最適な r_i^* と l_i^* の導出

ファースト・ベスト（学部長が各学生の研究調査活動時間と論文執筆時間をコントロールできるとき）において学部長は,

$$\max_{r,\ell}\ \pi(r,\ell) = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha r_i + \ell_i - \frac{r_i^2}{2} - \frac{\ell_i^2}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & r_i + \ell_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n, \\ & r_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ & \ell_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

という利潤最大化問題を解く。この最大化問題は分離可能であるため，各 i に対しての最適解を求める。まず, ラグランジュ関数を,

$$\mathscr{L} = \left(\alpha r_i + \ell_i - \frac{r_i^2}{2} - \frac{\ell_i^2}{2}\right) + \lambda_1(1 - r_i - \ell_i) + \lambda_2 r_i + \lambda_3 \ell_i$$

と設定する。一階条件は,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial r_i} = \alpha - r_i - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ell_i} = 1 - \ell_i - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

であり, これらを整理し,

$$r_i = \alpha - \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\ell_i = 1 - \lambda_1 + \lambda_3$$

を得る。カルーシュ・クーン・タッカー条件は，それぞれの制約について主問題の実行可能性，双対問題の実行可能性, 相補スラック性の順に,

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \geq 0, \quad 1 - r_i - \ell_i \geq 0, \quad \lambda_1(1 - r_i - \ell_i) = 0, \\ &\lambda_2 \geq 0, \quad r_i \geq 0, \quad \lambda_2 r_i = 0, \\ &\lambda_3 \geq 0, \quad \ell_i \geq 0, \quad \lambda_3 \ell_i = 0, \end{aligned}$$

である。まず, $0 < \alpha < 2$ であるため, 一階条件から, $\lambda_1 = \alpha - r_i + \lambda_2 > 0$ である。 第一制約についてのカルーシュ・クーン・タッカー条件から, $1 - r_i - \ell_i = 0$ である。ここで, 場合分けによって他の条件を検討する。

(i) $r_i = 0, \lambda_2 > 0$ の場合, $1 - r_i - \ell_i = 0$ から $\ell_i = 1$, $\lambda_3 = 0$ が得られる。一階条件から, $\lambda_1 = \lambda_3 - \ell_i + 1 = 0$ であるが, これは $\lambda_1 > 0$ を満たさない。
(ii) $l_i = 0, \lambda_3 > 0$ の場合, $1 - r_i - \ell_i = 0$ から $r_i = 1$, $\lambda_2 = 0$ が得られる。一階条件から, $\lambda_1 = \lambda_2 - r_i + \alpha = \alpha - 1$ である。これを代入し, $\lambda_3 = \lambda_1 + \ell_i - 1 = \alpha - 2 > 0$ を得る。 これは $0 < \alpha < 2$ を満たさない。
(iii) $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ の場合, 一階条件から, $r_i = \alpha - \lambda_1, \ell_i = 1 - \lambda_1$ である。これらを第一制約に代入し, $(\alpha - \lambda_1) + (1 - \lambda_1) = 1$ が得られる。これを整理すると, $\lambda_1 = \frac{\alpha}{2}$ が得られ,

$$\begin{cases} r_i^* &= \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}, \\ \ell_i^* &= 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{2-\alpha}{2} \end{cases}$$

が導かれる。

付録 B：字数制約がある場合の学部長の利潤の導出

$\ell_i^* \geq \ell$ の場合, 甘い教員は $(r_i, \ell_i) = (0, \underline{\ell})$ を選び, 厳格な教員は $(r_i, \ell_i) = (r_i^*, \ell_i^*)$ を選ぶ。厳格な教員に関する利潤は, ファースト・ベストと同様に,

$$\pi_{\beta_i=1} = \frac{m(\alpha^2 + 2)}{4}$$

である。甘い教員に関する利潤は, 式 (1)$(r_i, \ell_i) = (0, \underline{\ell})$ を代入し,

$$\pi_{\beta_i=0} = (n - m)\left(\underline{\ell} - \frac{\underline{\ell}^2}{2}\right)$$

である。これらを足し合わせ,

$$\pi = \frac{m(\alpha^2 + 2)}{4} + (n - m)\left(\underline{\ell} - \frac{\underline{\ell}^2}{2}\right) \quad \ell_i^* \geq \underline{\ell} \quad \text{のとき}$$

が得られる。このとき, 最適な最低字数制約 $\underline{\ell}$ は,

$$\underline{\ell}_1 = \ell_i^* = \frac{2 - \alpha}{2}$$

である。これを代入すると,

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{m(\alpha^2 + 2)}{4} + (n - m)\left(\frac{2 - \alpha}{2} - \frac{(2 - \alpha)^2}{4 \cdot 2}\right) \\ &= \frac{2m\alpha^2 + 4m}{8} + (n - m)\left(\frac{4 - \alpha^2}{8}\right) \\ &= \frac{2m\alpha^2 + 4m + 4n - n\alpha^2 - 4m + m\alpha^2}{8} \\ &= \frac{n}{2} + \frac{\alpha^2(3m - n)}{8} \end{aligned}$$

がしたがう。

$\ell \geq \ell_i^*$ の場合, 甘い教員は $(r_i, \ell_i) = (0, \underline{\ell})$ を選び, 厳格な教員は $(r_i, \ell_i) = (1-\underline{\ell}, \underline{\ell})$ を選ぶ。甘い教員に関する利潤は上記の場合と同様に,

$$\pi_{n-m} = (n-m)\left(\underline{\ell} - \frac{\underline{\ell}^2}{2}\right)$$

である。厳格な教員に関する利潤は, 式 (1) に $(r_i, \ell_i) = (1-\underline{\ell}, \underline{\ell})$ を代入し,

$$\begin{aligned}
\pi_m &= m\left(\alpha(1-\underline{\ell}) + \underline{\ell} - \frac{(1-\underline{\ell})^2}{2} - \frac{\underline{\ell}^2}{2}\right) \\
&= m\left(\alpha - \alpha\underline{\ell} + \underline{\ell} - \frac{1-2\underline{\ell}+\underline{\ell}^2}{2} - \frac{\underline{\ell}^2}{2}\right) \\
&= m\left(\alpha - \alpha\underline{\ell} + 2\underline{\ell} - \frac{1}{2} - \underline{\ell}^2\right)
\end{aligned}$$

である。これらを足し合わせ,

$$\pi = m\left(\alpha - \alpha\underline{\ell} + 2\underline{\ell} - \frac{1}{2} - \underline{\ell}^2\right) + (n-m)\left(\underline{\ell} - \frac{\underline{\ell}^2}{2}\right) \quad \underline{\ell} > \ell_i^* \text{ のとき}$$

が得られる。このとき, 最適な最低字数制約 $\underline{\ell}$ は, 一階条件を解き,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_2}{\partial \underline{\ell}} &= m(-\alpha + 2 - 2\underline{\ell}) + n(1-\underline{\ell}) - m(1-\underline{\ell}) \\
&= -m\alpha + 2m - 2m\underline{\ell} + n - n\underline{\ell} - m + m\underline{\ell} \\
&= -\underline{\ell}(n+m) - m\alpha + 2m + n + m \\
&= 0 \\
\underline{\ell}_2 &= \frac{m - m\alpha + n}{n+m} \\
&= 1 - \frac{\alpha m}{n+m}
\end{aligned}$$

である。これを代入すると,

$$
\begin{aligned}
\pi_2 &= m\left(\alpha - \alpha\underline{\ell} + 2\underline{\ell} - \frac{1}{2} - \underline{\ell}^2\right) + (n-m)\left(\underline{\ell} - \frac{\underline{\ell}^2}{2}\right) \\
&= m\alpha - m\alpha\underline{\ell} + 2m\underline{\ell} - \frac{m}{2} - \underline{\ell}^2 m + n\underline{\ell} - \frac{n\underline{\ell}^2}{2} - m\underline{\ell} + \frac{m\underline{\ell}^2}{2} \\
&= \underline{\ell}^2\left(-\frac{m}{2} - \frac{n}{2}\right) + \underline{\ell}\,(m - m\alpha + n) + m\alpha - \frac{m}{2} \\
&= \left(1 - \frac{2\alpha m}{n+m} + \frac{\alpha^2 m^2}{(n+m)^2}\right)\left(-\frac{m}{2} - \frac{n}{2}\right) + \left(1 - \frac{\alpha m}{n+m}\right)(m - m\alpha + n) + m\alpha - \frac{m}{2} \\
&= \left(-\frac{m}{2} - \frac{n}{2} + m - m\alpha + n + m\alpha - \frac{m}{2}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\alpha m^2}{n+m} + \frac{\alpha n m}{n+m} - \frac{\alpha m^2}{n+m} + \frac{\alpha^2 m^2}{n+m} - \frac{\alpha n m}{n+m}\right) - \frac{\alpha^2 m^3 + n\alpha^2 m^2}{2(n+m)^2} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{\alpha^2 m^2}{n+m} - \frac{\alpha^2 m^3 + n\alpha^2 m^2}{2(n+m)^2} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{\alpha^2 m^2 n + \alpha^2 m^3}{2(n+m)^2} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{\alpha^2 m^2}{2(n+m)}
\end{aligned}
$$

がしたがう。

付録 C：命題 1 の証明

証明　まず，$n = m$ ならば，

$$\pi_0 = \frac{m(\alpha^2+2)}{4} = \frac{n(\alpha^2+2)}{4},$$

である。同様に，

$$\pi_1 = \frac{n}{2} + \frac{\alpha^2(3m-n)}{8} = \frac{n}{2} + \frac{2\alpha^2 n}{8} = \frac{n(\alpha^2+2)}{4},$$

である。したがって，

$$\pi^* = \pi_1 = \pi_0,$$

を得る。

次に，$n > m$ の場合を考える。まず，$\pi^* > \pi_2$ を示す。すなわち，示したい不等式は，

$$\frac{n(\alpha^2+2)}{4} > \frac{n}{2} + \frac{\alpha^2 m^2}{2(n+m)},$$

である。両辺に 4 をかけると，

$$\alpha^2 n + 2n > 2n + \frac{2\alpha^2 m^2}{n+m},$$

となって，整理すると，

$$n > \frac{2m^2}{n+m},$$

すなわち，元の不等式は,

$$n^2 + mn - 2m^2 > 0,$$

と同値であることがわかる。$n^2+mn-2m^2 = (n+2m)(n-m)$ であるから，$n > m$ に注意すると，左辺は確かに正であるから，この不等式が正しいことがわかる。

最後に，$n > m$ の場合において，$\pi_2 > \pi_0$ を示す。示したいのは,

$$\frac{n}{2} + \frac{\alpha^2 m^2}{2(n+m)} > \frac{m(\alpha^2+2)}{4},$$

である。右辺を左辺に移項して整理すると，この不等式は,

$$(n-m)\Big(2 - \frac{m\,\alpha^2}{n+m}\Big) > 0,$$

と同値であることがわかる。仮定より $n - m > 0$ なので，この不等式を示すには,

$$2(n+m) - \alpha^2 m > 0,$$

であることを確認すればよい。さて，$2 > \alpha > 0$ と仮定しているので $4 > \alpha^2$ であることに注意すると，$4m > \alpha^2 m$ である。そして，$n > m$ であるから

$$2(n+m) = 2n + 2m > 2m + 2m = 4m,$$

である。よって,

$$2(n+m) > 4m > \alpha^2 m,$$

であり，$2(n+m) - \alpha^2 m > 0$ がしがたう。 □

注

1. あるいは，清水 (2017) がそうするように，学生は卒業論文生産の価値を過小評価していると仮定してもよい。
2. あるいは，後で述べる最低字数制限を教員ごとに設定することが公平性の観点からできないと仮定してもよい。
3. この仮定はやや不自然だが，r_i は研究成果の不確実性が大きいためにノイジーにしか観察できないとか，観察するためには費用を支払う必要がある，というふうに拡張することでより現実的な設定にできるであろう。
4. 当然，優秀さとは本来，研究という 1 次元で測れるものではない。

参考文献

清水崇 (2017)「卒業論文における字数制約について」『國民經濟雜誌』216(5), pp.23–30.